

〈논 문〉

다수의 직선 다중균열이 존재하는 등방성 무한판의 교호법을 이용한 해석

박 재 학*

(1996년 3월 18일 접수)

Analysis of an Isotropic Infinite Plate with Many Collinear Multiple Cracks by the Alternating Method

Jai Hak Park

Key Words : Multiple Cracks(다중균열), Stress Intensity Factor(응력강도계수), Alternating Method(교호법)

Abstract

A method is proposed to obtain the stress intensity factors of multiple cracks lying on many straight lines in an infinite isotropic plate. In this method, analytical solutions for collinear multiple cracks subject to surface point forces are obtained and used as Green functions. For the multiple cracks lying on many straight lines, the equivalent crack surface tractions are obtained by using the alternating method and the stress intensity factors are calculated. By using the proposed method several useful problems are solved and discussed.

1. 서 론

구조물에서 발견되는 균열 중에는 한개가 아닌 수개가 거의 동시에 생성되어 성장해 가는 경우가 있는데, 그 대표적인 예가 항공기 동체의 표피를 연결하는 리벳이음에서 발견되는 균열들이다. 이 피로균열들은 수개의 리벳구멍으로부터 거의 동시에 발생되어 성장해 가는데, 특히 짧은 균열의 피로균열성장속도가 긴 균열보다 오히려 빠른 경우도 있어 결과적으로 비슷한 길이의 균열들이 각 리벳구멍으로부터 성장해 가는 특징을 보인다. 이러한 균열들을 MSD(multiple-site damage)라 하며, 비행기 동체의 잔류강도에 미치는 영향으로 인하여 최근 관심의 대상이 되고 있다. 따라서 이러한 균

열들의 해석을 위해서는 다수의 균열의 응력강도계수를 효과적으로 해석할 수 있는 방법이 필요하다.

다중균열에 관한 기존의 해석은 많이 존재하는데, Isida⁽¹⁾는 복소응력함수를 Laurent수열로 표현하여 평행한 두 균열, 일직선 상에 존재하는 규칙적으로 배열된 다중균열 등을 해석하였다. 또한 최근의 연구로는 Chfn과 Haseba⁽²⁾는 직교이방성재료 내에 존재하는 두 평행한 균열을 해석하였다. 그 밖의 연구들로는 참고문헌 (3)과 (4)의 응력강도계수에 관한 핸드북과 참고문헌 (5)의 리뷰논문 등에서 찾아 볼 수 있다. 본 논문에서는 다수의 직선상에 존재하는 임의의 수, 임의의 길이의 다중균열의 응력강도계수를 효과적으로 해석할 수 있는 방법을 제시하고자 한다.

해석방법은 Muskhelishvili⁽⁶⁾의 복소응력함수를 이용하여 직선상에 존재하는 다중균열에서 균열면에 집중하중이 작용하는 문제를 해석하고 이를

*회원, 충북대학교 안전공학과

Green함수로 하여 다중균열의 균열면 상에 임의의 트랙션이 작용되는 문제를 해석하는 것이다. Park 등⁽⁷⁾은 이 방법을 일직선 상에 배열된 리벳구멍에서 성장하고 있는 균열문제에 적용하여 피로균열성장을 해석하였다. 이때 Park 등⁽⁷⁾은 한 개의 직선 상에 존재하는 다중균열에 모드 I의 하중이 작용하는 경우를 고려하였는데, 본 논문에서는 이 방법의 적용범위를 확대시켜 다수의 직선상에 존재하는 다중균열에 모드 I 및 모드 II의 하중이 작용하는 경우를 해석하려고 한다.

본 논문에서 제시된 기본해는 추후 유한요소 교호법(finite element alternating method)과 결합시킬 경우 유한평판 내에 존재하는 임의의 다중균열 또는 여러 줄의 리벳구멍들에서 성장하고 있는 균열의 해석에 유용하게 이용될 수 있을 것이다.

2. 일직선 상에 존재하는 다중균열

등방성의 무한평판 내에서 x축상에 존재하는 다중균열 문제를 고려하여 보자. 균열면에는 임의의 분포를 가진 수직응력과 전단응력이 작용되고 있고 균열의 길이 및 위치는 임의라고 하자. 이 문제는 Fig. 1에 도시된 임의의 균열면에 작용하는 x방향 및 y방향의 집중하중에 대한 해가 알려지면 이를 Green함수로 이용하여 구할 수 있다.

우선 Fig. 1에서와 같이 x축 상에 n개의 균열이 존재하고 k번째 균열의 균열면에 x방향의 집중하중 Q와 y방향의 집중하중 P가 작용하는 문제를 고려하여 보자. 이 문제는 Muskhelishvili의 방법⁽⁶⁾을 이용하면 구할 수 있다.

균열면의 상부에 σ_y^+ , σ_{xy}^+ 의 응력이 작용되고 있고, 균열면의 하부에 σ_y^- , σ_{xy}^- 의 응력이 작용되는 경우의 복소응력함수는 다음과 같이 표시된다.⁽⁶⁾

$$\Phi(z) = \Phi_0(z) + \frac{P_n^*(z)}{X(z)} - \alpha \tag{1}$$

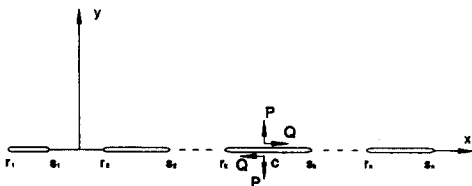


Fig. 1 Collinear multiple cracks in an infinite body, subject to point forces

$$\Omega(z) = \Omega_0(z) + \frac{P_n^*(z)}{X(z)} + \alpha \tag{2}$$

여기서,

$$\Phi_0(z) = \frac{1}{2\pi i X(z)} \int_L \frac{X^+(t)p(t)}{t-z} dt + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{q(t)dt}{t-z} \tag{3}$$

$$\Omega_0(z) = \frac{1}{2\pi i X(z)} \int_L \frac{X^+(t)p(t)}{t-z} dt - \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{q(t)dt}{t-z} \tag{4}$$

이고,

$$X(z) = \prod_{k=1}^n \sqrt{z-r_k} \sqrt{z-s_k} \tag{5}$$

$$P_n^*(z) = c_0^* z^n + c_1^* z^{n-1} + \dots + c_n^* \tag{6}$$

$$p(t) = \frac{1}{2}[\sigma_y^+(t) + \sigma_y^-(t)] - \frac{i}{2}[\sigma_{xy}^+(t) + \sigma_{xy}^-(t)] \tag{7}$$

$$q(t) = \frac{1}{2}[\sigma_y^+(t) - \sigma_y^-(t)] - \frac{i}{2}[\sigma_{xy}^+(t) - \sigma_{xy}^-(t)] \tag{8}$$

이다. 식 (3)과 식 (4)에서의 L은 $L_1, L_2, \dots, L_k, \dots, L_n$ 으로 이루어진 적분경로이며, L_k 는 x축 상에서의 r_k 에서 s_k 까지의 적분경로이다. 여기서 r_k 및 s_k 는 k번째 균열의 두 균열선단의 x좌표이다. 식 (1)과 식 (2)에서의 복소수 α 와 식 (6)에서의 계수 c_0^* 는 무한에서의 응력과 강체회전(rigid body rotation)에 관계되는 것으로 만약 무한에서 응력과 강체회전이 없다면 0이 되어야 한다.

식 (6)의 다른 계수들은 응력장이 유일해를 가지기 위한 조건에서 구할 수 있다. 그 조건은 다음과 같다:

$$x \int_{\Gamma_i} \Phi(z) dz - \int_{\Gamma_i} \Omega(\bar{z}) d\bar{z} = 0 \quad i=1, 2, \dots, n \tag{9}$$

여기서, Γ_i 는 i번째의 균열주위를 반시계방향으로 도는 적분경로이다. x는 평면변형인 경우 $x = 3-4\nu$, 평면응력인 경우 $x = (3-\nu)/(1+\nu)$ 이다. ν 는 푸아송비이다.

일단 식 (1) 및 식 (2)로 표시되는 복소응력함수가 알려지면 응력과 변위는 다음 식으로부터 구할 수 있다.

$$\sigma_x + \sigma_y = 2[\Phi(z) + \overline{\Phi(\bar{z})}] \quad (10)$$

$$\sigma_y - i\sigma_{xy} = \Phi(z) + \Omega(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)} \quad (11)$$

$$2\mu(u + iv) = x\varphi(z) - \omega(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)} \quad (12)$$

여기서, $\Phi(z) = \varphi'(z)$, $\Omega(z) = \omega'(z)$ 이고, μ 는 전 단탄성계수이다.

Fig. 1에 도시된 문제의 경우 식 (7) 및 식 (8)의 $p(t)$ 및 $q(t)$ 는 다음과 같이 표시된다.

$$p(t) = -P\delta(t-c) + iQ\delta(t-c) \quad (13)$$

$$q(t) = 0 \quad (14)$$

여기서, δ 는 Direc의 델타함수이다.

식 (13)과 식 (14)를 식 (3)과 식 (4)에 대입하면,

$$\begin{aligned} \Phi(z) = \Omega(z) = & \frac{-P+iQ}{2\pi i} \frac{1}{X(z)} \left\{ \frac{X(c)}{c-z} \right. \\ & \left. + i[c_1 z^{n-1} + c_2 z^{n-2} + \dots + c_n] \right\} \end{aligned} \quad (15)$$

이 된다. 식 (15)에서의 계수 $c_j (j=1, 2, \dots, n)$ 는 식 (6)에서의 계수 c_j^* 와 $c_j^* = (-P+iQ)c_j/2\pi$ 의 관계를 가진다. 식 (15)에서의 계수들을 구하기 위하여 식 (15)를 식 (9)에 대입하면 다음 식을 얻게 된다.

$$\begin{aligned} c_1 \int_{r_j}^{s_j} \frac{t^{n-1} dt}{X(t)} + c_2 \int_{r_j}^{s_j} \frac{t^{n-2} dt}{X(t)} + \dots + c_n \int_{r_j}^{s_j} \frac{dt}{X(t)} \\ = i \int_{r_j}^{s_j} \frac{X(c)}{X(t)} \frac{dt}{c-t}, \quad j=1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (16)$$

식 (16)의 각 항은 각 적분구간의 양끝점(end point)에서 $1/\sqrt{t}$ 의 특이성을 가진다. $j \neq k$ 인 경우는 Erdogan과 Gupta⁽⁶⁾에 의해 제안된 수치적분 공식을 사용함으로써 이 적분들을 어려움없이 행할 수 있다. 그러나 $j=k$ 인 경우는 식 (16)의 우변의 피적분함수는 적분구간 내에서 $1/t$ 의 특이성을 보이므로 수치적인 적분을 행하기가 어렵다. 이러한 어려움을 피하기 위하여 다음 관계식을 사용한다.

$$\begin{aligned} \int_{r_1}^{s_1} \frac{X(c)}{X(t)} \frac{dt}{c-t} + \dots + \int_{r_n}^{s_n} \frac{X(c)}{X(t)} \frac{dt}{c-t} \\ + \dots + \int_{r_n}^{s_n} \frac{X(c)}{X(t)} \frac{dt}{c-t} = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

위 식은 $\Phi_0(z)$ 를 $-\infty$ 에서 s_n 까지 x^+ 축을 따르는 적분경로 $x=s_n$ 을 중심으로 시계방향으로 도는 작은 원형 적분경로 s_n 에서 $-\infty$ 에서 x^- 축을 따르

는 적분경로, 폐적분경로를 이루기 위한 무한대의 반경을 가진 시계반대방향으로 도는 원형적분경로들에 대한 선적분을 고려함으로써 얻을 수 있다.

식 (17)을 사용하면 $j=k$ 인 경우에도 식 (16)의 우변의 적분을 어려움없이 행할 수 있다. 식 (16)으로부터 n 개의 선형방정식을 얻을 수 있으므로 이들 방정식에서 c_1, c_2, \dots, c_n 의 n 개의 계수들을 구하게 된다.

식 (10) 및 식 (11)로부터 다중균열의 각 균열선단에서의 응력강도계수들을 구할 수 있고, 다음과 같이 표시된다. $x=r_j$ 에 있는 균열선단에서는,

$$\begin{aligned} K_I - iK_{II} = \lim_{x \rightarrow r_j} \sqrt{2\pi(r_j - x)} (\sigma_y - i\sigma_{xy}) \\ = (P - iQ) \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{X_2} \left[\frac{X_1}{\sqrt{c - r_j}} + iP_n(r_j) \right] \end{aligned} \quad (18)$$

으로 표시된다. 여기서,

$$X_1 = \prod_{m=1, m \neq j}^n \sqrt{c - r_m} \prod_{m=1}^n \sqrt{c - s_m} \quad (19)$$

$$X_2 = \prod_{m=1, m \neq j}^n \sqrt{r_j - r_m} \prod_{m=1}^n \sqrt{r_j - s_m} \quad (20)$$

$$P_n(z) = c_1 z^{n-1} + c_2 z^{n-2} + \dots + c_n \quad (21)$$

이다.

또한 $x=s_j$ 에 있는 균열선단에서는,

$$\begin{aligned} K_I - iK_{II} = \lim_{x \rightarrow s_j} \sqrt{2\pi(x - s_j)} (\sigma_y - i\sigma_{xy}) \\ = (P - iQ) \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{X_4} \left[\frac{X_3}{\sqrt{s_j - c}} - P_n(s_j) \right] \end{aligned} \quad (22)$$

으로 표시된다. 여기서

$$X_3 = \prod_{m=1}^n \sqrt{c - r_m} \prod_{m=1, m \neq j}^n \sqrt{c - s_m} \quad (23)$$

$$X_4 = \prod_{m=1}^n \sqrt{s_j - r_m} \prod_{m=1, m \neq j}^n \sqrt{s_j - s_m} \quad (24)$$

이다.

3. 두 직선상에 존재하는 다중균열

다음으로 Fig. 2에서와 같이 임의의 방향을 가지는 두 직선이 존재하고 두 직선 상에는 임의의 수의 균열이 각각 존재하는 경우를 고려하여 보자. 이때 두 직선은 서로 교차할 수 있지만 직선위의 균열들은 서로 교차하지 않는다고 가정한다. 편의상 직선 1에 존재하는 다중균열을 “다중균열 1”이

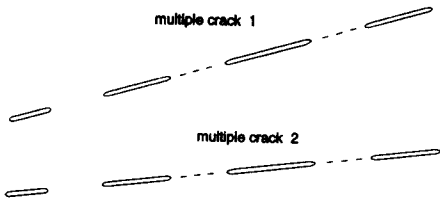


Fig. 2 Multiple cracks lying on two straight lines

라고 하고 직선 2에 존재하는 다중균열을 “다중균열 2”라고 하자.

우선 다중균열 1의 균열면에만 트랙션 t_1^0 가 가해지고 있고 다중균열 2에는 트랙션이 가해지지 않는 문제를 고려하자. 이 문제는 다음과 같은 교호법(alternating method)을 사용하여 해석할 수 있다.

우선 무한평판에 다중균열 1만이 존재하고 트랙션 t_1^0 가 가해지는 문제를 해석한다. t_1^0 는 균열면에 수직인 트랙션 t_n 과 전단방향의 트랙션 t_s 로 이루어졌다고 하면 판내의 임의의 점 (x, y) 에서의 응력 σ_{ij} 는 다음과 같은 식으로부터 구할 수 있다:

$$\sigma_{ij}(x, y) = \sum_{k=1}^n \int_{r_k}^{s_k} [f_{ij}(t; x, y)t_n(t) + g_{ij}(t; x, y)t_s(t)] dt \quad (25)$$

식에서 f_{ij} 와 g_{ij} 는 균열면 상의 좌표 t 의 위치에 각각 $P=1$ 및 $Q=1$ 의 집중하중이 작용할 경우 점 (x, y) 에 발생하는 응력 σ_{ij} 로 식 (15)의 응력함수를 식 (10) 및 식 (11)에 대입함으로써 구할 수 있다. 위 식을 Gaussian타입의 수치적분 꼴로 바꾸면,

$$\sigma_{ij}(x, y) = \sum_{k=1}^n \sum_m \left(\frac{s_k - r_k}{2} \right) [f_{ij}(t_m; x, y)t_n(t_m) + g_{ij}(t_m; x, y)t_s(t_m)] w_m \quad (26)$$

이 된다. 여기서, t_m 은 적분점의 위치, w_m 은 적분 공식에서의 가중치이다.

t_1^0 를 $t_n(t_m)$ 과 $t_s(t_m)$ 을 성분으로 하는 벡터라고 하고, 다중균열 2의 균열면이 존재하는 곳에서의 적분점에서의 트랙션을 성분으로 하는 벡터를 $-t_2^0$ 이라 하면, 식 (26)과 같은 수치적분에 의하여 $-t_2^0$ 는 t_1^0 로부터 구해지므로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$-t_2^0 = -F_{12}t_1^0 \quad (27)$$

행렬 F_{12} 는 다중균열 1의 균열면에 단위크기의 집중하중 P 또는 Q 가 작용할 경우의 다중균열 2

의 균열면 위치에서의 응력값을 이용하여 식 (26)으로부터 구할 수 있다.

위와 같이 다중균열 1만이 존재한다고 가정하여 해석한 경우는 다중균열 2의 균열면에서 트랙션이 0이 되어야 한다는 경계조건이 만족되지 않는다. 이 경계조건의 만족을 위하여 이번에는 무한 평판에 다중균열 2만이 존재하고 균열면에 트랙션 t_2^0 이 작용하는 문제를 해석한다. 그리고 다중균열 1의 균열면 위치에서의 트랙션을 구하고 이를 $-t_1^0$ 이라 하면, $-t_1^0$ 은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$-t_1^0 = -F_{21}t_2^0 \quad (28)$$

위에서 구해진 두가지 해를 더할 경우에 다중균열 2의 균열면에서 트랙션이 0이 되어야 한다는 경계조건은 만족이 된다. 그렇지만 다시 다중균열 1에서의 트랙션이 주어진 트랙션과 달라지게 되므로 다음으로 무한평판에 다중균열 1만이 존재하고 트랙션 t_1^0 이 균열면에 작용하는 문제를 풀게 된다.

이러한 과정을 균열면에서의 잔류트랙션이 무시될 수 있을 정도로 작아질 때까지 반복함으로써 경계조건을 만족하는 해를 얻게 된다. 전체의 해는 각 과정에서의 해를 모두 더함으로써 얻게 된다. 다중균열 1의 균열면에 작용한 모든 트랙션을 합하면,

$$\begin{aligned} t_1^{ep} &= t_1^0 + t_1^1 + t_1^2 + \dots \\ &= t_1^0 + F_{21}F_{12}t_1^0 + (F_{21}F_{12})^2 t_1^0 + \dots \\ &= (I - F_{21}F_{12})^{-1} t_1^0 \end{aligned} \quad (29)$$

이 된다. 또한 다중균열 2의 균열면에 작용한 모든 트랙션을 합하면,

$$\begin{aligned} t_2^{ep} &= t_2^0 + t_2^1 + t_2^2 + \dots \\ &= F_{12}t_1^0 + F_{12}F_{21}F_{12}t_1^0 + (F_{12}F_{21})^2 F_{12}t_1^0 + \dots \\ &= (I - F_{12}F_{21})^{-1} F_{12}t_1^0 \end{aligned} \quad (30)$$

이 된다. 따라서 다중균열 1에서의 응력강도계수는 무한평판 내에 다중균열 1만이 존재하고 균열면에 식 (29)로 주어지는 t_1^{ep} 의 트랙션이 작용할 때의 응력강도계수이다. 마찬가지로 다중균열 2에서의 응력강도계수는 무한평판 내에 다중균열 2만이 존재하고 균열면에 식 (30)으로 주어지는 t_2^{ep} 의 트랙션이 작용할 때의 응력강도계수이다. 이때 t_1^{ep} 과 t_2^{ep} 를 “등가트랙션(equivalent traction)”으로 부르기로 한다.

마찬가지로 고려하면 무한평판 내에 다중균열 1과 다중균열 2가 존재하고 다중균열 1의 균열면에

는 t_1^0 의 트랙션이, 다중균열 2에는 t_2^0 의 트랙션이 작용하는 경우의 “등가트랙션”은 다음과 같다 :

$$t_1^{eq} = (I - F_{21}F_{12})^{-1}(t_1^0 + F_{21}t_2^0) \quad (31)$$

$$t_2^{eq} = (I - F_{12}F_{21})^{-1}(F_{12}t_1^0 + t_2^0) \quad (32)$$

주어진 트랙션으로부터 임의의 점에서의 응력을 구하거나 등가트랙션에서 응력강도계수를 구할 경우는 2절에서 구한 집중하중에 대한 해를 Green함수로 하여 이를 적분하여야 한다. 이때 정확성은 수치적분의 영향을 받는데, 본 해석에서는 각각의 균열을 두 부분으로 나누어 각각의 부분에 대해 16점의 Gaussian 적분공식을 사용하였다. 응력강도계수를 구하는 경우에는 적분구간 내에서 $1/\sqrt{r}$ 의 특이성을 가지는 부분과 특이성이 없는 부분이 있는데 각각에 대하여 Gaussian타입의 적절한 적분공식을 사용하였다.

4. 다수의 직선상에 존재하는 다중균열

다음으로 다수의 직선 상에 존재하는 다중균열에 대하여 고려하여 보자. 편의상 3개의 직선상에 존재하는 다중균열이 있다고 가정하고 각각의 다중균열을 각각 “다중균열 1”, “다중균열 2” 및 “다중균열 3”이라고 부르기로 하자. 초기에 각각의 균열면 상에 t_1^0 , t_2^0 및 t_3^0 의 트랙션이 주어졌다고 한다면 이문제는 다음과 같은 과정을 통하여 교호법으로 해석할 수가 있다.

(1) 무한 평면상에 다중균열 1만이 존재하고 트랙션 t_1^0 이 균열면 상에 가해진 문제를 해석한다. 그리고 다중균열 2와 다중균열 3이 존재하는 곳에서의 트랙션을 구하고 이를 각각 $-t_2^1$ 및 $-t_3^1$ 이라 한다.

(2) 무한 평면상에 다중균열 2만이 존재하고 트랙션 $(t_2^0 + t_2^1)$ 이 균열면 상에 가해진 문제를 해석한다. 그리고 다중균열 1과 다중균열 3이 존재하는 곳에서의 트랙션을 구하고 이를 각각 $-t_1^2$ 및 $-t_3^2$ 이라 한다.

(3) 무한 평면상에 다중균열 3만이 존재하고 트랙션 $(t_3^0 + t_3^1 + t_3^2)$ 이 균열면 상에 가해진 문제를 해석한다. 그리고 다중균열 1과 다중균열 2가 존재하는 곳에서의 트랙션을 구하고 이를 각각 $-t_1^3$ 및 $-t_2^3$ 이라 한다.

(4) 다중균열 1만이 존재하고 $(t_1^0 + t_1^3)$ 의 트랙션이 가해지는 문제를 해석한다.

(5) 이러한 과정을 각 균열면에 가해지는 트랙션이 무시할 수 있을 정도로 작아질 때까지 행한다.

(6) 각 균열면 상에 가해진 트랙션을 모두 더한 값이 각 균열에서의 등가트랙션이 된다.

(7) 구해진 등가트랙션으로부터 식 (18) 및 식 (22)를 이용하여 각각의 균열에 대한 응력강도계수를 구한다.

기술된 방법은 직선의 수에 무관하게 적용할 수 있으므로 많은 다중균열이 존재하는 경우의 문제를 효과적으로 해석할 수 있다.

5. 문제해석 및 고찰

우선 본 해석방법의 정확성을 검토하기 위하여 발표된 계산결과가 있는 몇가지 문제를 해석하였다.

첫번째로 해석한 문제는 Fig. 3에서와 같이 길이가 $2a$ 로 동일한 두 균열이 평행하게 존재하는 경우이다. 안쪽 균열선단(Fig. 3에서의 A)에서의 모드 I 응력강도계수를

$$K_I = F\sigma\sqrt{\pi a} \quad (33)$$

으로 표시할 경우 F 를 Fig. 3에 표시하였다. 본 방법으로 구한 결과가 Isida⁽¹⁾의 결과와 잘 일치하고 있음을 알 수 있다.

다음으로 두 균열이 평행이 아닌 경우의 예로 Fig. 4에 도시된 문제를 해석하였다. 균열선단 A와 B에서의 응력강도계수를 식 (33)과 같이 표시할

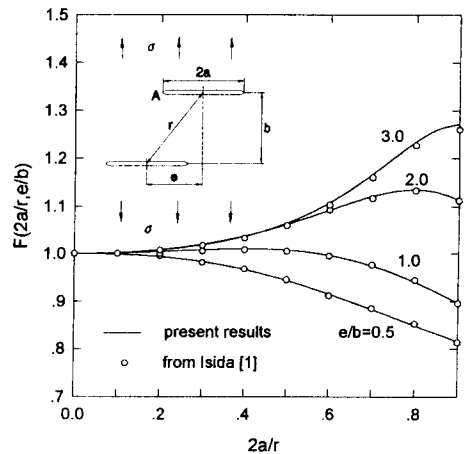


Fig. 3 Two equal parallel cracks subject to remote tension

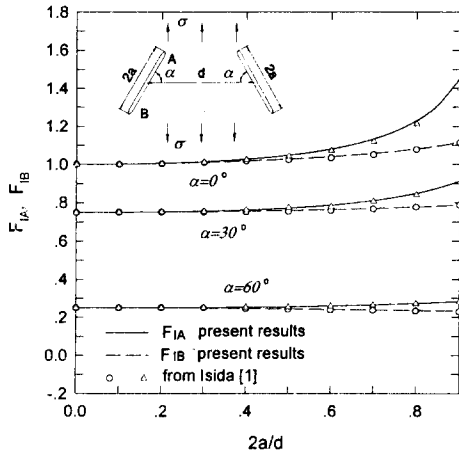


Fig. 4 Equal cracks inclined to each other

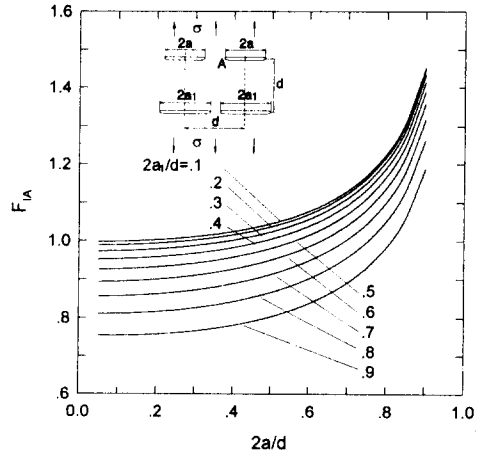


Fig. 6 F values for parallel multiple cracks

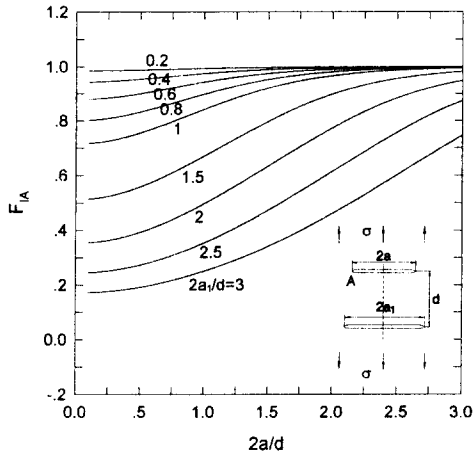


Fig. 5 F values for two parallel unequal cracks

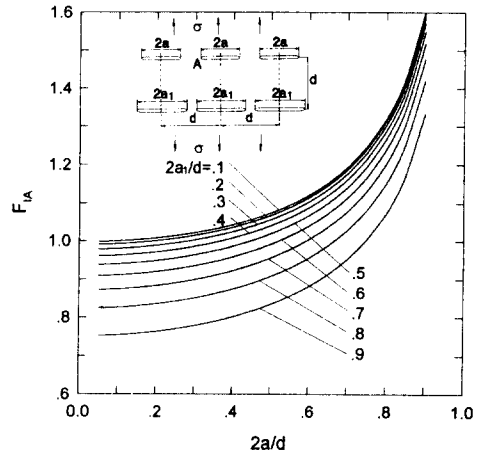


Fig. 7 F values for parallel multiple cracks

경우의 형상계수 F 값을 각각 F_{IA} 및 F_{IB} 라고 할 때 각각의 값의 변화를 Fig. 4에 도시하였다. 구해진 결과를 Isida⁽¹⁾의 결과와 비교할 경우 역시 두 값이 잘 일치하고 있음을 알 수 있다. 본 문제의 경우 모드 II의 응력강도계수도 존재하나 모드 I만을 Fig. 4에 도시하였다.

다음으로 Fig. 5에 도시된 바와 같이 길이가 각각 $2a$ 및 $2a_1$ 인 두 균열이 평행하게 있고 두 균열의 중심의 x좌표가 동일한 경우의 문제를 해석하였다. 주어진 $2a_1/d$ 에 대하여 $2a/d$ 의 변화에 따른 길이 $2a$ 균열에서의 F 값, F_{IA} 의 변화를 나타내었다. 길이 $2a$ 길이의 균열에서의 응력강도계수는 길이 $2a_1$ 인 균열의 존재로 인하여 홀로 존재할 때의 값과 비교해 작아지고 있고, 그 영향은 $2a$ 길이가

$2a_1$ 에 비해 작아질수록 커지게 된다. 평행한 두 균열이 피로균열성장하고 있을 때 두 균열은 서로의 영향으로 응력강도계수가 낮아져 결과적으로 홀로 존재할 때에 비하여 피로균열 성장률이 감소된다. 또한 평행한 두 균열에서 한 쪽의 균열길이가 길어질 경우 이의 영향으로 상대 균열에서의 응력강도계수는 홀로 존재할 때에 비해 더욱 감소하게 된다.

다음으로 Fig. 6에 도시된 바와 같이 두 평행한 직선위에 길이가 $2a$ 및 $2a_1$ 인 균열이 각각의 직선 상에 두 개씩 대칭적으로 존재하는 경우를 고려하였다. 이때 두 직선의 간격 및 직선 상에서의 균열 중심 간의 간격은 d 로 동일하다고 가정하였다. 주어진 $2a_1/d$ 에 대하여 $2a/d$ 의 변화에 따른 길이 $2a$

인 균열선단에서의 F 값, F_{IA} 의 변화를 Fig. 6에 나타내었다. $2a$ 길이가 증가할수록, 즉 두 균열이 서로 접근할수록 F_{IA} 가 증가하고 있으나 그 값은 길이 $2a_1$ 인 균열의 존재로 인하여 $2a_1/d$ 가 증가할수록 전반적으로 감소하고 있다.

다음으로 두 평행한 직선위에 길이가 $2a$ 및 $2a_1$ 인 균열이 각각 3개씩 대칭적으로 존재하는 경우를 고려하였다. 중간균열에서의 F 값, F_{IA} 을 Fig. 7에 도시하였다. 이 경우에도 두 직선의 간격 및 직선상에서의 균열중심 간의 간격은 d 로 동일하다고 가정하였다. Fig. 6의 결과와 비교할 때에 한 직선상에 균열이 3개가 됨으로 인하여 $2a/d$ 가 커질수록 F_{IA} 가 더욱 커지고 있음을 알 수 있고, 길이 2

a_1 인 균열의 존재로 인하여 Fig. 6에서와 동일하게 $2a_1/d$ 가 증가할수록 전반적으로 F_{IA} 가 감소하고 있다.

다음으로 두 평행한 직선이 존재하고 한 직선상에는 길이가 $2a$ 로 동일한 2개의 균열이, 그리고 다른 직선 상에는 길이 $2a_1$ 인 1개의 균열이 대칭적으로 있는 경우를 고려하였다. 길이 $2a$ 인 두 균열에서의 안쪽 균열선단(Fig. 8의 A점) 및 길이 $2a_1$ 인 한개의 균열에서의 균열선단(Fig. 8의 B점)에서의 F 값이 Fig. 8에 도시되었다. 각각의 F 는 응력강도계수와 다음의 관계를 가진다:

$$F_{IA} = F_{IA} \sqrt{\pi a} \tag{34}$$

$$B_{IB} = F_{IB} \sqrt{\pi a_1} \tag{35}$$

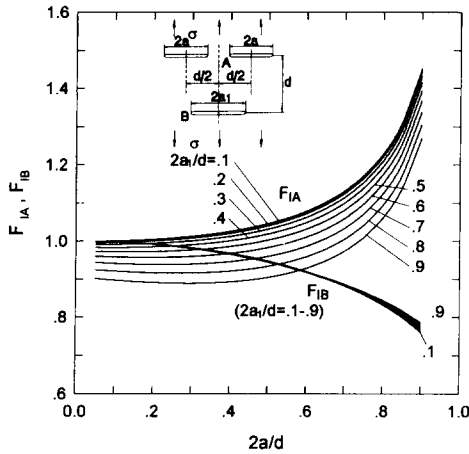


Fig. 8 F values for parallel cracks

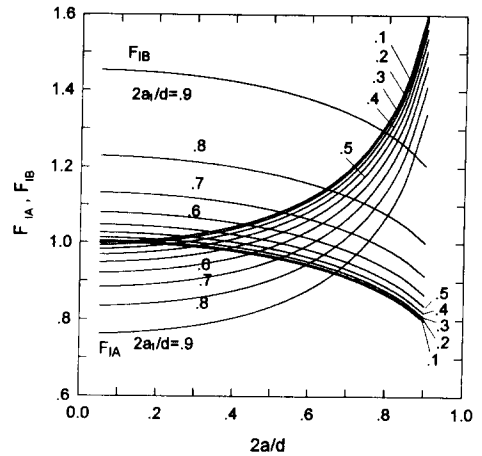


Fig. 10 F values for the parallel multiple cracks shown in the figure 9

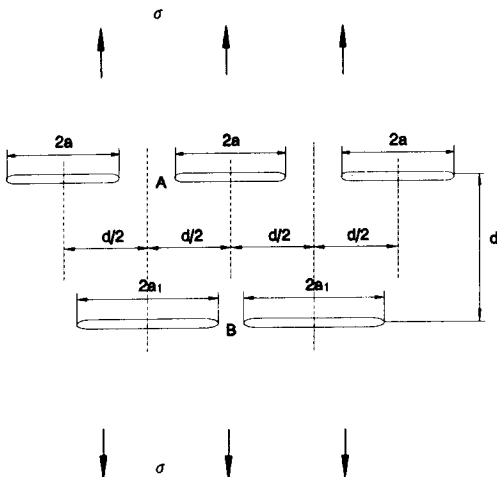


Fig. 9 Parallel multiple cracks

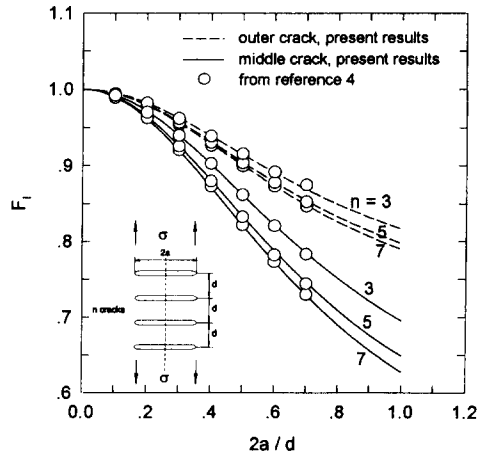


Fig. 11 F values for n parallel cracks

$2a_1/d$ 가 증가할수록 길이 $2a$ 길이의 균열에서의 응력강도계수가 감소하는 경향이 있음은 앞에서 예와 동일하나 2개씩의 균열이 존재하는 Fig. 6의 경우와 비교하면 그 감소되는 정도가 작아짐을 알 수 있다. 반면 길이 $2a_1$ 인 균열에서의 F 값은 $2a/d$ 의 증가와 더불어 감소하는 경향을 보이고 있고, $2a_1$ 길이는와는 무관하게 거의 일정한 값을 나타내고 있다.

다음으로는 한 직선상에는 길이가 $2a$ 로 동일한 3개의 균열이 그리고 다른 직선 상에는 길이 $2a_1$ 인 2개의 균열이 Fig. 9에서와 같이 대칭적으로 있는 경우를 고려하였다. 길이 $2a$ 인 세 균열중 중간 균열에서의 균열선단(Fig. 9의 A점)에서의 F 값, F_{IA} 및 길이 $2a_1$ 인 두개의 균열에서의 안쪽 균열선단(Fig. 9의 B점)에서의 F 값, F_{IB} 가 Fig. 10에 도시되었다. 각각의 F 는 응력강도계수와 식 (34) 및 식 (35)와 같은 관계를 가진다.

$2a_1/d$ 가 증가할수록 길이 $2a$ 의 균열에서의 F 값인 F_{IA} 가 감소하는 경향이 있음은 앞에서 예와 동일하다. 길이 $2a_1$ 의 균열에서의 F 값인 F_{IB} 는 $2a/d$ 의 증가와 더불어 감소하는 경향을 보이고 있다. 또한 이때 F 값은 $2a_1/d$ 에 따라 많이 변하고 있다.

다음으로 3개 이상의 직선 상에 존재하는 다중균열문제를 살펴보았다. 4장에 기술된 방법의 정확성과 효율성을 검토하기 위하여 Fig. 11과 Fig. 12에 도시된 문제를 해석하였다. Fig. 11은 무한평판 내에 동일한 길이의 n 개의 균열이 등간격으로 평행하게 존재할 때 균열면에 수직한 응력이 무한역에

작용할 때의 문제이고, Fig. 12는 동일한 균열에 전단응력이 무한역에 작용할 때의 문제이다. 해석 결과를 참고문헌 (4)에 주어진 결과와 비교한 결과 두 값이 잘 일치함을 알 수 있다.

다음은 Fig. 13에 도시한 바와 같이 3개의 평행한 직선 상에 존재하는 3개씩으로 구성된 다중균열에서 균열길이의 변화에 따른 F 값들을 살펴보았다. 두 직선 상에 존재하는 3개씩의 다중균열의 경우인 Fig. 7의 결과와 비교해 볼 때 3직선의 가운데에 존재하는 균열의 경우는 바깥쪽 직선 상에 존재하는 균열의 존재로 인하여 응력강도계수가 홀로 존재할 때에 비교해 더욱 낮아지고 있음을 알 수

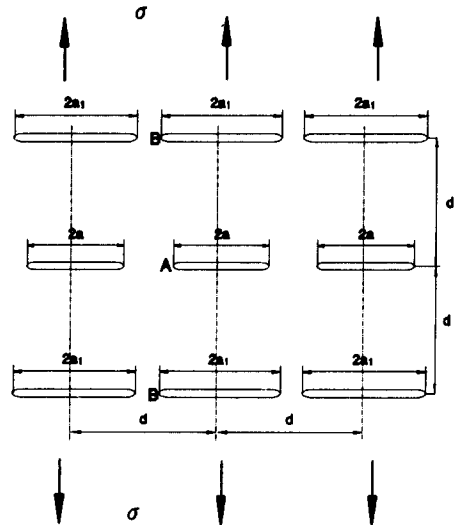


Fig. 13 Parallel multiple cracks

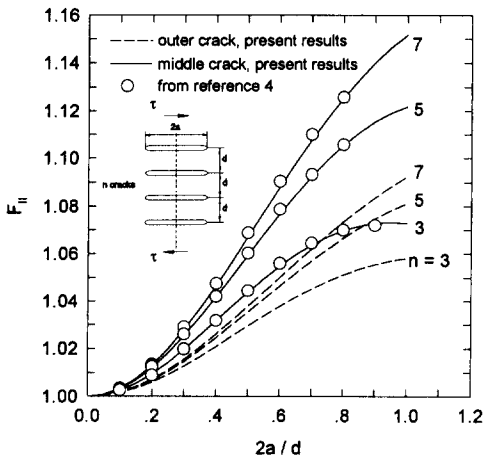


Fig. 12 F values for n parallel cracks

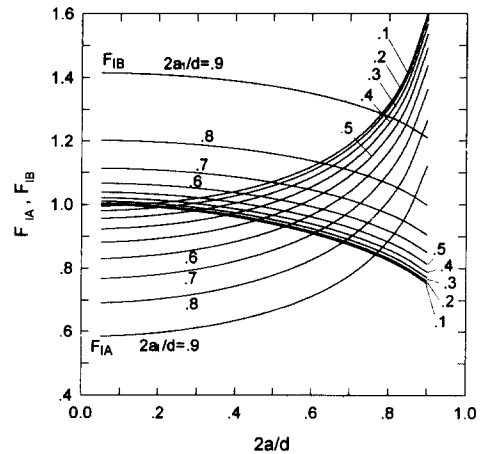


Fig. 14 F values for the parallel multiple cracks shown in the figure 13

있다.

본 논문에서 제시한 방법으로는 직선들이 평행이 아닌 경우에도 적용이 가능하지만 여기서는 한 문제를 제외하고는 직선들이 평행인 경우만을 해석하였다. 이상의 몇가지 문제의 해석을 통하여 본 방법은 임의의 길이, 임의의 방향 및 임의의 수의 균열문제를 해석하는데 효과적으로 사용될 수 있음을 알 수 있었다. 본 해석방법을 참고문헌 (7)에서와 같이 유한요소 교호법과 결합할 경우 유한한 평판에 관한 문제에도 적용할 수가 있다.

6. 결 론

다수의 직선상에 존재하는 임의의 위치 및 임의의 길이를 가지는 다중균열을 효과적으로 해석할 수 있는 방법을 제시하였다. 본 방법을 이용하여 몇가지 다중균열 문제를 해석하여 각각의 균열길이에 따른 응력강도계수의 변화를 살펴보았다.

후 기

본 연구는 1994년도 과학재단의 핵심전문연구(과제번호 941-1000-039-2)의 일부로 수행된 것입니다. 동 재단의 관계자 여러분께 감사드립니다.

참고문헌

- (1) Isida, M., 1973, "Method of Laurent Series Expansion for Internal Crack Problems," *Mechanics of Fracture*, Sih, G. C. ed., Noordhoff.
- (2) Chfn, Y. -H. and Haseba, N., 1994, "Interaction between a Main-Crack and a Parallel Micro-Crack in an Orthotropic Plane Elastic Solid," *Int. J. Solids Structures*, Vol. 31, pp. 1877~1890.
- (3) Sih, G. C., 1973, *Handbook of Stress Intensity Factors*, Lehigh Univ., Bethlehem, Pa.
- (4) Rooke, D. P. and Cartwright, D. J., 1976, *Compendium of Stress Intensity Factors*, Her Majesty's Stationery Office, London.
- (5) Kachanov, M., 1994, "Elastic Solids with Many Cracks and Related Problems," *Advances in Applied Mechanics*, Vol. 30, pp. 259~445.
- (6) Muskhelishvili, N. I., 1953, *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*, Noordhoff, Groningen.
- (7) Park, J. H. and Atluri, S. N., 1993, "Fatigue Growth of Multiple-Cracks near a Row of Fastener-Holes in a Fuselage Lap-Joint," *Computational Mechanics*, Vol. 13, pp. 189~203.
- (8) Erdogan, F. and Gupta, G. D., 1972, "On the Numerical Solution of Singular Integral Equations," *Quarterly of Applied Mathematics*, Vol. 30, pp. 525~534.
- (1) Isida, M., 1973, "Method of Laurent Series