

〈논 문〉

Inverse 해석에 의한 열전달계수 분포의 결정

김흥규* · 오수익*

(1996년 3월 28일 접수)

Evaluation of Heat Transfer Coefficient Distribution by inverse Analysis

Heung-Kyu Kim and Soo-Ik Oh

Key Words : Heat Transfer Coefficient (열전달계수), Heat Treatment (열처리), Inverse Analysis (역해석), Finite Element Method (유한요소법)

Abstract

The objective of this study is to evaluate heat transfer coefficient distribution during heat treatment by inverse analysis. As a first procedure, the inverse heat transfer formulation by using two dimensional finite element method has been developed. The formulation can handle material nonlinearity and allow arbitrary placement and number of sensors. The formulation was verified through application to simulated exact and inexact measurements.

기 호 설 명

$(\dots)^T$: 행렬 (\dots) 의 전치 (transpose) 행렬

∇ : 행렬로 표시된 구배 (gradient)

$$\left(= \left[\frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \right]^T \right)$$

k : 물체의 임의의 위치에서의 열전도율 (heat conductivity)을 나타내는 행렬, 일반적으로 표시하면,

$$\begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} \\ k_{yx} & k_{yy} \end{bmatrix}$$

T : 물체의 임의의 위치에서의 온도

ρ : 물체의 임의의 위치에서의 밀도

C_p : 일정한 압력에서 단위 질량의 물체의 온도를 단위 온도 올리는데 필요한 열량 (specific heat) ($J/kg \cdot K$)

t : 시각

T_{known} : 이미 알려져 있는 경계면에서의 온도

Γ : 물체의 경계면을 나타내는 기호

Γ_1 : 온도가 이미 알려져 있는 경계면

n^T : 경계면에서 물체 외부로 향하는 법선 (normal)을 나타내는 행렬의 전치행렬

q_{known} : 이미 알려져 있는 경계면에서의 열부하 (heat flux)

Γ_2 : 열부하가 이미 알려져 있는 경계면

$q_{unknown}$: 알려져 있지 않은 경계면에서의 열부하

Γ_3 : 열부하가 알려져 있지 않은 경계면

$T_0(x, y)$: 초기 시각에서의 물체 내부의 온도 분포

Ω : 경계로 둘러싸인 물체 내부의 영역

$d\Omega$: 물체 내부의 미소요소

W : 지배방정식 부분에 적용되는 가중치 함수

\bar{W} : 알려진 열부하 경계 조건에 적용되는 가중치 함수

$d\Gamma$: 경계면의 미소요소

N : 각 절점에서 정의된 온도로부터 임의의 점의 온도를 보간하여 결정하는 형상함수

T' : 각 절점에서의 온도로 구성된 행렬 (열 벡터 형태임)

C : 유한요소법으로 구성된 열용량에 대응하는 행렬

*회원, 서울대학교 대학원 기계설계학과

**회원, 서울대학교 기계설계학과

- K** : 유한요소법으로 구성된 열전도율에 대응하는 행렬
- Q** : 유한요소법으로 구성된 열부하에 대응하는 행렬
- q** : 경계면의 각 미소요소 상에서 정의되는 열부하
- Δt** : 시간에 대한 이산화(discretizing)에 사용된 시간증분의 크기
- $(\dots)_t$** : 시각 t 에서의 물리량(\dots)
- θ** : 시간에 대해 연속적으로 변하는 물리량을 시간에 대해 이산화하여 근사화하는데 사용되는 매개변수
- $\frac{\partial(\dots)}{\partial(\bullet)}$** : (\dots) 를 (\bullet) 로 편미분한 물리량
- Q_k** : 행렬(열벡터) Q 의 k 번째 성분
- q_j** : 열부하행렬(열벡터) q 의 j 번째 성분
- d_{kj}** : Q_k 를 q_j 로 미분한 양
- $[d_{kj}]$** : d_{kj} 로 구성된 행렬
- N_k** : 형상함수 행렬(열벡터) N 의 k 번째 성분
- $Y(t)$** : 모든 절점에서의 온도중 측정점에 대응하는 절점에서의 온도만으로 구성된 행렬(열벡터)
- S** : 측정점과 절점간의 연관관계를 표시하는 행렬
- Y_m** : 측정점에서의 측정온도로 구성된 행렬(열벡터), 실험치임
- $E(q)$** : 열부하 q 에 대응하여 이론적으로 얻어지는 측정점에서의 온도와 실제 센서로 측정된 측정점에서의 온도와의 차이의 제곱의 총합
- $Y_m(t)$** : 시각 t 에서의 측정된 Y_m
- W_s** : 각각의 측정값의 신뢰도에 따른 가중치로 구성된 행렬(대각행렬이며 가중치는 측정값의 신뢰도에 따라 상대적으로 주어짐)
- I** : 단위 정방행렬
- FTS** : $E(q)$ 를 구성할 때 고려하게 되는 미래 시간단계(future time step)의 갯수
- $H(q)$** : $E(q)$ 에 spatial regularizer를 포함하여 새롭게 정의되는 오차함수
- J** : spatial regularizer
- α_0** : 1-st spatial regularizer의 기여도를 정하는 계수
- α_1** : 2-nd spatial regularizer의 기여도를 정하는 계수
- $(\dots)^2$** : (\dots) 의 제곱
- q** : 경계면에서의 열부하 성분들로 구성된 행렬(열벡터)
- W_0** : 유한요소법으로 정식화된 1-st spatial regularizer의 가중치행렬
- W_1** : 유한요소법으로 정식화된 1-nd spatial regularizer의 가중치행렬
- $\frac{\partial N}{\partial \Gamma}$** : 형상함수 N 의 경계를 따라서의 미분
- $\lim_q H(q)^2$** : $H(q)$ 의 크기를 최소로 하는 열부하 q
- $\lim_q E(q)$** : $E(q)$ 의 크기를 최소로 하는 열부하 q
- q^*** : 임의의 가정된 열부하 q
- Δq** : 이론적으로 예측된 최소화 규칙에 따른 기존의 열부하 q 의 갱신량
- $Y_{q=q^*}(t)$** : 시각 t 에서 열부하를 q^* 로 가정했을 때 이에 대응하는 측정점에서의 온도 행렬(열벡터)
- q^n** : n 번째 반복계산 후에 참값으로 추정되는 열부하 q
- $error^n$** : n 번째 반복계산 후에 q^n 에 대응하는 측정점에서의 온도와 실제 센서를 통해 측정된 온도와의 차이의 제곱근호 값
- $\|\dots\|$** : (\dots) 의 제곱근호(square root) 값
- $|\dots|$** : (\dots) 의 절대값
- h_k** : k 번째 경계구역(boundary segment)에서의 열전달 계수
- q_k** : k 번째 경계구역에서의 열부하
- $T_{\infty,k}$** : k 번째 경계구역에 대응하는 주위온도
- $T_{s,k}$** : k 번째 경계구역 위에서의 온도(경계구역을 둘러싸는 두 절점의 온도의 평균으로 정의함)
- $h(t)$** : 열전달계수의 시간에 대한 분포양상
- $h(\Gamma)$** : 열전달계수의 경계면에 대한 분포양상
- $h(t, \Gamma)$** : 열전달계수의 시간, 공간상의 분포를 종합한 실제 분포 양상

1. 서 론

물체 표면에서의 열전달계수(heat transfer coefficient)를 결정하는 것이 대류를 수반한 열전달 현상 연구의 주된 목적이 되고 있다. 로켓 노즐이

나 우주왕복선(space shuttle)의 열해석과 안전설계, 열처리과정의 해석, 고온에서 사용될 신소재, 복합재료의 개발 등은 이러한 열전달 계수 데이터를 필요로 하는 대표적인 예이다. 이 경우, 필요로 하는 열전달계수를 얻기 위해서 물체의 표면에 센서를 부착하고 열부하(heat flux)와 표면온도를 측정하여 열전달계수를 결정하게 된다. 그런데, 물체의 표면에 센서를 부착하여 직접 경계조건을 측정하는 방법은 전체 표면에 대한 열전달계수 분포를 얻기 위하여 매우 많은 실험을 필요로 하고, 과도한 경계조건이나 급격한 경계조건의 변화를 측정하기가 매우 어려우며, 특히 센서를 부착하기 힘든 표면조건의 경우 측정 자체가 불가능할 수 있다. 이런 경우에 inverse 해석을 적용하면 물체 내부의 온도를 측정함으로써, 이런 문제점없이 열전달계수 분포를 구해낼 수 있는데, 이렇게 열전달 문제에 inverse 해석이 적용된 것을 Inverse Heat Conduction Problem(IHCP)이라 한다. 보통의 Direct(or Forward) Heat Conduction Problem에서는 주어진 경계조건으로부터 내부의 온도분포를 얻는 반면, IHCP에서는 물체 내부의 특정 위치에서 측정된 온도데이터로부터 물체 표면의 경계조건을 역으로 유추한다.

IHCP에 대해서는 1950년대 말의 우주왕복선에 관한 연구로부터 시작되어 지금까지 많은 연구^(1~5)가 진행되어 왔다. 대표적인 예를 들면, Bass는 Beck의 nonlinear estimation algorithm을 적용하여 유한요소 해석을 하였고,⁽¹⁾ Alifanov와 Rumyantsev는 IHCP에 변분접근(variation approach)을 시도하였으며, 그 이외에도 1차원 IHCP에 대한 많은 연구가 있었다. 그런데 실제 과정을 제대로 다룰 수 있는 다차원 IHCP에 대해서는 비교적 최근에 들어 연구가 시작되었다. 1980년 Bass, Drake, Ott는 2차원 비선형 IHCP에 대한 유한요소 프로그램을 개발하였는데 이것은 구하려는 경계구역 수와 센서의 수가 같아야 하는 제약을 가지고 있었고, 1986년 Hensel은 시간에 대해서는 주파수 영역에서의 필터를 도입하고 공간에 대해서는 spatial regularizer를 도입하여, 2차원 IHCP에 대한 유한요소해석을 하였고,⁽²⁾ 1987년 Osman은 2차원 문제에 대해 유한차분법을 적용하고 실제 열처리과정에 적용하였는데 경계구역 수가 센서의 수보다 작거나 같아야 하는 제약이 있었다.⁽³⁾ 그리고 1992년 Hsu는 열부하와 표면온도 두 가지에 대해

각각 2차원 유한요소 정식화를 하였는데 이 역시 경계구역 수가 센서의 수보다 작거나 같아야 하는 제약을 가지고 있었다.⁽⁴⁾

금속성형 전, 후에 수행되는 열처리의 경우, 과정동안 가공물 외부에 가해지는 열전달계수의 정확한 측정이 가공물의 기계적 성질과 형상의 변화를 예측하는데 필요함에도 불구하고 직접적인 측정이 어렵다. Inverse 해석은 이러한 열처리 과정에 적용될 수 있는 적절한 접근방법의 하나이다. 이에 본 연구에서는 궁극적으로 실제 열처리과정에 적용할 것을 목표로 2차원 유한요소법을 적용하여 IHCP를 풀 수 있는 정식화를 수행하였다. 개발된 정식은 기존의 기본 개념들을 적절히 조합하였으며 다차원 IHCP에 대한 기존의 정식들과 다른 새로운 형태를 취한다. 또 개발된 정식은 유한요소법을 바탕으로 하므로 물성치가 위치와 온도에 따라 변하는 비선형 문제를 다룰 수 있으며 임의 형상의 물체에 대해 해석 가능하다. 개발된 정식은 시물레이션으로 얻어진 가상의 실험측정치에 적용되었으며, 이 결과로부터 IHCP의 특성을 고찰하고 개발된 정식의 타당성을 검증하였다.

2. 정식화

일반적으로 다차원 문제에서 물체 내부의 온도 측정데이터 수는 구하려는 경계조건의 수보다 적다. 이는 수학적으로 말하면 부정(不定; undetermined)문제임을 뜻한다. 부정문제를 피하려면 측정센서 수를 경계 구역수보다 많게 하거나 아니면 경계구역 수가 측정센서 수보다 작게 해야 되는 데 어느 경우도 문제가 있다. 먼저 측정센서 수를 늘리는 것은 실험시에 기술적인 어려움이 있고, 경계 구역 수를 줄이는 것은 그만큼 경계조건의 공간적 분포에 대한 해석 능력을 감소시키는 것이다. 따라서 불능(不能; overdetermined)문제인 경우는 물론이고 부정문제인 경우에도 적용 가능한 정식화가 필요하다. 또 실제의 측정데이터는 측정오차를 포함하는데, IHCP의 특성상 측정값에 포함된 작은 크기의 오차는 지수적으로 증폭되어 해석 결과에 반영되게 된다. 따라서 이러한 측정오차를 적절한 조작을 통해 조절할 것도 필요하다. 이런 이유로 smoothing 조작의 사용이 필요하다. 본 연구에서는 smoothing 조작으로서 시간에 대해서는 Beck에 의해 제시된 future time information⁽⁵⁾을, 공간에 대

해서는 Hensel에 의해 제시된 spatial regularizer⁽²⁾를 도입하여 유한요소 정식을 수행하였다. 결과로 얻어진 식은 온도 측정점의 수와 위치에 제약 받지 않으며, 유한요소를 바탕으로 하므로 임의의 형상을 다룰 수 있다.

2.1 Direct 문제의 유한요소 정식화

열원(heat source)이 없고, 물체 경계의 일부에는 온도가, 다른 일부에는 열부하(heat flux)가 미리 알려져 있다고 할 때, 이 문제는 다음과 같은 지배방정식과 경계조건으로 표현된다.

$$\nabla^T \cdot (\mathbf{k} \cdot \nabla T) = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1)$$

$$\text{경계조건 : } T = T_{\text{known}}(\Gamma, t) \text{ on } \Gamma_1 \quad (2)$$

$$\mathbf{n}^T \cdot (\mathbf{k} \cdot \nabla T) = q_{\text{known}}(\Gamma, t) \text{ on } \Gamma_2 \quad (3)$$

$$\mathbf{n}^T \cdot (\mathbf{k} \cdot \nabla T) = q_{\text{unknown}}(\Gamma, t) \text{ on } \Gamma_3 \quad (4)$$

$$\text{초기조건 : } T(x, y, t=0) = T_0(x, y) \quad (5)$$

경계면 Γ_3 에는 아무 조건도 알려져 있지 않아 이면에 대해 열부하를 구하고자 하는 것이다. 이를 위해 위의 식 (4)와 같이 형식적으로 경계조건이 포함되어 있다. 실제로는 이 부분에 대해 경계 조건이 주어지지 않으므로 위의 식 (1)~(5)로부터 물체 내부의 온도분포를 바로 구할 수는 없다. 그러나 inverse 문제의 정식화 과정을 위해서 이런 형태의 식들이 필요하며, inverse 해석과정에서는 Γ_3 에서의 열부하를 추정하고 위 식으로부터 물체의 온도 분포를 구하게 된다.

이제 위 식을 유한요소법으로 정식화하기 위해 지배방정식과 경계조건에 가중잔류법(weighted residual method)을 적용하면, 다음과 같이 표현된다.

$$\int_{\Omega} \mathbf{W} \left[\nabla^T \cdot (\mathbf{k} \cdot \nabla T) - \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \right] d\Omega + \int_{\Gamma_2 + \Gamma_3} \overline{\mathbf{W}} [\mathbf{n}^T \cdot (\mathbf{k} \cdot \nabla T) - q] d\Gamma = 0 \quad (6)$$

위에서 \mathbf{W} , $\overline{\mathbf{W}}$ 는 가중치함수를 나타낸다.

온도장을 다음과 같이 절점에서의 온도벡터 $\mathbf{T} = \mathbf{T}(t)$ 와 형상함수 $N = N(x, y)$ 를 이용하여 근사화하고,

$$T = T(x, y, t) = \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{T} \quad (7)$$

가중치함수 \mathbf{W} , $\overline{\mathbf{W}}$ 에 대해 Galerkin-Bubnov 근사를 적용하여

$$\mathbf{W} = \mathbf{N}, \quad \overline{\mathbf{W}} = -\mathbf{N} \quad (8)$$

로 놓고 정리하면 다음 식을 얻는다.

$$\mathbf{C} \cdot \frac{d\mathbf{T}}{dt} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{Q} \quad (9)$$

위에서 정방행렬 \mathbf{C} , \mathbf{K} 의 i 행 j 열의 원소와 열벡터 행렬 \mathbf{Q} 의 i 행 원소는 각각 다음과 같이 표현된다.

$$C_{ij} = \int_{\Omega} (N_i \cdot \rho C_p \cdot N_j) d\Omega \quad (10)$$

$$K_{ij} = \int_{\Gamma_2 + \Gamma_3} (N_i \cdot \mathbf{n}^T \cdot \mathbf{k} \cdot \nabla \cdot N_j) d\Gamma - \int_{\Omega} (N_i \cdot \nabla^T \cdot \mathbf{k} \cdot \nabla \cdot N_j) d\Omega \quad (11)$$

$$Q_i = \int_{\Gamma_2 + \Gamma_3} (N_i \cdot q) d\Gamma \quad (12)$$

여기에서 식 (11)로 표현되는 K_{ij} 는 첫째항에 그린 정리(Green's theorem)를 적용하면 최종적으로 다음의 형태로 쓸 수 있다.

$$K_{ij} = \int_{\Omega} \left(k_x \cdot \frac{\partial N_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial x} + k_y \cdot \frac{\partial N_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) d\Omega \quad (13)$$

이제 식 (9)를 시간에 대해 이산화(discretization)하여 아래와 같이 나타낸다.

$$\mathbf{C}_t \cdot \left[\frac{\mathbf{T}_{t+\Delta t} - \mathbf{T}_t}{\Delta t} \right] + \mathbf{K}_t \cdot [\theta \mathbf{T}_{t+\Delta t} + (1-\theta) \mathbf{T}_t] = \theta \mathbf{Q}_{t+\Delta t} + (1-\theta) \mathbf{Q}_t \quad (14)$$

위에서 하첨자 t , $t+\Delta t$ 는 각각의 물리량이 정의된 시각을 표시하며, 변수 θ 의 값은 Galerkin 근사를 사용하여 $\theta = \frac{2}{3}$ 를 택한다.

그리하여 최종적으로 얻는 식은 다음의 식 (15), (16)으로 표현된다.

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{T}_{t+\Delta t} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{T}_t + (1-\theta) \mathbf{Q}_t + \theta \mathbf{Q}_{t+\Delta t} \quad (15)$$

$$\text{초기조건 : } \mathbf{T}(0) = \mathbf{T}_0 \quad (16)$$

위에서 온도 \mathbf{T} 는 경계 Γ_1 에서 경계조건 $T = T_{\text{known}}(\Gamma, t)$ 를 만족해야 하는 제약조건을 갖는다.

위에서 행렬 \mathbf{A} , \mathbf{B} 는 아래와 같이 정의된다.

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{C}_t}{\Delta t} + \theta \mathbf{K}_t \quad (17)$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{C}_t}{\Delta t} - (1-\theta) \mathbf{K}_t \quad (18)$$

2.2 Inverse 문제의 유한요소 정식화

2.2.1 민감도행렬

Inverse 문제의 해석에서 민감도(sensitivity)를 나타내는 지표를 정의하고 이의 값을 구하는 것은 매우 중요하다. IHCP에서는 일반적으로 표면에서의 열부하의 단위변화에 대한 내부의 온도 변화량을 민감도로 정의하며 이를 실제로 구하는데는 여러가지 방법이 사용될 수 있다. 여기에서는 참고 문헌 (4)를 참고하여 다음과 같이 민감도 행렬을 구한다.

먼저 Direct 문제의 정식화에서 최종적으로 얻어진 식

$$A \cdot T_{t+\Delta t} = B \cdot T_t + (1-\theta) Q_t + \theta Q_{t+\Delta t} \quad (19)$$

에서 양변을 시간 $t + \Delta t$ 에서의 열부하 $Q_{unknown}(t + \Delta t)$ 로 미분한다. 이때 시간 t 에서의 물리량이 시간 $t + \Delta t$ 에서의 물리량의 변화에 무관하다는 물리적 고찰을 적용하면, 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$A \cdot \frac{\partial T_{t+\Delta t}}{\partial q_{t+\Delta t}} = \theta \frac{\partial Q_{t+\Delta t}}{\partial q_{t+\Delta t}} \quad (20)$$

이 때 우변에서

$$\frac{\partial Q_{t+\Delta t}}{\partial q_{t+\Delta t}} = [d_{kj}] \quad (21)$$

로 표현할 수 있는데, 행렬 $[d_{kj}]$ 의 k 행 j 열 성분 d_{kj} 는 다음과 같이 정의된다.

$$d_{kj} = \frac{\partial Q_k}{\partial q_j} = \frac{\partial \int_{\Gamma_3} N_k q d\Gamma}{\partial q_j} = \begin{cases} \int_{\Gamma_3} N_k d\Gamma : q_j \text{가 } k \text{번} \\ \text{계 절점과 인접한} \\ \text{경계면의 열부하인} \\ \text{경우} \\ 0 : \text{그 밖의} \\ \text{경우} \end{cases} \quad (22)$$

이렇게 하여 행렬 $[d_{kj}]$ 가 구해지면 민감도 행렬 $\frac{\partial T_{t+\Delta t}}{\partial q_{t+\Delta t}}$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$\frac{\partial T_{t+\Delta t}}{\partial q_{t+\Delta t}} = A^{-1} \cdot \theta [d_{kj}] \quad (23)$$

2.2.2 최소자승기준

모든 절점(node)에서의 온도 중에서 측정점에 대응하는 절점에서의 온도만을 선택하기 위해 다음

과 같은 관계를 만족하는 행렬 S 를 정의한다.

$$Y(t) = S \cdot T(t) \quad (24)$$

위에서 $Y(t)$ 는 시간 t 에서 정의된 측정점에서의 온도를 나타내며 $T(t)$ 는 시간 t 에서 정의된 모든 절점에서의 온도를 나타낸다. 만약 i 번째 측정점이 절점번호 j 에 해당된다면 행렬 S 의 i 행에서 j 번째 열의 원소만 1이 되고 나머지 원소는 모두 0이 된다. 이 규칙을 모든 측정점에 적용함으로써 행렬 S 를 구성할 수 있다.

측정점 위치에서 실험을 통해 실제로 측정된 온도를 Y_m 이라 하면, 이론적으로 추정된 온도와 실제 측정 온도와의 차이를 나타내는 지표로 다음과 같은 오차 제곱의 합 형태를 택할 수 있다.

$$E(q) = [Y(t) - Y_m(t)]^T \cdot W_s \cdot [Y(t) - Y_m(t)] \quad (25)$$

위에서 $Y(t)$ 는 경계조건을 모르는 경계면에 대해 특정된 열부하 q 를 가정했을 때 해석적으로 얻어지는 측정점에서의 온도를 나타내며, W_s 는 각각의 측정치의 상대적 신뢰도에 따라 정할 수 있는 가중치로 구성된 행렬이다. 만약 모든 측정치의 신뢰도가 동일하다고 볼 수 있으면 $W_s = I$ (I : 단위 정방행렬)로 가정할 수 있는데, 여기서는 이와 같은 가정을 취하자. 또 어느 측정점에 대해서만 센서를 여러개 부착하거나 측정횟수를 늘리는 경우는 이에 맞추어 상대적인 가중치를 늘리면 될 것이다.

그런데 식 (25)와 같이 특정 시간 t 에서의 오차만을 대상으로 하는 것보다는 대상으로 하는 시간 영역을 미래로 확장하여 오차를 구성하는 것이 inverse해석에 구조적으로 내재하는 불완정성(instability)을 극복하는데 효율적이다. 이는 물체 내부의 온도변화가 표면조건의 변화에 대해 지연(lag)된다는 물리적 고찰로부터 도입된 것인데, 그리하여, 식 (25)대신에 다음과 같은 미래정보(fufute-information) 최소 자승함수를 도입하게 된다.⁽⁵⁾

$$E(q) = \sum_{i=1}^{FTS} [Y(t+i\Delta t) - Y_m(t+i\Delta t)]^T \cdot W_s \cdot [Y(t+i\Delta t) - Y_m(t+i\Delta t)] \quad (26)$$

위 식에서 FTS는 future time step의 갯수를 나타낸다.

그런데 식 (26)을 사용하여 inverse해석으로부터

얻어지는 해의 시간적 분포측면에서의 안정성은 높일 수 있으나 공간적 분포측면에서의 안정성은 해결되지 않았다. 더구나 앞에서 언급했던 부정(undetermined) 문제가 되는 경우에는 수치 해석상의 문제가 발생한다(해를 구하는 과정에서 역행렬을 취해야 하는 행렬의 역행렬이 존재하지 않는 문제). 이런 문제들을 해결하기 위해 spatial regularizer를 도입한다.⁽²⁾ 그리하여 도입한 spatial regularizer를 식 (26)에 더해해서 이를 새로운 오차함수 $H(\mathbf{q})$ 로 정의하면,

$$H(\mathbf{q}) = E(\mathbf{q}) + J \quad (27)$$

$$J = \alpha_0 \int_r q^2 d\Gamma + \alpha_1 \int_r \left(\frac{\partial q}{\partial \Gamma} \right)^2 d\Gamma \quad (28)$$

위에서 J 로 표시된 것이 spatial regularizer를 나타내는데, 첫째항은 열부하벡터의 제곱을, 둘째항은 열부하벡터의 경계면을 따라서의 변화율의 제곱을 각각 경계를 따라 적분한 값을 나타낸다. 계수 α_0, α_1 은 각 항의 기여율을 조정하기 위한 것이다. J 의 각 항은 열부하 q 를 경계면에서의 열부하 성분들로 근사화함으로써 유한요소로 정식화할 수 있는데 이때 근사화에 사용하는 형상함수로는 온도장을 표현하는데 사용한 것과 동일한 것을 사용할 수 있다. 즉,

$$q = \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{q} \quad (29)$$

의 형태로 표현한다. 실제 열부하벡터 \mathbf{q} 의 각 성분이 절점이 아닌 절점 사이의 경계구역 내에 정의되어 있으므로 적절한 가정을 통해 이웃 절점에 일대일 대응시켜 생각하는 것이, 위 식 (29)와 같은 표현을 이해하기 쉽게 할 것이다. 여기서는 절점과 절점 사이로 정의된 경계구역을 물체 바깥쪽에서 바라볼 때 왼쪽의 절점에 이 구역의 열부하 성분을 대응시켰다. 이런 가정은 본 연구와 같은 2차원 해석에서는 간단하고 타당한 가정이지만 3차원 해석을 할 때는 이에 대체할 만한 새로운 적절한 가정이 필요하게 된다.

이제 식 (29)를 식 (28)에 대입하여 정리하면, J 는 다음과 같이 표현된다.

$$J = \alpha_0 \cdot \mathbf{q}^T \cdot \mathbf{W}_0 \cdot \mathbf{q} + \alpha_1 \cdot \mathbf{q}^T \cdot \mathbf{W}_1 \cdot \mathbf{q} \quad (30)$$

위에서 $\mathbf{W}_0, \mathbf{W}_1$ 는 각각

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_0 &= \int_r \mathbf{N} \cdot \mathbf{N}^T d\Gamma \\ \mathbf{W}_1 &= \int_r \left(\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \Gamma} \right) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \Gamma} \right)^T d\Gamma \end{aligned} \quad (32)$$

최종적으로 오차함수 $H(\mathbf{q})$ 는 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} H[\mathbf{q}(t+\Delta t)] &= \sum_{i=1}^{FTS} [\mathbf{Y}(t+i\Delta t) - \mathbf{Y}_m(t+i\Delta t)]^T \\ &\quad \cdot [\mathbf{Y}(t+i\Delta t) - \mathbf{Y}_m(t+i\Delta t)] \\ &\quad + \alpha_0 \cdot \mathbf{q}(t+\Delta t)^T \cdot \mathbf{W}_0 \cdot \mathbf{q}(t+\Delta t) \\ &\quad + \alpha_1 \cdot \mathbf{q}(t+\Delta t)^T \cdot \mathbf{W}_1 \cdot \mathbf{q}(t+\Delta t) \end{aligned} \quad (33)$$

위 식 (33)으로 표현된 $H(\mathbf{q})$ 를 최소화하는 열부하 \mathbf{q} 가 원하는 inverse해석의 해가 된다. 구해진 \mathbf{q} 로부터 얻어지는 온도분포가 실험에서 측정된 온도 분포와 최소자승기준에서 가장 잘 일치하는 셈이다.

이제 $\min_{\mathbf{q}} H(\mathbf{q})$ 의 해를 구하기 위해 $\frac{\partial H(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} = 0$ 하고, 온도를 Taylor 전개로 열부하 \mathbf{q} 에 대해 선형화한 다음 관계식

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(t+i\Delta t) &= \mathbf{T}(t+i\Delta t)|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}^*} \\ &\quad + \left[\frac{\partial \mathbf{T}(t+i\Delta t)}{\partial \mathbf{q}} \right]_{\mathbf{q}=\mathbf{q}^*} \cdot (\mathbf{q} - \mathbf{q}^*) \end{aligned} \quad (34)$$

를 적용하면, 다음과 같은 \mathbf{q} 에 관한 식을 얻는다.

$$\begin{aligned} &\left(\sum_{i=1}^{FTS} \left(\left\{ \frac{\partial \mathbf{Y}(t+i\Delta t)}{\partial \mathbf{q}} \right\}_{\mathbf{q}=\mathbf{q}}^T \cdot \left\{ \frac{\partial \mathbf{Y}(t+i\Delta t)}{\partial \mathbf{q}} \right\}_{\mathbf{q}=\mathbf{q}} \right) \right) \\ &\quad + \alpha_0 \cdot \mathbf{W}_0 + \alpha_1 \cdot \mathbf{W}_1 \Big] (\mathbf{q} - \mathbf{q}^*) \\ &= \sum_{i=1}^{FTS} \left(\left\{ \frac{\partial \mathbf{Y}(t+i\Delta t)}{\partial \mathbf{q}} \right\}_{\mathbf{q}=\mathbf{q}}^T \cdot \left\{ \mathbf{Y}_m(t+i\Delta t) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \mathbf{Y}_{q=q^*}(t+i\Delta t) \right\} \right) - (\alpha_0 \cdot \mathbf{W}_0 + \alpha_1 \cdot \mathbf{W}_1) \mathbf{q}^* \end{aligned} \quad (35)$$

위의 관계식에서 임의로 \mathbf{q}^* 를 가정하여 대입하면 해 \mathbf{q} 가 얻어진다. 그런데, 이렇게 하여 얻어지는 해 \mathbf{q} 는 $E(\mathbf{q})$ 를 최소화하는 해 \mathbf{q} 와는 차이가 있다. $E(\mathbf{q})$ 는 spatial regularizer를 포함하지 않으므로 $E(\mathbf{q})$ 를 최소화하는 해 \mathbf{q} 가 정해에 좀더 가까울 것이다. Spatial regularizer에 의한 오차를 줄이기 위해 식 (35)를 다음과 같이 변형한다.

$$\begin{aligned} &\left(\sum_{i=1}^{FTS} \left(\left\{ \frac{\partial \mathbf{Y}(t+i\Delta t)}{\partial \mathbf{q}} \right\}_{\mathbf{q}=\mathbf{q}}^T \cdot \left\{ \frac{\partial \mathbf{Y}(t+i\Delta t)}{\partial \mathbf{q}} \right\}_{\mathbf{q}=\mathbf{q}^n} \right) \right) \\ &\quad + \alpha_0 \cdot \mathbf{W}_0 + \alpha_1 \cdot \mathbf{W}_1 \Big] \Delta \mathbf{q} \\ &= \sum_{i=1}^{FTS} \left(\left\{ \frac{\partial \mathbf{Y}(t+i\Delta t)}{\partial \mathbf{q}} \right\}_{\mathbf{q}=\mathbf{q}^n}^T \cdot \left\{ \mathbf{Y}_m(t+i\Delta t) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \mathbf{Y}_{q=q^n}(t+i\Delta t) \right\} \right) \end{aligned} \quad (36)$$

$$\mathbf{q}^{n+1} = \mathbf{q}^n + \Delta \mathbf{q} \quad (n : \text{반복계산 횟수를 나타냄}) \quad (37)$$

위 식 (36), (37)로부터 해를 구하는 절차는 다음과 같다. 먼저 초기의 열부하를 $\mathbf{q}^0 = \mathbf{0}$ 으로 가정한다. 이로부터 첫번째 반복계산한 새로운 해 \mathbf{q}^1 을 구한다. 여기까지는 식 (35)를 사용해도 마찬가지이다. 그 다음부터 식 (36), (37)을 사용하여 반복계산을 하면 매 단계에서 새롭게 얻어지는 해는 식 (36)의 우변에서 점차적으로 $\mathbf{Y}_{q=q^n}(t+i\Delta t)$ 이 $\mathbf{Y}_m(t+i\Delta t)$ 에 수렴하도록 한다. 이로부터 식 (35)를 사용하여 단 한번의 계산 후 얻는 해보다 개선된 해를 얻을 수 있다. 그러나 미래시간을 포함하여 발생하는 오차는 극복하지 못한 상태이다.

위 식 (36), (37)로부터 매 시간단계에서 열부하 \mathbf{q} 를 구해나가면 되는데, 수렴조건은 다음과 같이 가정하였다.

$$\text{error}^n = \|\mathbf{Y}_{q^n} - \mathbf{Y}_m\| \quad (38)$$

$$\frac{|\text{error}^n - \text{error}^{n+1}|}{\text{error}^n} \leq \varepsilon \quad (39)$$

즉, 얻어진 \mathbf{q} 에 대해 측정점에서 예측되는 온도와 실제 측정된 온도 사이의 차이의 제곱의 합에 근호를 취한 값이 반복계산을 계속해도 더 이상 감소하지 않을 때 반복계산을 중지하였다. ε 의 값은 0.05를 택했다.

이렇게 해서 경계면의 열부하가 정해지면 그때의 물체 내부와 경계면의 온도분포는 direct 열전도 방정식으로부터 구해지며, 최종적으로 구해야 할 열전달계수는 다음과 같은 뉴턴의 냉각법칙 (Newton's cooling law)을 적용하여 얻는다.

$$h_k = \frac{q_k}{(T_{\infty, k} - T_{s, k})} \quad (40)$$

위에서 k 는 각 경계구역을 표시하며, ∞ 는 경계구역과 인접한 물체 주위를, s 는 경계구역에 해당 하는 표면을 각각 나타낸다.

3. 정식의 타당성 검증

3.1 검증의 기준

Inverse 해석용 정식을 검증하려면 경계면의 열전달계수를 미리 아는 상태에서 inverse 해석으로 경계면의 열전달계수를 얻어 이를 미리 아는 값과 비교하여 그 차이를 보면 된다. 이를 위해 실험적으로 물체의 외부에 특정한 크기의 열부하를 적절

한 방법으로 가하고 내부 온도를 센서로 직접 측정하여 inverse 해석을 수행할 수도 있겠으나 정식의 검증이란 관점에서는 이는 효율적이지 않다. 왜냐하면 실험적으로 외부를 가열하는 경우 가열 장치 자체가 일정한 크기의 열부하를 발생하도록 제작되어 있어도 실제의 열부하와는 차이가 있을 수 밖에 없고, 또 내부의 온도를 측정할 때도 센서로 인한 오차가 포함되어 결국 정식 자체의 성능을 파악할 수 없기 때문이다. 이런 이유로 본 연구에서는 수치해석적인 검증을 하였다. 즉, 미리 열전달계수 분포를 가정하고 이를 정해(exact solution)로 보았으며, inverse 해석에 사용할 온도 측정값도 알려진 열전달계수로부터 수치해석적으로 얻어지는 값을 사용하였다. 그 외 정식의 검증에 사용한 중요 사항들은 다음과 같다.

(1) 미리 가정한 열전달계수 분포로부터 물체 내부의 온도분포를 얻기위해 유한요소법을 사용한 열전달 해석을 수행하였다.

(2) 정식의 검증은 측정오차를 무시한 이상화된 온도 측정값과 측정오차를 적절히 모델링하여 포함한 온도 측정값 두 가지를 대상으로 하였다. 이상화된 온도 측정값에 대한 결과는 정식의 성능의 최대 한계를 보여주며, 측정오차를 적절히 모델링한 온도 측정값에 대한 결과는 실제 문제에서의 적용 가능성을 보여준다.

(3) 측정오차를 유발하는 원인으로는 여러 가지가 있으므로 그 모든 효과를 모델링하기는 어렵다. 여기에서는 일단 열전대 자체에 기인하는 오차만을 모델링하기로 한다. 일반적으로 사용되는 열전대가 측정값에 대략 $\pm 1.0^\circ\text{C}$ 정도의 편차를 포함하는 것으로 알려져 있으므로 (JIS C 1602-1982 참조) 프로그래밍 언어 C의 표준 라이브러리의 rand() 함수를 사용하여 ± 1.0 범위의 수를 임의로 발생시켜 이를 참값(정확한 온도값)에 더해주고, 이를 센서를 통해 측정된 온도라고 가정하였다. 실제의 경우 여러 요인들이 복합적으로 작용하므로 실험시의 온도 측정값과 여기에서 모델링된 온도 측정값은 그 분포면에서 다른 양상을 보이겠지만(예를 들면 측정값이 평균적으로 치우쳐 있는 양상은 특별히 고려 안 됨) 본 검증에서는 위와 같이 오차를 모델링하고 결과를 고찰하는 것으로 국한한다.

(4) 결과의 특성을 변화시킬 수 있는 입력변수로서 future time step의 수, spatial regularizer 상수 α_0, α_1 의 3가지가 정식 내에 포함되어 있다. 이들

Table 1 Thermophysical properties of iron pure

Melting point (K)	Properties at 300 K				Properties at various temperature (K)							
	ρ (kg/m ³)	c_p (J/kg·K)	k (W/m·K)	$\alpha \cdot 10^6$ (m ² /s)	k (W/m·K) / c_p (J/kg·K)							
					100	200	400	600	800	1000	1200	1500
1810	7870	447	80.2	23.1	134	94.0	69.5	54.7	43.3	32.8	28.3	32.1
					216	384	490	574	680	975	609	654

변수를 변화시켜가며 결과의 특성 변화를 고찰한다.

(5) 측정점의 개수와 위치선택 등은 실험계획과 관련된 것으로 중요하다. 즉, 실제 실험을 하기 전에 최소한 몇개의 센서를 어느 곳에 설치하는 것이 좋은 해석결과를 위해 필요한 지의 기준을 정하기 위해서 여러 가지 측정점 배치에 대한 해석결과를 비교해 보는 것이 필요하다.

(6) 개발된 정식은 재료의 열물성치가 온도에 따라 변하는 것을 허용한다. 아래의 모든 해석에서는 Table 1에 나타낸 것과 같은 열물성치를 갖는 Pure Iron을 대상으로 한다.⁽⁶⁾ Table 1에 표시된 기준 온도들 이외의 온도에서는 온도 차이에 비례하는 선형보간법을 사용하여 열물성치를 근사화하여 사용한다.

(7) 해석에 사용한 시간 증분량은 0.05초이다.

3.2 측정오차를 포함하지 않은 온도데이터를 적용했을 때

측정오차를 무시한 온도데이터에 대한 해석은 무의미해 보일 수 있으나 좋은 측정이 이루어질수록 측정오차는 줄어들고 실험시에는 궁극적으로 오차 없는 측정을 지향하게 되므로 오차없는 데이터에 대한 해석결과와 개발된 정식의 성능의 최대 한계를 보여준다. 해석에 사용된 2차원 평면 모델의 크기와 요소망(mesh)은 Fig. 1과 같고, Fig. 2는 측정점 배치를 나타낸다. Fig. 2에서 boundary coordinate라 함은 사각형 모델의 왼쪽 아래 꼭지점부터 경계면을 따라 반시계방향으로 돌면서 절점과 절점 사이 각각의 부분을 독립적인 구역으로 보아 일련의 번호를 부여한 것을 말한다.

3.2.1 적용 예

지금 Fig. 1과 같은 형상의 물체가 초기온도 27°C (300°K)인 상태에서 주위온도 1027°C (1300°

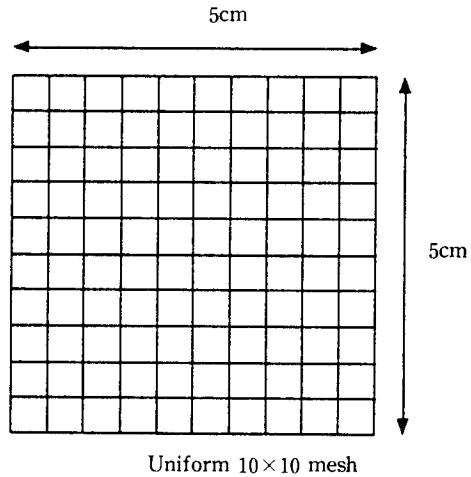


Fig. 1 Dimension and mesh of two dimensional plane model

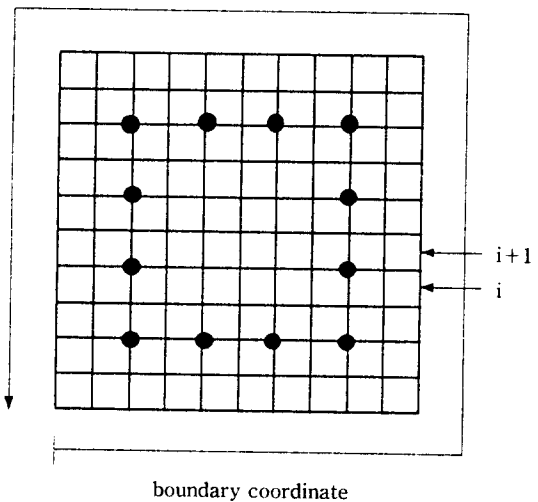


Fig. 2 Measurement location

K)로 유지되는 장치(예를 들어 노(funace))안에 갑자기 놓여진다고 가정하자. (이하 모든 적용에서 동일한 상황을 가정할 것임) 이때 물체와 주위 사

이에 열교환이 발생할 것이며 이를 나타내는 물체 경계면의 열전달계수 분포를 가상적으로 가정해 보자. 실제 열전달계수는 물체와 주위와의 열전달 특성에 영향을 미치는 수많은 요인들의 함수지만 여기에서는 결과적인 열전달계수 분포를 시간과 경계에 대한 분포로 분리하여 적절히 가정한다. 시간에

대한 분포양상을 $h(t)$, 경계를 따라서의 분포양상을 $h(\Gamma)$ 로 표시하여 특정시간 t , 위치 Γ 에서의 열전달계수 값이 $h(t, \Gamma) = h(t) \times h(\Gamma)$ 로 구해진다고 하자. 이러한 가정은 2차원 열전달 문제를 해석적으로 풀때 적용하는 변수분리법과 유사해 보이는데, 여기서는 단지 이런 형태의 열전달계수 분포

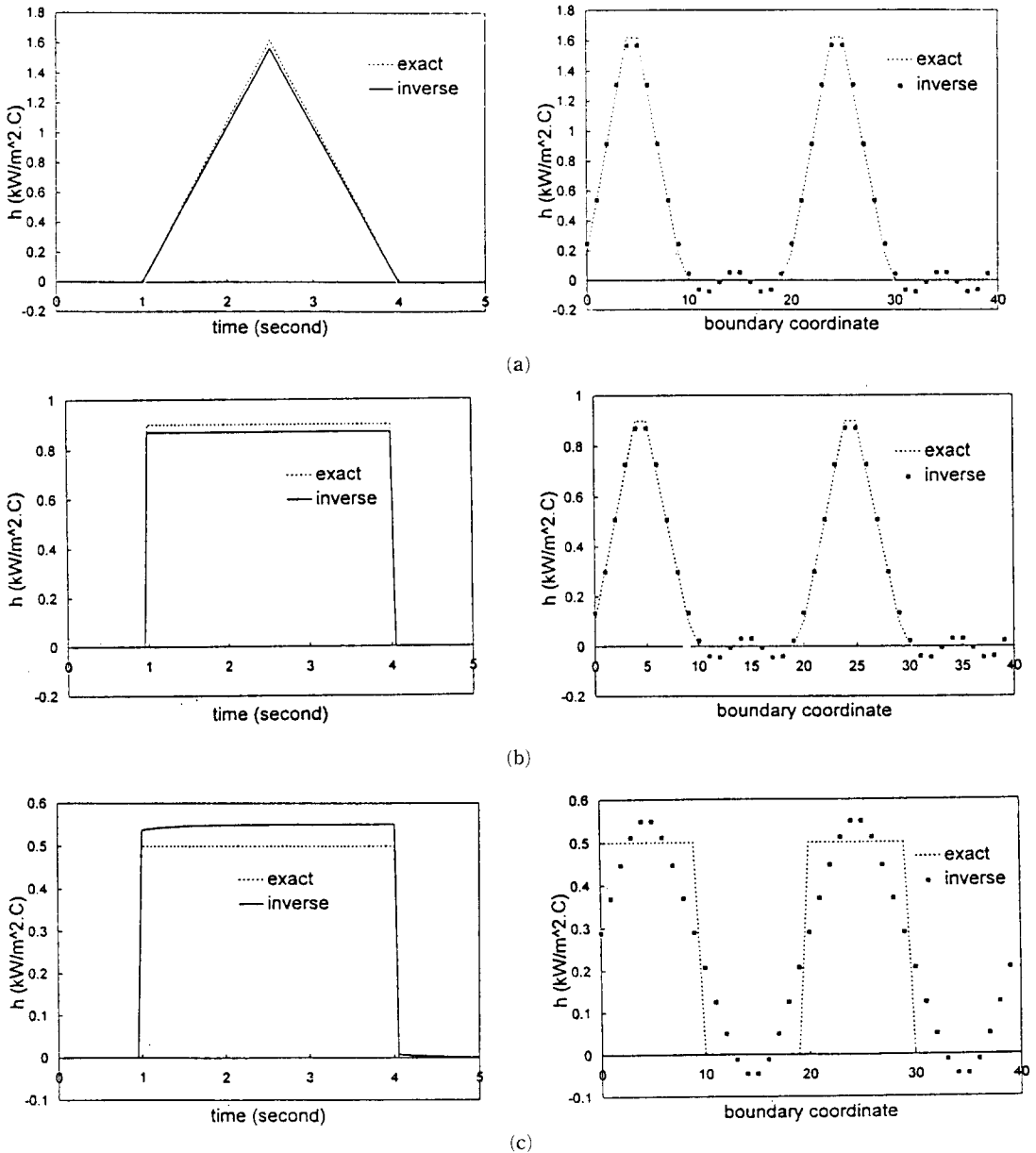


Fig. 3 Examples of inverse analysis output. (Measurement error was neglected. Number of future time step=1 and spatial regularizer coefficient $a_0 = a_1 = 1$ were used)

가 물체 경계면에 적용됨을 나타내는 것 뿐이다. 이렇게 인위적으로 가정한 열전달계수 $h(t, \Gamma)$ 를 경계조건으로 사용하여 내부의 온도를 얻고, 이 온도를 이용하여 inverse 해석을 수행하였다. Fig. 3에는 3가지 다른 형태로 가정한 열전달계수 분포와 그 각각에 대해 inverse 해석으로 얻은 열전달계수

분포를 비교하여 (a), (b), (c)에 나타내었다. 세 경우 모두 future time step의 수는 1, 즉 future time은 포함하지 않으며, spatial regularizer의 α_0 와 α_1 에는 1을 사용하였다. 모든 위치와 시간에서의 결과를 보일 수 없으므로 시간에 대한 결과는 boundary coordinate=5에서의 결과이며, 경계를

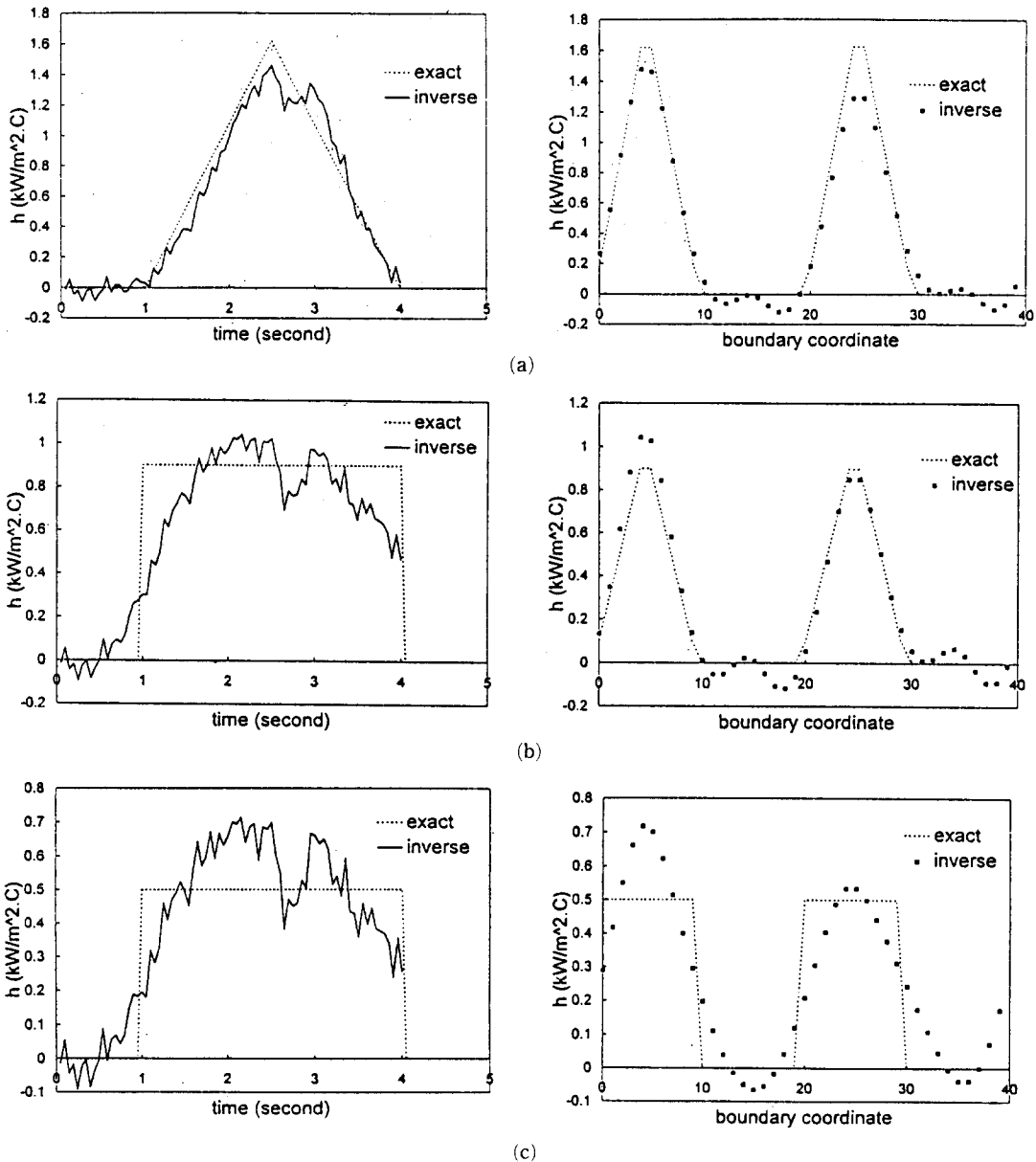


Fig. 4 Examples of inverse analysis output. (Measurement error was considered. Number of future time step=14 and spatial regularizer coefficient $\alpha_0 = \alpha_1 = 5 \times 10^6$ were used)

따라서서의 결과는 2.5초에서의 결과이다.

결과를 보면 (a), (b)의 경우 원래의 값을 매우 정확히 유추해 낼 수 있다. 다만 boundary coordinate=10~20, 30~40에서 약간의 오동을 나타냄을 볼 수 있는데, 이는 실제로는 삼각형 모양이 끝나는 부분이 부드럽지 않은데 비해 inverse 해석으로부터 구해지는 해는 spatial regularizer의 영향으로(특히 2번째 항 때문에) 부드러운 모양을 가지려 하기 때문이다. (c)의 경우는 급격한 변화를 갖는 boundary coordinate=0, 10, 20, 30부근에서 그 급격한 변화를 따라가지 못한다. 이 또한 급격한 변화모양을 억제하는 spatial regularizer의 영향 때문이다. 전반적으로 보아 시간에 대한 분포는 거의 정확히 찾아내고 있는데 이는 시간에 대해서는 구해야 할 파라미터 수와 주어진 데이터 수가 같기 때문이다. 전반적으로 보아 오차를 포함하지 않은 데이터에 대해 원래의 분포를 잘 찾아냄을 볼 수 있다.

3.3 인위적인 측정오차를 포함한 온도데이터를 적용했을 때

개발된 정식이 측정오차에도 불구하고 정해(exact solution)에 얼마나 접근할 수 있는지에 대해 검증하기 위해 인위적으로 만들어진 측정데이터에 대한 해석을 수행한다. 데이터를 얻는 과정은 앞서도 말했듯이 가정한 열전달계수 분포에 대해 유한요소법을 사용한 열전달 해석을 수행하여 측정점에서의 온도데이터를 얻은 후 C언어의 rand() 함수로 발생된 무작위오차가 이 온도값들에 더해준다. 무작위오차는 ± 1.0 의 크기 범위에서 발생시켰는데, 열전달 해석결과 측정점의 온도가, 위치에 따라 차이가 있지만, 최종적으로 대략 $30\sim 40^\circ\text{C}$ 정도 초기 온도로부터 상승하므로 $\pm 1.0^\circ\text{C}$ 의 오차는 상대적으로 보아 최소 2~4% 정도 오차에 해당한다고 볼 수 있다. 온도상승 도중에는 상승한 온도에 대한 $\pm 1.0^\circ\text{C}$ 의 오차의 비중이 더 크므로 오차의 상대적 비중은 2~4% 이상으로 볼 수 있다.

3.3.1 적용 예

Fig. 3에 나타낸 (a), (b), (c) 세가지 경우에 대해 이번에는 오차를 포함한 온도 데이터를 가지고 inverse 해석을 수행하였다. 그 결과는 Fig. 4와 같다. 이번에는 세가지 경우에 모두 future time step의 수는 14, spatial regularizer의 α_0 와 α_1 에는

5×10^6 을 사용하였다. Fig. 3과 비교하면, 경계를 따라서의 분포는 큰 차이가 없으나 시간에 대한 분포에서 Fig. 4의 결과는 무작위오차로 인한 영향을 잘 보여준다. 경계에 대한 분포가 큰 차이가 없는 것은 오차없는 데이터의 경우에도 오차를 포함한 경우와 마찬가지로 센서의 수가 경계구역의 수보다 적기 때문에 생기는 부정(不定)문제를 피하기 위해 spatial regularizer를 사용하기 때문이다. Fig. 4의 시간에 대한 결과에서 시간에 대한 급격한 변화를 따라가지 못하는데 이는 임의의 오차로 인한 결과의 불안정성을 줄이기 위해 future time step의 수를 1이상 사용하면서 몇개의 시간에 대한 결과가 평균화되는 효과가 발생했기 때문이다. 일반적으로 오차를 포함한 데이터를 적용하는 경우 future time step의 수, spatial regularizer 상수 α_0, α_1 의 값을 오차를 포함하지 않은 데이터를 적용하는 경우보다 훨씬 크게 적용해야 하는데, 그것은 future time step의 수, spatial regularizer 상수 α_0, α_1 의 값이 작으면 온도데이터에 포함된 임의의 오차로 인해 inverse해석 결과가 불안정해지기 때문이다.

3.3.2 Future time step의 수, Spatial regularizer의 영향

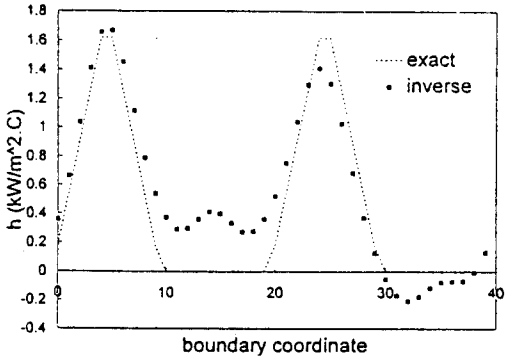
Future time step의 수와 spatial regularizer가 inverse해석 결과에 미치는 영향을 고찰하기 위해 Fig. 3의 (a)의 경우에 대해 future time step의 수와 spatial regularizer의 α_0, α_1 의 값을 변화시켜 보았다. 그 결과는 Fig. 5와 같다. 여기에서 (a)는 future time step의 수는 7, spatial regularizer의 α_0, α_1 에는 10^6 을 사용했을 때, (b)는 future time step의 수는 14, spatial regularizer의 α_0, α_1 에는 10^6 을 사용했을 때, (c)는 future time step의 수는 14, spatial regularizer의 α_0, α_1 에는 10^5 을 사용했을 때이다. (a)와 (b)를 비교하면, 동일한 α_0, α_1 값에 대해 future time step의 수가 더 큰 (b)의 결과가 훨씬 안정되어 있다. (b)의 경우에 시간을 따라서 해석결과의 분포를 평균화시켜 부드럽게 하는 작용이 더 강하기 때문이다. (b)와 (c)를 비교하면, 동일한 future time step의 수에 대해 α_0, α_1 값이 더 큰 (b)의 결과가 좀 더 안정되어 있다. (b)의 경우에 경계를 따라서 해석결과의 분포를 부드럽게 만드는 작용이 더 강하기 때문이다. (a), (b), (c)의 고찰로부터 시간에 대한 해석결과의 안정성을 위해 사용하는 future time이 경계에 대한 결과의

안정성에도 기여하고 마찬가지로 경계에 대한 해석 결과의 안정성을 위해 사용하는 spatial regularizer가 시간에 대한 결과의 안정성에도 기여하는 것을 알 수 있다. 그런데 결과의 안정성을 위해 무조건 future time step의 수와 spatial regularizer의 α_0, α_1 에 큰 값을 사용하는 것은 좋지 않다. 너무 큰 값을 사용하면 결과가 지나치게 안정화되어

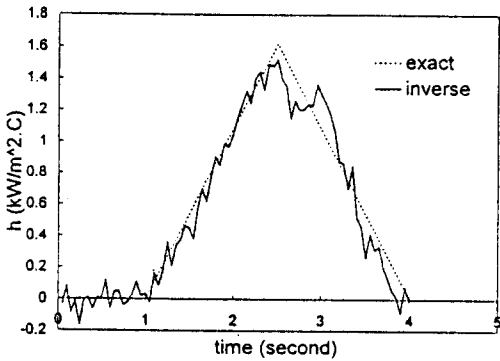
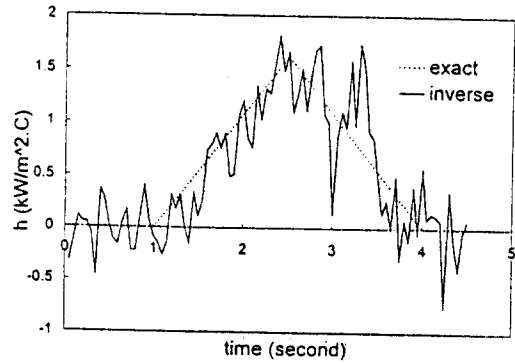
실제의 세세한 변화를 쫓아가지 못할 수 있기 때문이다.

3.4 측정점 배치를 변화시켰을 때의 결과 변화

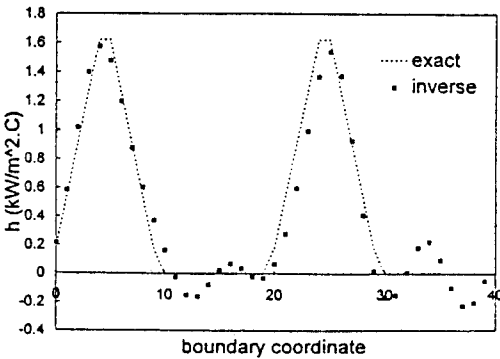
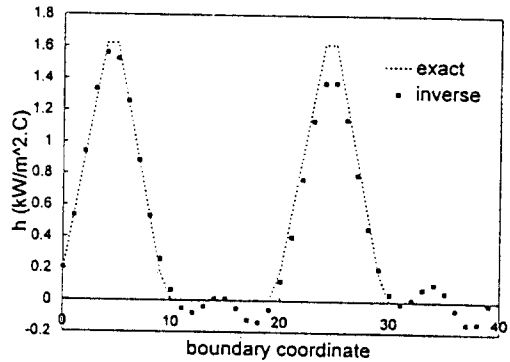
똑같은 상황에 있는 똑같은 물체에 대해서도 측정점의 배치가 달라지면 inverse 해석으로 얻는 결과가 달라질 수 있다. 측정점의 배치는 inverse 해



(a) Number of future time step=7, $\alpha_0 = \alpha_1 = 10^6$



(b) Number of future time step=14, $\alpha_0 = \alpha_1 = 10^6$



(c) Number of future time step=14, $\alpha_0 = \alpha_1 = 10^5$

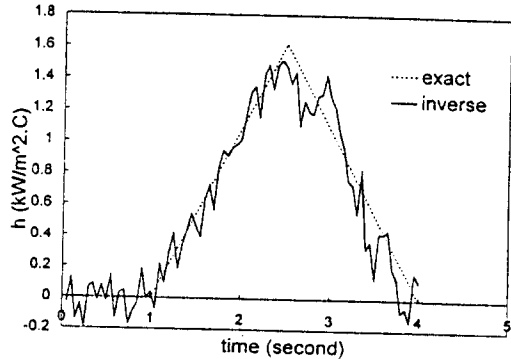


Fig. 5 Variation of inverse analysis output according to variation of number of future time step and spatial regularizer coefficient

석 과정에서 핵심적인 역할을 하는 민감도(sensitivity) 행렬의 구성을 결정하며 이 민감도 행렬의 특성이 수치해석 과정에 반영되어 결과의 정확도나 안정성 등을 결정하기 때문이다. 이러한 측정점의

배치를 변화시켰을 때 결과가 어떻게 변하는지를 간단히 고찰하기 위해 Fig. 6에 나타난 두가지의 측정점 배치에 대해 대조 실험을 한다. 측정점 배치를 제외한 다른 모든 조건은 Fig. 4의 (b)의 경

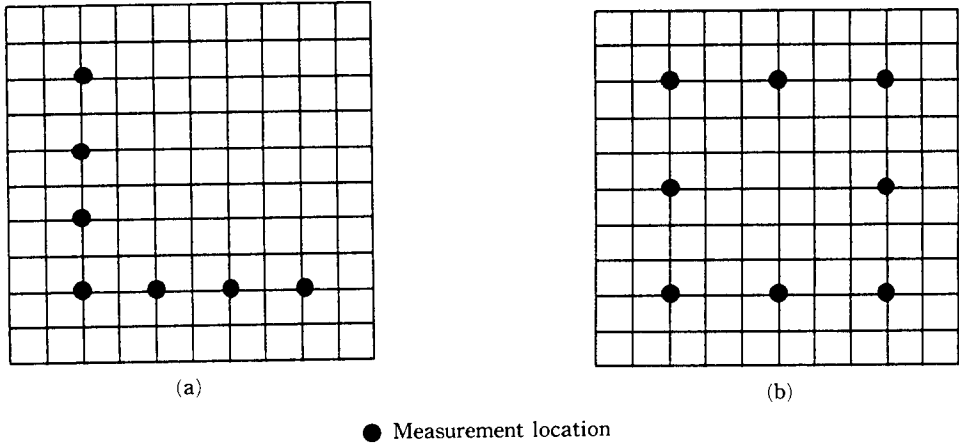
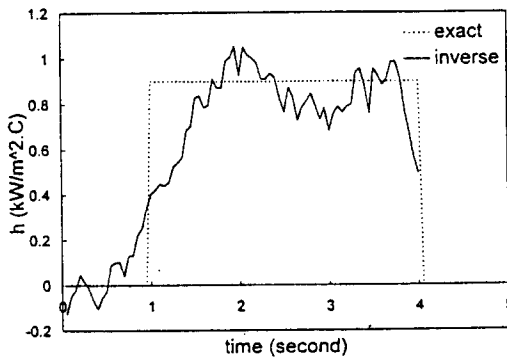
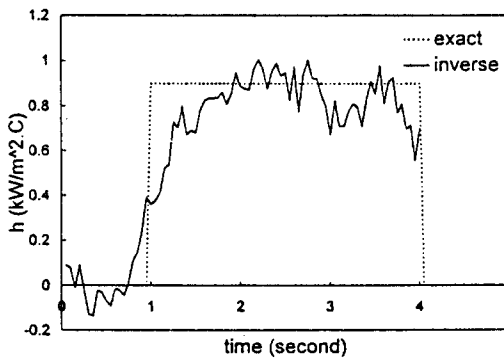
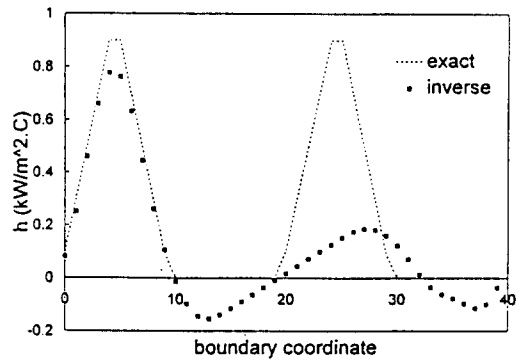


Fig. 6 Two different measurement locations



(a) Inverse analysis output for measurement location Fig. 6(a)



(b) Inverse analysis output for measurement location Fig. 6(b)

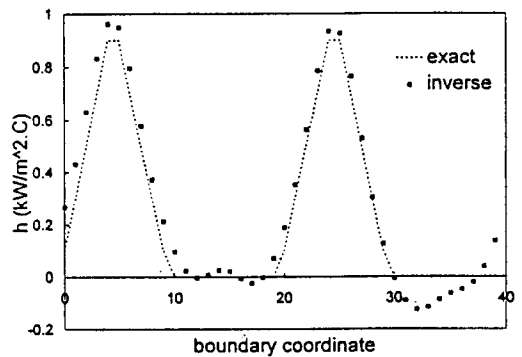


Fig. 7 Inverse analysis output for each measurement location

우와 동일하다. Fig. 6의 (a)에서는 측정점들이 왼쪽과 아래쪽에만 치우쳐서 분포되어 있는 반면 (b)에서는 사방에 골고루 퍼져 있다. 측정점 개수는 (a)의 경우 7개, (b)의 경우 8개이다. 한편 앞의 모든 경우에는 Fig. 6의 측정점 배치에 대한 inverse 해석 결과는 Fig. 7과 같다.

Fig. 6(a)의 측정점 배치를 택했을 때의 inverse 해석 결과인 Fig. 7(a)를 보면, 측정점들에 인접해 있는 경계면을 나타내는 boundary coordinate = 0~10, 30~40 부근에서는 원래의 정해와 거의 일치하는데 비해 측정점들과 멀리 떨어진 경계면을 나타내는 boundary coordinate = 10~30 부근에서는 정해와 큰 차이를 보이고 있다. 측정점과 멀리 떨어진 경계면에 대해서 충분한 정보가 감지될 수 없으므로 이런 결과가 얻어지는 것이다. Fig. 6(b)의 측정점 배치는 Fig. 6(a)의 경우보다 측정점을 1개만 더 늘리고 경계면 전체에 인접하도록 골고루 배치한 경우인데 이에 대한 해석결과인 Fig. 7(b)를 보면 경계면 전체적으로 정해와 거의 일치하고 있음을 볼 수 있다. Fig. 7(a)의 경우 측정점과 떨어져 있는 경계면 부근에서의 정해와의 오차가 전체적인 해의 정확도를 어느 정도 손상시키고 있으나 Fig. 7(b)의 경우는 전체적으로 정확한 해를 얻게 된다. 위의 결과로부터 알 수 있듯이 측정점을 일부 경계면에만 인접하여 배치하면 측정점과 멀리 떨어진 경계면에 대한 inverse 해의 정확도가 떨어진다. 측정점을 전체 경계면에 인접하도록 골고루 배치하는 것이 바람직하다.

한편, 측정점 배치와 관련해서는 표면으로부터 맨 측정점까지의 깊이도 중요하다. 표면의 변화를 충분히 감지하려면 이론적으로 측정점이 표면으로부터 가까울수록 좋지만 실험시에는 표면으로부터 어느 정도 떨어진 위치에 측정점을 배치해야 한다. 예를 들어 표면온도가 아주 높은 상황에서 표면으로부터 가까운 곳은 온도도 높으므로 그 부위에 설치할 센서가 그 곳의 온도를 견디지 못할 수도 있기 때문이다. 측정점의 깊이 설정에 관한 문제는 실험시의 상황과 관계된 부분이 많으므로 여기서는 더이상 검토하지 않기로 한다.

4. 결 론

본 연구에서는 유한요소법을 사용하여 실제 공정에 적용 가능한 다차원 inverse 열전달 정식화를

수행하였다. 그리고 시뮬레이션으로 얻어진 모의 온도 측정데이터를 적용한 2차원 inverse 해석을 수행하여 다음과 같은 고찰을 할 수 있었다.

(1) Inverse 열전달해석은 물체 내부의 특정 위치에서의 온도 측정데이터로부터 물체 표면의 열전달계수 분포를 시간과 위치의 함수로 구할 수 있는 체계적 방법임을 알 수 있었다.

(2) 본 연구에서 개발된 inverse 열전달 해석용 정식은 다차원, 임의의 형상을 다룰 수 있으며 센서위치와 수에 제한을 두지 않으며, 2차원 문제해석에 효율적으로 적용되었다.

(3) 개발된 inverse 열전달 해석용 정식에는 future time, spatial regularizer의 개념이 도입되어 측정오차의 영향을 적절히 조절할 수 있었다.

개발된 정식을 실제 문제에 적용하여 열전달계수를 결정하기 위해서는 충분히 정확한 온도측정이 선행되어야 한다. Inverse 해석의 본질적 특성상 과도한 측정오차를 갖는 경우 타당성 있는 예측이 어려워질 수 있기 때문이다. 앞으로는 좀 더 안정화된 inverse 해석에 관한 이론적 연구뿐만 아니라 불량한 환경에서도 정확한 온도측정을 할 수 있는 실험 연구가 필요한 것으로 보인다.

참고문헌

- (1) Bass, B. R., 1980, "Application of the Finite Element Method to the Nonlinear Inverse Heat Conduction Problem Using Beck's Second Method," *Journal of Engineering for Industry*, Vol. 102, pp.168~176.
- (2) Hensel, E., 1986, Multi-Dimensional Inverse Heat Conduction," Ph. D. Dissertation, Mechanical Engineering Department, New Mexico State University, Las Cruces, New Mexico.
- (3) Osman, A.M., 1987, "Estimation of Transient Heat Transfer Coefficients in Multi Dimensional Problems by Using Inverse Heat Transfer Methods, Ph.D Dissertation, Department of Mechanical Engineering, Michigan State University, East Lansing, Michigan.
- (4) Hsu, T. R., Sun, N.S., Chen, G.G. and Gong, Z. L., 1992, "Finite Element Formulation for Two-Dimensional Inverse Heat Conduction Analysis," *Journal of Heat Transfer*, Vol. 114, pp.553~557.

- (5) Beck, J.V., Blackwell, B. and Clair. Jr, C.R.St., 1990, *Inverse Heat Conduction*, Wiley Interscience, New York.
- (6) Incropera, F.P. and Dewitt, D.P., 1990, *Introduction to Heat Transfer*, Wiley.