

(논 문)

## 집중질량의 영향을 고려한 회전 외팔보의 진동해석

유 흥 희\*

(1996년 2월 2일 접수)

### Vibration Analysis of Rotating Cantilever Beams Considering Concentrated Mass Effect

Hong Hee Yoo

**Key Words :** Vibration(진동), Rotating Cantilever Beam(회전 외팔보), Concentrated Mass(집중질량), Hub Radius(축반경), Natural Frequency Variation Effect(고유진동수 변화효과), Critical Angular Speed(임계각속도), Dimensionless Variables(무차원 변수)

#### Abstract

The equations of motion for rotating cantilever beams with a concentrated mass located in an arbitrary position are derived. For the modeling of the concentrated mass, the Dirac delta function is used for the mass density function. Parametric studies are performed with five dimensionless variables; natural frequencies, angular velocity, hub radius, concentrated mass, and the mass location. The concentrated mass, wherever it may locate, lowers the natural frequencies of a stationary beam. However, when the beam rotates, the natural frequencies (if they increase or decrease) are dictated by the location of the concentrated mass.

#### 1. 서 론

터빈이나 항공기 회전익 등에서 발견되는 회전하는 외팔보 형상의 구조물의 진동에 관한 연구는 1920년대 초부터 시작되었다. 초기의 연구들에서는<sup>(1~6)</sup> 현재까지도 그 간편성 때문에 널리 쓰이고 있는 Southwell 방정식이라 불리는 고유진동수 예측식이 소개되고 발전 개선되었다. 1970년도 이후에는 컴퓨터를 이용한 수치해석적 방법을 통하여 고유진동수 및 모드형상을 구하는 연구결과들이<sup>(7,8)</sup> 등장하게 되었으며 또한 참고문헌<sup>(9)</sup>와 같이 진동방정식을 해석적으로 직접 풀이하여서 엄밀해를 구하는

방법도 등장하게 되었다. 근래에는 또한 여러가지 형태의 보에 관한 논문들도 많이 등장하고 있다. 참고문헌<sup>(7~9)</sup>에서는 외팔보의 자유단에 집중질량을 가진 경우를 다루었으며 참고문헌<sup>(10)</sup>에서는 테이퍼가 있는 보에 대해 Hub가 탄성적으로 지지되며 경사각이 있는 경우를 다루었고 참고문헌<sup>(11)</sup>에서는 Timoshenko 가정에 근거한 보의 모델에 대해서도 연구를 수행하는 등 다양한 형태의 연구들이 등장하였다.

이러한 종래의 연구들에서는 진동방정식을 유도하는 과정이 상당히 복잡하여 대부분의 논문에서는 최종 유도단계나 최종 운동방정식만을 간략히 기술하는 경우가 대부분이다. 이러한 과정들을 요약하여 기술하면 다음과 같다. 보회전시 발생하는 관성에 의한 원심력과 평형을 이루는 인장스트레인을

\*회원, 한양대학교 기계설계학과

일정상태 운동을 가정하고 먼저 구한후, 이를 보의 비선형 변위율에 근거한 탄성에너지에 대입하거나 굽힘방향 운동방정식에 그 결과를 직접 대입하여 선형 진동방정식을 구한다. 이러한 방법은 그 유도 과정이 편법성을 지닌다는 점과 그 결과로 수식의 전개가 매우 복잡하다는 단점을 갖는다. 또한 이 방법은 인장과 굽힘간의 연성효과(coupling effect)도 고려할 수 없는 모델링상의 한계점을 갖는다. 종래방법의 이러한 단점을 극복하기 위해서 참고문헌<sup>(12,13)</sup>에서는 참고문헌<sup>(14,15)</sup>에 소개된 동적 모델링 방법에 근거하여 회전 외팔보의 면내 및 면외 굽힘 진동해석을 수행하였다. 이 방법은 운동방정식을 처음부터 선형으로 유도하므로, 기존의 유도과정이 갖는 단점을 가지지 않으며 수치해석시 정확성도 유지되는 것이 규명되었다.

본 논문에서는 참고문헌<sup>(14-17)</sup>에 제시된 운동방정식 유도방법이 사용되었다. 본 논문은 집중질량을 갖는 보를 연구대상으로 하였고 근사화를 위해 가상모드법을 이용하였다. 따라서 이와 유사한 연구 결과를 수록한 기존 문헌들이 있으나 이들과 비교할 때, 본 논문은 다음과 같은 고유성을 갖는다. 첫째, 집중질량이 외팔보의 자유단만이 아닌 임의의 위치에 존재하는 경우에 대한 모델링을 제시하였다. 둘째, 3차원 모델링으로 면내 및 면외 굽힘 진동해석을 동시에 다루었다. 셋째, 임의 위치의 집중질량으로 인한 임계각속도(고유진동수와 같아지는 회전주파수)의 존재와 변화를 예측할 수 있는 방법이 제시되었다. 넷째, 회전시 집중질량의 존재에 따른 모드형상의 변화를 결과로 제시하였다.

## 2. 운동방정식

Fig. 1은 반경  $r$ 의 강체 축  $A$ 에 고정되어 일정 각속도  $\Omega$ 로 회전운동을 하는 외팔보를 보여준다. 가상모드법을 사용하여 그림에 나타난 변형변수  $s$ ,  $u_2$ ,  $u_3$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$s(x, t) = \sum_{j=1}^n \phi_{1j}(x) q_j(t) \quad (1)$$

$$u_2(x, t) = \sum_{j=1}^n \phi_{2j}(x) q_j(t) \quad (2)$$

$$u_3(x, t) = \sum_{j=1}^n \phi_{3j}(x) q_j(t) \quad (3)$$

여기서,  $\phi_{1j}$ ,  $\phi_{2j}$ ,  $\phi_{3j}$ 는  $s$ ,  $u_2$ ,  $u_3$ 를 나타내기

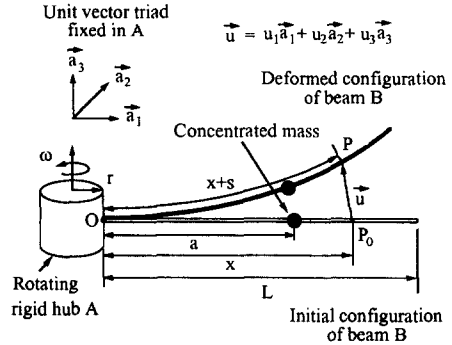


Fig. 1 Cantilever beam with a concentrated mass attached to a rotating rigid hub

위한 가상모드들이며  $q_j$ 는 일반좌표를 나타내고  $\mu$ 는 그 개수이다. 이 변형변수들의 근사화에 기초하고 참고문헌<sup>(16,17)</sup>에 제시된 운동방정식의 유도과정을 이용하면 이 시스템의 운동방정식은 다음과 같은 선형의 형태로 유도될 수 있다.

$$\sum_{j=1}^n [M_{ij}^{11} \ddot{q}_j - 2\omega M_{ij}^{12} \dot{q}_j + (K_{ij}^s - \omega^2 M_{ij}^{11}) q_j] = P_i \quad (4)$$

$$\sum_{j=1}^n [M_{ij}^{22} \ddot{q}_j - 2\omega M_{ij}^{21} \dot{q}_j + (K_{ij}^{b2} + K_{ij}^{g2} - \omega^2 M_{ij}^{22}) q_j] = 0 \quad (5)$$

$$\sum_{j=1}^n [M_{ij}^{33} \ddot{q}_j + (K_{ij}^{b3} + K_{ij}^{g3}) \dot{q}_j] = 0 \quad (6)$$

식 (4)는 보의 인장방향, 식 (5)는 면내굽힘방향, 식 (6)은 면외굽힘방향 운동방정식을 각각 나타내며, 여기서

$$M_{ij}^{ab} = \int_0^L \rho \phi_{ai} \phi_{bj} dx \quad (7)$$

$$M_{ij}^s = \int_0^L EA \phi_{1i} \phi_{1j} dx \quad (8)$$

$$K_{ij}^{b2} = \int_0^L EI_3 \phi_{2i} \phi_{2j} dx \quad (9)$$

$$K_{ij}^{b3} = \int_0^L EI_2 \phi_{3i} \phi_{3j} dx \quad (10)$$

$$K_{ij}^{g2} = r\Omega^2 \int_0^L \rho (L-x) \phi_{2i} \phi_{2j} dx \quad (11)$$

$$+ \Omega^2 \int_0^L \frac{\rho}{2} (L^2 - x^2) \phi_{2i} \phi_{2j} dx$$

$$K_{ij}^{g3} = r\Omega^2 \int_0^L \rho (L-x) \phi_{3i} \phi_{3j} dx \quad (12)$$

$$+ \Omega^2 \int_0^L \frac{\rho}{2} (L^2 - x^2) \phi_{3i} \phi_{3j} dx$$

$$P_j = \Omega^2 \int_0^L \rho x \phi_{1i} dx + r\Omega^2 \int_0^L \rho \phi_{1i} dx \quad (13)$$

위에서  $K_{ij}^{g^0}$ 는 구조인장강성,  $K_{ij}^{g^2}$ 와  $K_{ij}^{g^3}$ 는 구조 굽힘강성, 그리고  $K_{ij}^{g^2}$ 와  $K_{ij}^{g^3}$ 는 회전운동에 의해 발생하는 강성행렬을 각각 나타낸다. 또한 식에서  $\rho$ 는 보의 단위길이당 질량,  $L$ 은 길이,  $E$ 는 영의 계수  $A$ 는 보의 단면적,  $I_2$ 와  $I_3$ 는  $\vec{a}_2$ 와  $\vec{a}_3$ 방향 2차 면적모멘트를 각각 나타낸다.

보의 임의의 지점에 집중질량이 추가로 붙어있는 것을 모델링하기 위해 보의 단위길이당 질량을 나타내는  $\rho$ 를 임의의 지점  $x=a$ 에서 충격함수(Dirac's delta function)로 가정하였다. 진동해석을 위한 질량과 강성행렬중에  $\rho$ 와 관련되는 항들은  $M_{ij}^{g^0}$ ,  $K_{ij}^{g^2}$ ,  $K_{ij}^{g^3}$ 이며, 이들의 집중질량에 의해 변화된 값을 각각  $\widehat{M}_{ij}^{g^0}$ ,  $\widehat{K}_{ij}^{g^2}$ ,  $\widehat{K}_{ij}^{g^3}$ 라 표시하고 구하면 다음과 같다.

$$\widehat{M}_{ij}^{g^0} = M_{ij}^{g^0} + m\phi_{ai}(a)\phi_{bj}(a) \quad (14)$$

$$\widehat{K}_{ij}^{g^2} = K_{ij}^{g^2} + m(a+r)\Omega^2 \int_0^a \phi_{2i,x}\phi_{2j,x} dx \quad (15)$$

$$\widehat{K}_{ij}^{g^3} = K_{ij}^{g^3} + m(a+r)\Omega^2 \int_0^a \phi_{3i,x}\phi_{3j,x} dx \quad (16)$$

여기서,  $m$ 은 임의의 지점에 위치한 집중질량의 크기를 나타낸다. 보의 인장방향 고유진동수와 굽힘방향 고유진동수는 그 차이가 크므로 이들의 연성(coupling)에 의한 효과는 무시될 수 있으므로 본 논문에서는 그 효과를 무시하고 수치해석을 하였다. 그러나 고속회전시는 이러한 효과가 주요 변수로 작용할 수도 있으며, 이러한 효과는 종래의 모델링 방법으로는 고려될 수 없다. 이에 대한 연구 결과는 참고문헌<sup>(18)</sup>을 참조할 수 있다. 연성효과를 무시할 때 식 (5)는 다음과 같이 단순화되어 면내 굽힘진동해석에 사용될 수 있다.

$$\sum_{j=1}^n [\widehat{M}_{ij}^{g^0} \ddot{q}_j + (K_{ij}^{g^2} + \widehat{K}_{ij}^{g^2} - \Omega^2 \widehat{M}_{ij}^{g^2}) q_j] = 0 \quad (17)$$

면내방향과는 달리 면외방향 운동방정식인 식 (6)은 인장방향과 연성효과가 없으므로 가정이 필요없이 면외방향 굽힘진동해석을 위해 사용될 수 있다.

식 (17)로부터 일반성을 갖는 해석결과를 추출하기 위해서 다음 무차원변수들을 이용하여 방정식을 무차원화한다.

$$\tau \equiv \frac{t}{T} \quad (18)$$

$$\xi \equiv \frac{x}{L} \quad (19)$$

$$\vartheta_j \equiv \frac{q_j}{L} \quad (20)$$

$$\delta \equiv \frac{r}{L} \quad (21)$$

$$\alpha \equiv \frac{m}{\rho L} \quad (22)$$

$$\beta \equiv \frac{a}{L} \quad (23)$$

$$\gamma \equiv T\Omega \quad (24)$$

여기서,  $\delta$ 는 보길이에 대한 축반경의 비율,  $\alpha$ 는 집중질량의 보질량에 대한 비율,  $\beta$ 는 고정단에서 집중질량이 위치한 점까지의 거리를 보 길이로 나눈비율, 그리고  $\gamma$ 는 보의 회전각속도에 다음과 같은 보의 고유주기와 관련된 시간을 곱한 무차원변수들을 각각 나타낸다.

$$T = \left( \frac{\rho L^4}{EI_3} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (25)$$

식 (18~25)를 이용하면 식 (17)는 다음과 같은 무차원 형태로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n \left[ \left\{ \int_0^1 \psi_i \psi_j d\xi + \alpha \psi_i(\beta) \psi_j(\beta) \right\} \ddot{\vartheta}_j \right. \\ & + \left( \int_0^1 \psi_{i,\xi\xi} \psi_{j,\xi\xi} d\xi \right) \vartheta_j + \gamma^2 \left\{ \delta \int_0^1 (1-\xi) \psi_{i,\xi} \psi_{j,\xi} d\xi \right. \\ & + \alpha(\beta+\delta) \int_0^\beta \psi_{i,\xi} \psi_{j,\xi} d\xi + \frac{1}{2} \int_0^1 (1-\xi^2) \psi_{i,\xi} \psi_{j,\xi} d\xi \\ & \left. \left. - \int_0^1 \psi_i \psi_j d\xi \right\} \vartheta_j \right] = 0 \quad (26) \end{aligned}$$

여기서,  $\psi_i(\xi)$ 는  $\phi_i(x)$ 와 동일한 값을 갖는다. 식 (26)에서  $\vartheta_j$ 들이 시간에 대한 조화함수들이라 가정하면,  $\vartheta_j$ 들로 이루어진 열행렬(column matrix)  $\underline{\vartheta}$ 는, 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\underline{\vartheta} = e^{j\omega\tau} \underline{\Theta} \quad (27)$$

여기서,  $j$ 는 허수를 나타내는 표시이고  $\omega$ 는 고유진동수에  $T$ 를 곱한 무차원변수이며  $\underline{\Theta}$ 는 모드형상을 대표하는 열행렬이다. 식 (27)을 (26)에 대입하여 정리하면,

$$\omega^2 M \underline{\Theta} = K \underline{\Theta} \quad (28)$$

여기서,  $M$ 과  $K$ 는  $(\mu \times \mu)$  크기의 정방행렬(square matrices)들로 그 요소들은 다음과 같다.

$$M_{ij} = \int_0^1 \psi_i \psi_j d\xi + \alpha \psi_i(\beta) \psi_j(\beta) \quad (29)$$

$$K_{ij} = \int_0^1 \psi_{i,\xi\xi} \psi_{j,\xi\xi} d\xi + \gamma^2 \left\{ \delta \int_0^1 (1-\xi) \psi_{i,\xi} \psi_{j,\xi} d\xi \right.$$

$$+ \alpha(\beta + \delta) \int_0^\beta \psi_{i,\epsilon} \psi_{j,\epsilon} + \frac{1}{2} \int_0^1 (1 - \xi^2) \psi_{i,\epsilon} \psi_{j,\epsilon} d\xi - \int_0^1 \psi_{i,\epsilon} \psi_{j,\epsilon} d\xi \} \quad (30)$$

면외방향 굽힘진동식의 무차원화도 이상의 과정과 동일하게 이루어지며 두 진동식의 결과는 면외방향 굽힘진동의 경우 식 (25)에  $I_2$ 를 사용하고, 식 (30) 대신 다음 식이 사용되게 된다.

$$K_{ij} = \int_0^1 \psi_{i,\epsilon\epsilon} \psi_{j,\epsilon\epsilon} d\xi + \gamma^2 \left\{ \delta \int_0^1 (1 - \xi) \psi_{i,\epsilon} \psi_{j,\epsilon} d\xi + \alpha(\beta + \delta) \int_0^\beta \psi_{i,\epsilon} \psi_{j,\epsilon} d\xi + \frac{1}{2} \int_0^1 (1 - \xi^2) \psi_{i,\epsilon} \psi_{j,\epsilon} d\xi \right\} \quad (31)$$

식 (30)과 식 (31)의 차이는 식 (30)의 마지막 항으로 요약된다. 따라서 회전시  $I_2$ 와  $I_3$ 가 같을 때 면외방향 굽힘 고유진동수가 면내방향 진동수보다 항상 클 것을 예측할 수 있다.

### 3. 수치해석

본 연구에서는 강제운동을 하지않는 외팔보의 굽힘진동 고유모드들을 가상모드(assumed modes)로 사용하여 수치해석을 수행하였다. Table 1은 면내 굽힘진동해석의 대표적인 경우로서  $\alpha=1, \beta=1, \delta=1, \gamma=10$ 일때의 결과이며, 사용된 모드수의 증

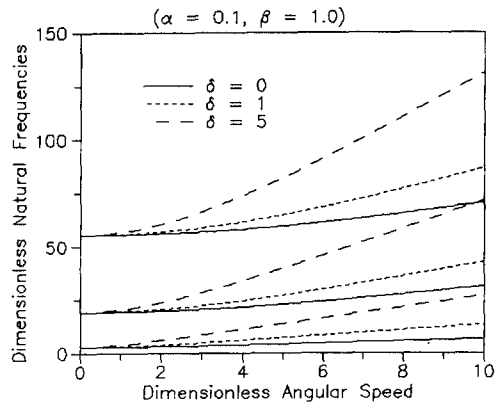
**Table 1** Convergence of dimensionless natural frequencies

No. of modes	1st Freq.	2nd Freq.	3rd Freq.
1	14.9555	***	***
2	14.4283	60.4901	***
3	14.2969	60.4666	122.384
4	14.2290	59.7721	122.038
5	14.2045	59.7014	120.710
6	14.1889	59.5716	120.709
7	14.1822	59.5457	120.429
8	14.1774	59.5083	120.425
9	14.1752	59.4989	120.336
10	14.1735	59.4855	120.334

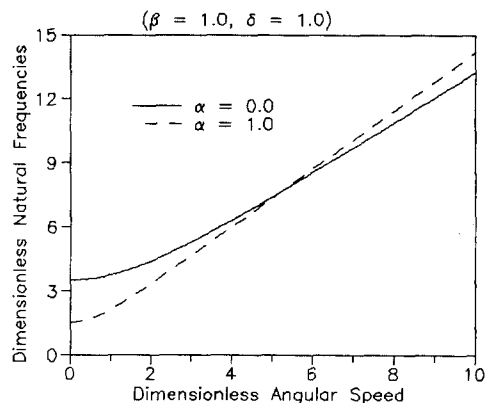
( $\alpha=1, \beta=1, \delta=1, \gamma=10$ )

가에 따라 무차원화된 가장 낮은 세 고유진동수들의 수렴과정을 보여주고 있다. 모드수를 10개 사용할 때 수치해석값들은 거의 수렴에 도달한 것을 알 수 있으며, 모드수를 9개 사용한 결과들과 비교하면 최대 0.02 퍼센트 정도의 미소한 차이만을 보인다. 이러한 수렴현상은 면외 굽힘진동 해석에서도 동일하게 관찰되었으며, 본 연구에서는 이를 충분한 것으로 간주하여 이후 모두 10개의 모드들을 사용해 수치해석을 수행하였다. Table 1에는 1차 및 2차 고유진동수가 소수점 4째자리까지 표시되어 있고 3차 고유진동수는 소수점 3째자리까지 표시되어 있는데 이는 동일한 유효숫자 개수를 사용하기 위한 것이다.

Fig. 2는  $\alpha=0.1, \beta=1.0$ 일 때 면내 굽힘진동해석결과이다. 가장 낮은 세개의 무차원 고유진동수들은 무차원 회전각속도  $\gamma$ 가 커질수록 증가하며,



**Fig. 2** Natural frequency variation vs. angular speed (chordwise bending vibration)



**Fig. 3** Concentrated mass effect on the natural frequency. (chordwise bending vibration)

무차원 축반경  $\delta$ 가 커지면 이러한 증가율이 가속 되는 것이 관찰된다. 이러한 정성적 특성들은 직관적으로도 예측될 수 있다. 즉, 축반경과 회전각속도의 증가에 따라 보에 작용하는 원심력이 증가되어 굽힘방향 강성과 고유진동수의 증가가 초래되는 것이다. 그림에서  $\delta=0$ 일 경우는 축반경이 0이 되므로 물리적 의미는 없으나 축의 반경이 보의 길이에 비해 무시할만큼 작아지는 극한의 경우에 대한 해석결과를 나타낸다고 할 수 있다.

Fig. 3은  $\beta=1.0$ ,  $\delta=1.0$ 일때  $\alpha$ 와  $\gamma$ 의 변화에 따른 면내 굽힘진동의 첫번째 무차원 고유진동수의 변화를 나타낸다. 직관적으로 예측되듯이  $\alpha$ 의 증가는 무회전시 고유진동수의 감소를 초래하나, 회전에 따른 진동수 증가율은 오히려 더 커지게 한다. 따라서 이 그림은 집중질량을 가진 외팔보는 단순 외팔보에 비해 무회전시 더 낮은 고유진동수들을 가지나 어느 이상의 회전각속도에 이르면 오히려 더 큰 고유진동수 값을 갖게되는 것을 보여주는 것이다.

Fig. 4에는  $\alpha=0.1$ ,  $\beta=1.0$ 일 때 면외 굽힘진동 해석을 수행한 결과를 보여주고 있다. 면내 굽힘진동 해석의 결과와 유사하게 회전수의 증가에 따른 고유진동수의 증가와 축반경의 증가에 따른 증가율의 증가현상이 그림에 잘 나타나 있다.

Table 2에는  $\alpha=1.0$ ,  $\beta=1.0$ ,  $\delta=0$ 일 때, 여러 가지 회전각속도에 대해 본 논문에 제시된 방법에 의한 면외 굽힘진동해석의 결과들을 참고문헌<sup>(9)</sup>의 결과들과 비교하고있다. 표에서 보듯이 본 논문에서 제시된 모델링은 참고문헌<sup>(9)</sup>의 엄밀해와 비교할 때 최대 0.02 퍼센트 오차를 갖는데 이는 수렴오차

와 같은 크기이므로 실제적으로 동등한 결과라 할 수 있다.

Fig. 5는 집중질량의 위치변화에 따른 첫번째 무차원 고유진동수 값을  $\alpha=1.0$ ,  $\delta=1.0$ , 그리고 세  $\gamma$ 값에 대해 나타내고 있다. 그림의 가로 축에서  $\beta=0.0$ 는 질량이 고정단에 위치한 경우며  $\beta=1.0$ 은 질량이 자유단에 위치한 경우를 나타낸다. 무회전시에는 ( $\gamma=0$ 의 경우) 집중질량이 자유단쪽으로 이동할수록 고유진동수가 계속 감소하나 회전을 할

Table 2 Comparison of first and second natural frequencies

$\gamma$	First natural frequency		Second natural frequency	
	Present	Ref. [9]	Present	Ref. [9]
0	1.5573	1.5573	16.2527	16.2500
1	1.9017	1.9017	16.7594	16.7570
2	2.6696	2.6696	18.1932	18.1910
3	3.5823	3.5823	20.3524	20.3504
4	4.5429	4.5429	23.0246	23.0229
5	5.5219	5.5218	26.0431	26.0415
6	6.5091	6.5090	29.2933	29.2917
7	7.5007	7.5005	32.7002	32.6984
8	8.4947	8.4945	36.2156	36.2134
9	9.4903	9.4899	39.8079	39.8048
10	10.4870	10.4864	43.4561	43.4517

( $\alpha=1$ ,  $\beta=1$ ,  $\delta=0$ )

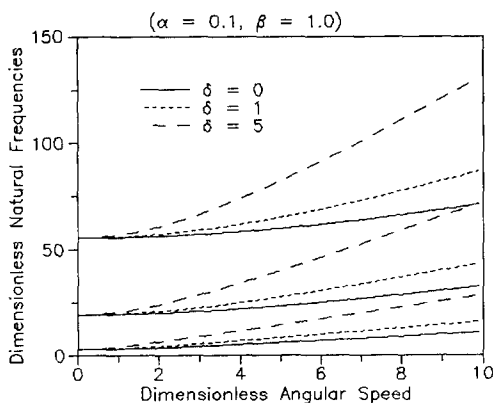


Fig. 4 Natural frequency variation vs. angular speed (flapwise bending vibration)

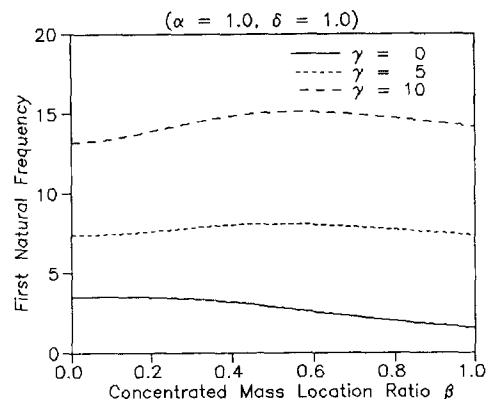


Fig. 5 Concentrated mass location effect on the first natural frequency

때는 ( $\gamma=5$  혹은 10의 경우) 집중질량이 고정단에서 자유단쪽으로 이동을 시작함에 따라 적절한 위치까지 고유진동수가 증가하는 현상을 관찰할 수 있다. 이러한 현상은 회전시 집중질량에 의한 강성 증가효과가 질량증가효과보다 크기 때문에 나타나는 현상이라 할 수 있다. 그러나 집중질량이 자유단에 가까이 가면 다시 질량효과가 강성효과보다 커져서 고유진동수값이 감소하는 것을 볼 수 있다. 이것은 보가 회전운동을 할 때는 집중질량의 위치에 따라서 고유진동수가 증가할 수도 있고 감소할 수도 있다는 것을 의미하는 것이며 집중질량의 부착위치를 조절하여 고유진동수를 적절히 조절할 수 있다는 결과이다.

외팔보의 회전주파수와 고유진동수가 일치하면 공진현상이 야기되며 이를 임계 각속도라 부른다. 임계각속도는 보의 면의 굽힘진동에는 존재하지 않으며<sup>(13)</sup> 면내 굽힘진동의 경우는 특정한 축반경비 내에서만 존재함이 알려져있다.<sup>(12)</sup> 임계각속도의 존재를 위해서는 그래프상에서  $\omega=\gamma$ 의 직선이 (예를 들어 Fig. 2에 나타난) 고유진동수의 변화곡선들과 만나야 한다. 이것이 가능하려면  $\gamma$ 의 값이 커질 때 고유진동수 변화곡선들의 점근선의 기울기가 1보다 작아야 한다. 식 (30)에서  $\gamma$ 가  $\infty$ 로 갈 때 우변항들 중 첫째 항은 다른 항들에 비해 무시할 수 있게 되어 식 (28)는 다음과 같이 변환될 수 있다.

$$\lambda^2 M \Theta = K^* \Theta \quad (32)$$

여기서,  $\lambda$ 의 정의와  $K^*$ 의 요소는 다음과 같다.

$$\lambda \equiv \frac{\omega}{\gamma} \quad (33)$$

$$K_{ij}^* = \delta \int_0^1 (1-\xi) \psi_{i,\epsilon} \psi_{j,\epsilon} d\xi - \int_0^1 \psi_{i,\epsilon} \psi_{j,\epsilon} d\xi + \frac{1}{2} \int_0^1 (1-\xi^2) \psi_{i,\epsilon} \psi_{j,\epsilon} d\xi + \alpha(\beta + \delta) \int_0^\beta \psi_{i,\epsilon} \psi_{j,\epsilon} d\xi \quad (34)$$

식 (32)는  $\lambda$ 에 대한 고유치 문제이며  $\lambda$ 는 정의로부터 고유진동수 제곱의 기울기를 나타낸다.  $\lambda=1$ 일때  $\omega=\gamma$ 가 되므로, 이 고유치 문제에서  $\lambda=1$ 이 되는 값의 존재여부에 따라 임계각속도의 존재여부가 결정된다.

Fig. 6은  $\beta=1.0$ 이고,  $\delta=0.1$ ,  $\delta=0.3$ ,  $\delta=0.5$ 의 세 경우에,  $\alpha$ 값의 변화에 따른  $\lambda$ 의 변화를 보

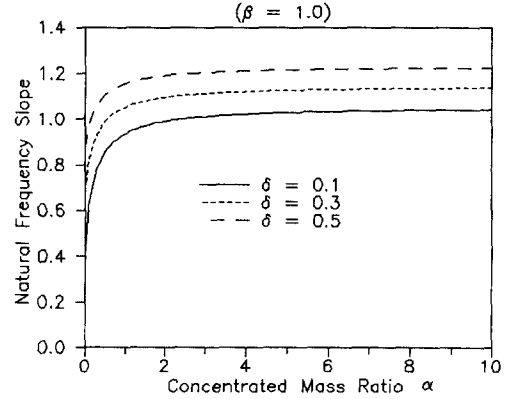
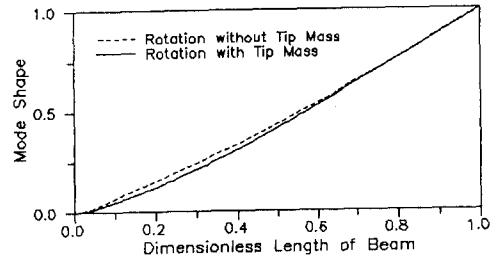
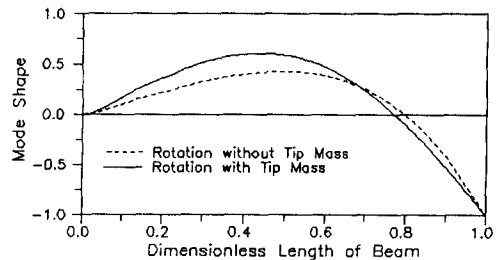


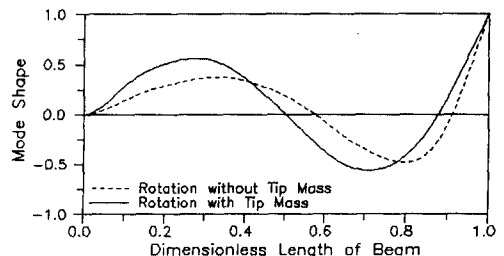
Fig. 6 Asymptotic frequency slope variation



(a) First mode shape variation



(b) Second mode shape variation



(b) Third mode shape variation

Fig. 7 Variations of first three mode shapes

여주고있다. 이 그림에서 알 수 있듯이  $\alpha$ 의 증가는 고유진동수 제적의 기울기를 증가시키는 역할을 한다. 그러나 기울기는  $\alpha$ 가 증가해도 계속 증가하지는 않고 일정한 값에 점근적으로 수렴해가는 것을 이 그림은 또한 보여주고 있다. 또  $\delta=0.1, 0.3, 0.5$ 의 세 경우에,  $\alpha$ 가 각각 2.4, 0.6, 0.2 이상이 되면  $\lambda$ 값이 1보다 커져서 임계각속도가 존재하지 않는 것을 수치적으로 확인할 수 있었다. 따라서 임계각속도는 면내 굽힘진동의 경우  $\alpha$  및  $\delta$ 의 영향을 받는 것을 알 수 있다.

모드형상 특히 절점이나 반절점의 위치는 진동제어를 목적으로 하는 경우 상당한 중요성을 가질 수 있다. Fig. 7은 면내 굽힘진동해석시  $\delta=1, \alpha=1, \gamma=10$ 일때 가장 낮은 세 모드의 모드형상과 절점 위치의 변화를 자유단 끝에 ( $\beta=1.0$ ) 질량이 있는 경우와 없는 경우를 비교하여 보여주고 있다. 이때  $\alpha=1$ 이므로 집중질량의 크기는 보의 질량과 같은 경우이다. 집중질량이 있는 경우는 (없는 경우와 비교하여) 둘째 모드의 절점은 보 전체길이를 100퍼센트로 볼 때, 2퍼센트가량 더 안쪽에 (고정단쪽으로) 위치하며 세째 모드의 경우는 첫째와 둘째 절점이 각각 7퍼센트와 4퍼센트 더 안쪽에 위치하는 것을 수치적으로 확인할 수 있었다. 이러한 변화는 면의 굽힘진동 모드들에서도 유사하게 나타나는 것을 확인하였다.

#### 4. 결 론

본 논문에서는 보의 임의 지점에 집중질량을 가진 회전운동을 하는 외팔보의 굽힘진동 해석 모델링이 제시되었다. 이 모델링은 집중질량을 고려하기 위해 보의 단위길이당 질량을 충격함수로 이상화하여 간명하게 수식을 유도하였다. 유도된 모델링의 정확성은 수치해석 결과를 다른 연구결과와 비교하여 규명하였다. 본 연구에서 제시된 진동해석 모델링은 집중질량의 위치에 상관없이 회전하는 외팔보의 진동해석을 끝단질량, 회전각속도, 축반경 크기의 변화에 따라 효과적으로 수행할 수 있다는 특성을 갖는다.

#### 후 기

본 논문의 연구는 1994년도 교육부 학술연구 조성비 (ME94-D-13)에 의해 지원을 받아 수행되었

으며 저자는 이에 관계자에게 감사를 드립니다.

#### 참고문헌

- (1) Southwell, R. and Gough, F., 1921, "The Free Transverse Vibration of Aircscrew Blades," *British A. R. C. Reports and Memoranda No. 766*.
- (2) Liebers, F., 1930, "Contribution to the Theory of Propeller Vibrations," *NACA TM No. 568*.
- (3) Theodorsen, T., 1935, "Propeller Vibrations and the Effect of Centrifugal Force," *NACA TN No. 516*.
- (4) Schilhansl, M., 1958, "Bending Frequency of a Rotating Cantilever Beam," *Journal of Applied Mechanics, Transaction of American Society of Mechanical Engineers*, 25, pp. 28~30.
- (5) Carnegie, W., 1959, "Vibrations of Rotating Cantilever Blading: Theoretical Approaches to the Frequency Problem Based on Energy Methods," *J. Mechanical Engineering and Science*, 1, pp. 235~240.
- (6) Putter, S. and Manor, H., 1978, "Natural Frequencies of Radial Rotating Beams," *J. Sound and Vibration*, 56, pp. 175~185.
- (7) Bhat, R., 1986, "Transverse Vibrations of a Rotating Uniform Cantilever Beam with Tip Mass as Predicted by Using Beam Characteristic Orthogonal Polynomials in the Rayleigh-Ritz Method," *J. Sound and Vibration*, 105(2), pp. 199~210.
- (8) Hoa, S., 1979, "Vibration of a rotating beam with Tip Mass," *J. Sound and Vibration*, 67, pp. 369~381.
- (9) Wright, A., Smith C., Thresher, R. and Wang, J., 1982, "Vibration Modes of Centrifugally Stiffened Beams," *J. Applied Mechanics*, Vol. 49, pp. 197~202.
- (10) Kuo, Y. H., Wu, T. H., Lee, S. Y., 1994, "Bending Vibration of a Rotating Non-uniform Beam with Tip Mass and an Elastically Restrained Root," *Computer & Structure*, Vol. 22, No. 2, pp. 229~236.
- (11) Yokoyama, T., 1988, "Free Vibration Charac-

- teristics of Rotating Timoshenko Beams," *Int. J. of Mechanical Science*, Vol. 30, No. 10, pp. 743~755.
- (12) 유홍희, 1991, "회전 외팔보의 굽힘진동해석," 대한기계학회논문집, 제16권, 제5호, pp. 891~898.
- (13) 유홍희, 1995, "회전 외팔보의 면외방향 굽힘진동해석," 대한기계학회논문집, 제19권, 제2호, pp. 348~353.
- (14) Kane, T., Ryan, R., and Banerjee, A., 1987, "Dynamics of Cantilever Beam Attached to a Moving Base," *J. Guidance, Control, and Dynamics*, 10, pp. 139~151.
- (15) 유홍희, 1991, "회전 구조물의 복합 변형변수를 이용한 선형 동적 모델링," 한국항공우주학회지, 제19권, 제3호, pp. 32~39.
- (16) 유홍희, 1994, "강체운동을 하는 끝단 집중질량을 가진 외팔보의 동적 해석," 한국항공우주학회지, 제22권, 제6호, pp. 32~39.
- (17) 유홍희, 1995, "끝단질량을 가진 회전 외팔보의 굽힘진동해석," 1995년도 대한기계학회 춘계 학술대회논문집, pp. 667~672.
- (18) 신상하, 유홍희, 1996, "인장-굽힘 운동간 연성효과를 고려한 회전 외팔보의 진동해석," 한국항공우주학회지, 제24권, 제2호, pp. 77~84.