

〈논 문〉

변형률에 근거한 2-절점 곡선보 요소

유하상* · 신호철**

(1996년 3월 13일 접수)

A 2-Node Strain Based Curved Beam Element

Ha-Sang Ryu and Hyo-Chol Sin

Key Words : Strain Based Curved Beam Element(변형률 기저 곡선보 요소), Shallow Beam Geometry(얕은보 형상), Locking(강성과잉)

Abstract

It is well known that in typical displacement-based curved beam elements, the stiffness matrix is overestimated and as a result displacement predictions show gross error for the thin beam case. In this paper, a strain based curved beam element with 2 nodes is formulated based on shallow beam geometry. At the element level, the curvature and membrane strain fields are approximated independently and the displacement fields are obtained by integrating the strain fields. Three test problems are given to demonstrate the numerical performance of the element. Analysis results obtained reveal that the element is free of locking and very effectively applicable to deeply as well as shallowly curved beams.

1. 서 론

보, 평판 또는 셸과 같은 구조요소는 실재 구조물의 모델링에 적용되었을 때 그 효율성으로 인해 널리 사용되고 있다. 특히 곡선 보는 자체로도 유용하게 사용될 뿐만 아니라 셸과 같은 보다 일반적인 곡선 요소에서 발생하는 문제점과 관련되어 주목되는 요소이다. 통상적인 변위가정법에 의해 정식화된 곡선보 요소는 보 단면의 두께가 길이에 비해 상대적으로 작아질 경우, 강성이 실제 값 보다 크게 계산되어 유한요소해석 결과를 손상시키고 있음이 알려져 있다. 이러한 현상을 강성과잉현상이라 하며, 이 때의 오차는 요소의 수를 증가시켜도 쉽게 없어지지 않는다.

곡선 보의 강성과잉현상을 제거하기 위해 많은

연구가 수행되어 다양한 방법이 제시되었는데 대표적인 방법으로는 감차적분법,^(8,9) field consistency,^(10,11) anisoparametric interpolation,⁽¹²⁾ hybrid/mixed formulation,^(7,13,14) 변형률요소^(1-6,15) 등이 있다. 얕은 곡선보에 대하여 Stolarski와 Belytschko^(8,9)는 강성과잉현상에 대한 개념과 강성과잉으로 인한 해의 부정확성을 설명하고 이의 해결을 위해 감차적분을 제시하였다. 그러나 감차적분법은 적용이 간편하지만 곡선보의 거동 특성을 정확하게 표현할 수 없음이 지적되었다.⁽⁸⁾ Babu와 Prathap^(10,11)은 가성 부가강성에 의한 오차예측을 하였고, 이 가성강성을 제거할 수 있도록 전단 변형률장과 막 변형률장에 수정된 형상함수를 사용하는 field consistency 방법을 제시하였다. Tessler와 Spiridigliozzi⁽¹²⁾는 고차의 변위장과 요소내에서 일정한 변형률장을 사용하는 anisoparametric interpolation 기법을 제안하였다. Hybrid/mixed 방법에 의해 정식화된 요소는 강성

*회원, 서울대학교 터보동력기계연구센터

**회원, 서울대학교 기계설계학과

과잉현상은 보이지 않지만 저차의 요소의 경우 효율성은 높지 않다. 곡선보 요소의 정식화에 사용된 방법 중 해석의 정확성이 가장 우수한 것은 변형률 요소이다. 변형률요소는 변형률장을 단순한 형태로 가정된 다항식으로 나타내고 변형률과 곡률 및 변위관계의 미분방정식 해를 형상함수로 사용하는 방법이다.^(1~6) Lee와 Sin⁽¹⁵⁾은 곡률장의 가정에 기초하여 곡선보를 정식화하였다. 변형률 요소의 범주에 속하는 기존의 요소들은^(1~6, 15) 깊은 보 이론에 의해 정식화되어 대단히 정확한 해석결과를 보여주지만 보의 형상이 직선에 접근하면 적용할 수 없게 된다.

본 논문에서는 보의 형상이 곡선일 때 뿐만 아니라 직선일 때도 적용할 수 있는 변형률 요소의 새로운 정식화 방법을 제시하고 해석 능력이 우수한 2-절점 변형률 요소를 정식화한다. 이를 위해 보의 초기 형상을 얇은보로 가정하고 굽힘 변형률과 막 변형률은 단순한 다항식 표현을 이용하여 독립적으로 가정하고 각각의 변형률장에 적합한 변위장은 변형률장을 적분하여 구해진다. 정식화된 요소를 전형적인 곡선보의 문제에 적용하고 해석 결과로부터 개발된 요소가 곡선요소의 특징을 잘 나타내며 강성과과잉현상이 제거되고 우수한 성능을 보임을 확인하였다.

2. 지배방정식

Fig. 1은 $x-z$ 평면에 위치하고 균일한 사각형 단면을 갖는 곡선보를 나타내며 x 축은 보요소의 양끝 두 점을 연결하는 선에 일치한다. 곡선 보의 거동은 중립면의 변위 u 와 w , 그리고 단면의 회전각 θ 로 나타낼 수 있다. 보의 초기형상 w_0 는 $w_0^2, x \ll 1$ 인 얇은보로 가정하며 Hermite 보간함수를 사용하여 아래와 같이 표현된다.

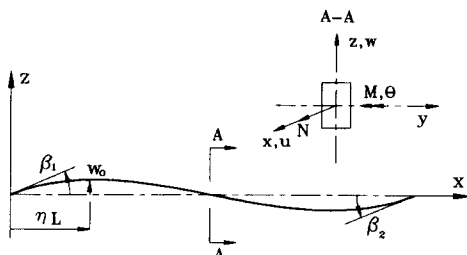


Fig. 1 Shallowly curved beam element

$$w_0(x) = \beta_1 L (\eta - 2\eta^2 + \eta^3) + \beta_2 L (\eta^3 - \eta^2) \quad (1)$$

$$\eta = x/L$$

변형률에 기초한 보요소에서는 요소내의 변형률 장으로부터 변위장을 유도하게 된다. 따라서 변위 가정에 기초한 유한요소 정식화에 사용되는 변위장의 미분형태로 나타나는 변형률과 변위관계 대신 변형률의 적분형태로 변위장을 표현하는 관계식이 필요하다. 보의 초기형상을 $w_0^2, x \ll 1$ 인 얇은보 형상으로 가정하면 식 (1)에서 $w_0, x = \tan \beta \cong \beta$ 이므로 전단변형을 무시할 경우, 변위 u 와 w 는 회전각 θ 와 막변형률 ε 으로부터 아래와 같이 표현된다.

$$u = \int_0^x \{-\theta(\xi)\beta + \varepsilon(\xi)\} d\xi + u_1 \quad (2)$$

$$w = \int_0^x \{\theta(\xi) + \varepsilon(\xi)\beta\} d\xi + w_1 \quad (3)$$

식 (2)와 (3)에서 u_1 과 w_1 은 x 가 0인 점에서 변위 성분으로 강제운동 성분과 관계된다.

얇은보 이론에 따르면 곡률 x 와 회전각 θ 사이의 관계는 $x = -\theta, x$ 이므로 곡률을 알고 있다면 곡률에 의해 발생하는 회전각 θ 는 곡률을 식 (4)와 같이 적분함으로써 구할 수 있다.

$$\theta = -\int_0^x x(\xi) d\xi + \theta_1 \quad (4)$$

여기서, θ_1 은 x 가 0인 점에서의 회전각으로 이 요소의 강제운동 성분이다.

굽힘모멘트 M_0 와 축력 N 과 각각의 변형률성분과의 관계는 다음과 같은 구성방정식으로 표현된다.

$$M_0 = EIx, \quad N = EA\varepsilon \quad (5)$$

여기서, E 는 탄성계수, A 는 보의 단면의 면적이고 I 는 관성모멘트이다.

곡선보 요소의 유한요소 정식화를 위한 범함수(functional)는 식 (6)과 같다.

$$\Pi = \frac{1}{2} EI \int_0^L x^2 dx + \frac{1}{2} EA \int_0^L \varepsilon^2 dx - \left\{ \int_0^L m \theta dx + \int_0^L p_z w dx + \int_0^L p_x u dx \right\} \quad (6)$$

여기서, m, p_x, p_z 는 각각 단위길이당 주어진 모멘트와 x 방향, z 방향의 하중을 나타낸다.

3. 곡선보 요소의 정식화

요소내의 곡률 x 의 분포를 선형으로, 그리고 막

변형률 ε 의 분포를 일정하다고 가정하면 요소내의 변형률장은 다음과 같이 주어진다.

$$x = H_x V, \quad \varepsilon = H_\varepsilon V \quad (7)$$

여기서,

$$H_x = \{1, \eta, 0\}, \quad H_\varepsilon = \{0, 0, 1\} \quad (8)$$

$$V^T = \{a_0, a_1, b_0\} \quad (9)$$

변형률에 적합한 변위장을 구하기 위해 식 (2), (3), (4)를 이용한다. 먼저 회전변위장은 식 (10)과 같다.

$$\theta = H_\theta V + \theta_1, \quad H_\theta = -\int_0^x H_x(\xi) d\xi \quad (10)$$

요소 좌표계 x 와 z 방향의 변위 u 와 w 는 식 (11)과 식 (12)로 주어진다.

$$u = H_x V + u_1 - w_0 \theta_1 \quad (11)$$

$$w = H_z V + \theta_1 x + w_1 \quad (12)$$

여기서,

$$H_x = \int_0^x \{-H_\theta(\xi)\beta + H_\varepsilon(\xi)\} d\xi \quad (13)$$

$$H_z = \int_0^x \{H_\theta(\xi) + H_\varepsilon(\xi)\beta\} d\xi \quad (14)$$

절점변위의 값으로 주어지는 일반적인 경계조건에 적용되도록 하려면 V 와 절점변위와의 관계가 필요하다. 식 (10)과 (11) 및 (12)에 절점변위를 대입하여 정리하면 아래와 같다.

$$u_2 - u_1 = H_x |_{L} V \quad (15)$$

$$w_2 - w_1 - \theta_1 L = H_z |_{L} V \quad (16)$$

$$\theta_2 - \theta_1 = H_\theta |_{L} V \quad (17)$$

식 (15)와 (16) 그리고 (17)을 행렬형태로 정돈하면 식 (18), (19)와 같다.

$$T_v = \begin{bmatrix} H_x |_{L} \\ H_z |_{L} \\ H_\theta |_{L} \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$T_u = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -L & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (19)$$

따라서 절점변위벡터를 U 라하면 V 와 U 는 다음과 같이 변환행렬 T_m 을 매개로 표시된다.

$$V = T_m U, \quad T_m = T_v^{-1} T_u \quad (20)$$

변환행렬 T_m 을 이용하여 변형률 보간을 위한 변수 a_0, a_1, b_0 를 절점변위성분으로 나타내면 식 (21)과 식 (22)와 같다.

$$\begin{aligned} a_0 &= 6/L^2 w_1 + 4/L \theta_1 - 6/L^2 w_2 + 2/L \theta_2 \\ a_1 &= -12/L^2 w_1 - 6/L \theta_1 + 12/L^2 w_2 - 6/L \theta_2 \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} b_0 &= (u_2 - u_1)/L - (\beta_1 + \beta_2)/(10L)(w_2 - w_1) \\ &\quad + (4\beta_1 - \beta_2)/30\theta_1 + (-\beta_1 + 4\beta_2)/30\theta_2 \end{aligned} \quad (22)$$

변형률장에 적합한 각각의 변위장은 아래와 같다.

$$\begin{aligned} u &= (\beta_1 x^2/6 - 2(2\beta_1 + \beta_2)x^2\eta/3 + 3(\beta_1 + \beta_2)x^2\eta^2/4)a_0 \\ &\quad + \eta^3(10\beta_1 L^2 - 15(2\beta_1 + \beta_2)Lx + 18(\beta_1 + \beta_2)x^2) \\ &\quad /60a_1 + xb_0 + u_1 - w_0\theta_1 \end{aligned} \quad (23)$$

$$\theta = -xa_0 - \eta x/2a_1 + \theta_1 \quad (24)$$

$$w = -x^2/2a_0 - \eta x^2/6a_1 + w_0b_0 + w_1 + x\theta_1 \quad (25)$$

4. 수치 예

4.1 직선에 가까운 외팔보

Fig. 2는 보의 길이에 비해 큰 곡률반경 R 을 갖는 외팔보를 나타낸다. 수치계산을 위하여 길이 $L = 10$ cm, 두께 $t = 0.001$ cm이고 폭 $b = 1$ cm, $R = 10^3$ cm를 사용하였다. 물성치는 $E = 10^7$ N/cm²이고 $\nu = 0.3$ 이다. 외팔보의 자유 단에 전단력 $P = 1$ N이 작용하는 경우 1개의 요소로 모델링하여 해석한 결과가 Table 1에 수록되어 있다. 계산된 점 1은 보의 고정 단을, 점 3은 자유 단을 그리고 점 2는 보의 중점을 각각 나타낸다. Table 1에서 본 논문에서 제안된 요소는 얇은 보 형상이고 일차 선형장으로 모멘트 분포가 주어질 경우 보의 거동을 정확하게 표현함을 알 수 있다. 또 모멘트 M_0 와 반경 R 에 의해 도입되는 축력 N 을 정확하게 계산할 수 있음을 확인할 수 있다.

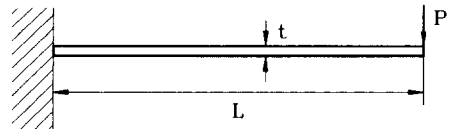


Fig. 2 A nearly straight cantilever beam with radius of curvature R

Table 1 Finite element results from a single element idealization of a nearly straight cantilever beam with tip force

	Point	N (N)	M_b (N.cm)	w (cm)	θ
Present	1	—	10	0	0
	2	0.5×10^{-2}	5.0	0.125×10^6	0.450×10^5
	3	—	0.417×10^{-5}	0.400×10^6	0.600×10^5
Exact	1	10^{-2}	10	0	0
	2	0.5×10^{-2}	5.0	0.125×10^6	0.450×10^5
	3	0	0	0.400×10^6	0.600×10^5

4.2 한쪽 단이 고정된 사분원 링

Fig. 3은 한쪽 단이 고정되어 있고 다른 쪽의 자유 단에는 모멘트 하중이 가해져 있는 사분원 링을 나타내고 있다. 수치해석을 위하여 반경 $R=10$ cm, 두께 $t=0.01$ cm, 폭 $b=1$ cm를 사용하였다. 하중으로 $M_0=1$ N.cm을 적용하고 물성치는 $E=1.0 \times 10^7$ N/cm²와 $\nu=0.0$ 을 사용하였다.

이 예제는 정해가 보의 전 영역에서 $M_b=1$ N.cm이고 $N=0$ N인 순수굽힘상태를 나타내고 있다. 강성과잉 현상은 순수굽힘 변형모드를 나타낼 수 없는 요소에서 발생함이 알려져 있다. 즉 이 예제는 순수굽힘상태에서 막 변형률이 0인 조건을 나타낼 수 있는 요소의 능력을 검사하여 정식화된 보 요소가 강성과잉의 원인을 제거하고 있는 지를 시험하기 위한 것이다.

본 연구에서 개발된 요소를 사용하여 계산된 모멘트 분포는 Fig. 4에, 축방향 힘의 분포는 Fig. 5에 나타내었다. 그림에 표시된 점은 요소의 Gauss 적분점이다. 그림에서 계산된 힘들의 분포가 순수

굽힘상태에서의 응력상태를 정확하게 기술함을 볼 수 있다. 따라서 본 연구에서 개발된 요소에서는 강성과잉의 원인이 제거되었음을 알 수 있다.

4.3 Pinched ring

Fig. 6은 링의 상·하에 횡방향의 집중하중이 가해진 pinched ring 모델을 보여준다. Pinched ring

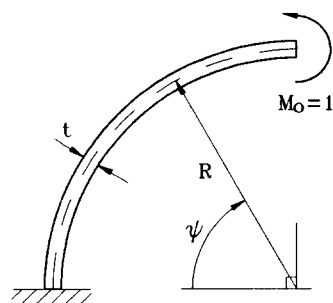


Fig. 3 A circular cantilever subjected to pure bending

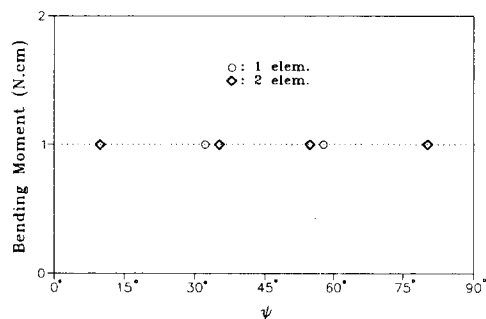


Fig. 4 Bending moment distributions in a circular cantilever

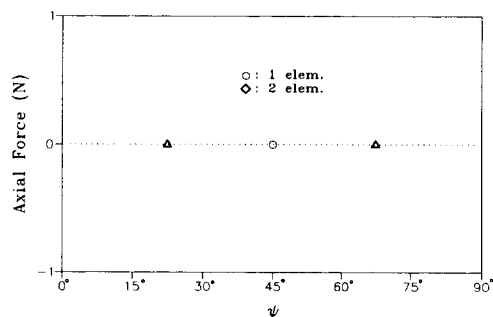


Fig. 5 Axial force distributions in a circular cantilever

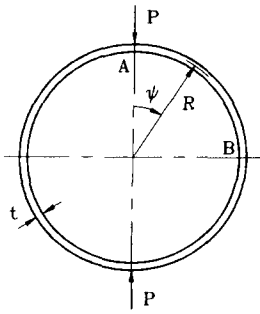


Fig. 6 A pinched ring

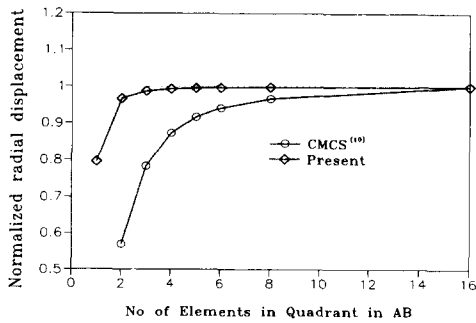


Fig. 7 Convergence of the normalized radial displacement at A for a pinched ring

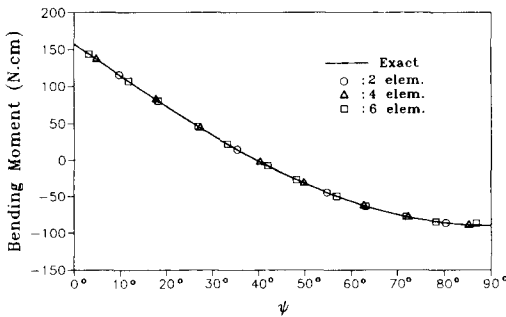


Fig. 8 Bending moment distributions in a quadrant of a pinched ring

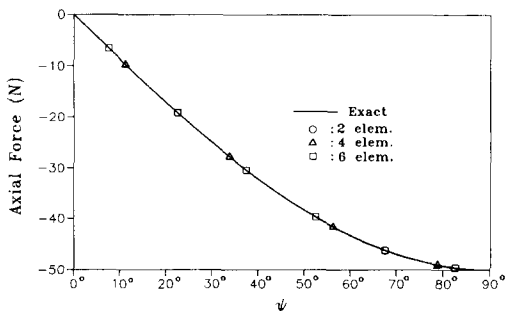


Fig. 9 Axial force distributions in a quadrant of a pinched ring

문제는 대칭성을 고려하면 적절한 경계조건을 가진 사분원 링으로 모델링 할 수 있다. 수치해석을 위한 치수로 반경 $R=4.953\text{ cm}$, $t=0.094\text{ cm}$, $b=1\text{ cm}$ 를 사용하였다. 하중은 $P=50\text{ N}$ 을 적용하고 물성치는 $E=10.5 \times 10^6\text{ N/cm}^2$ 와 $\nu=0.3125$ 를 사용하였다.

Fig. 7에는 하중 작용점 A에서의 반경방향 변위를 요소의 수가 증가함에 따라 정해에 수렴되어 가는 경향을 Prathap이 제안한 2절점 CMCS⁽¹⁰⁾ 요소와 비교하였다. CMCS (field-consistent membrane and shear strain) 요소는 막변형률장과 전단변형률장에 field consistency 방법을 적용한 깊은 아치 이론에 의해 정식화된 요소이다. 그림에서 본 논문에서 개발된 요소가 빠르게 정해에 수렴함을 알 수 있다. 본 논문에서 정식화된 요소가 깊은 보에서도 정확한 결과를 보이는 이유는 요소내에서 막변형률은 일정한데 비해 신형의 곡률변화를 가정함으로써 보 거동의 주 요인인 굽힘거동을 보다 잘 나타내기 때문이며 정식화 과정에서 $w_{0,x} \cong \beta$ 로 가정된 데 따른 형상기술의 오차는 요소의 수가 증가함에 따라 $w_{0,x}$ 가 급격히 감소하기 때문이다.

Fig. 8과 Fig. 9에는 모델링한 요소의 수를 증가시키면서 모멘트와 축방향하중의 분포를 요소의 Gauss 적분점에서 계산하여 표시하였다. 응력분포를 나타낸 그림에서도 본 논문에서 개발된 요소의 정확성을 확인할 수 있다.

5. 결 론

본 논문에서는 2절점 곡선보 요소에의 적용을 위한 새로운 변형률 모델을 개발하였다. 변형률 요소의 개념을 이용함으로써 강체운동을 나타낼 수 있는 변형률장과 변형률장에 적합한 변위장을 단순한 형태로 유도하였다. 전형적인 곡선보의 문제에 적용하여 개발된 요소가 강성과잉현상을 보이지 않고 얇은보 뿐만 아니라 깊은보 형상에서도 변위와 응력 계산에서 빠르게 정해에 수렴함을 확인하였다.

후 기

본 연구는 터보동력기계연구센터의 지원에 의해 수행되었으며, 관계자 여러분께 심심한 감사를 표한다.

참고문헌

- (1) Ashwell, D. G. and Gallagher, R. H., 1976, *Finite Elements for Thin Shells and Curved Members*, Wiley, London.
- (2) Ashwell, D. G., Sabir, A. B. and Roberts, T. M., 1971, "Further Studies in the Application of Curved Finite Elements Applied to Arches," *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 13, pp. 507~517.
- (3) Fried, I., 1973, "Shape Functions and the Accuracy of Arch Finite Elements," *A.I.A.A. J.*, Vol. 11, pp. 287~291.
- (4) Ashwell, D. G., and Sabir, A. B., 1974. "On the Finite Element Calculation of Stress Distributions in Arches," *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 16, pp. 21~29.
- (5) Dawe, D. J., 1974, "Curved Finite Elements For the Analysis of Shallow and Deep Arches," *Comp. Struct.*, Vol. 4, pp. 559~580.
- (6) Dawe, D. J., 1974, "Numerical Studies Using Circular Arch Finite Elements," *Comp. Struct.*, Vol. 4, pp. 729~740.
- (7) Noor, A. K. and Peters, J. M., 1981, "Mixed Models and Reduced/Selective Integration for Nonlinear Analysis of Curved Beams," *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 17, pp. 615~63.
- (8) Stolarski, H. and Belytschko, T., 1982, "Membrane Locking and Reduced Integration for Curved Elements," *J. Appl. Mech.*, Vol. 49, pp. 172~176.
- (9) Stolarski, H. and Belytschko, T., 1983, "Shear and Membrane Locking in Curved C^0 Elements," *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 41, pp. 279~296.
- (10) Babu, C. R. and Prathap, G., 1986, "A Linear Thick Curved Beam Element," *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 23, pp. 1313~1328.
- (11) Prathap, G. and Babu, C. R., 1986, "An Isoparametric Quadratic Thick Curved Beam Element," *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 23, pp. 1583~1600.
- (12) Tessler, A. and Spiridigliozzi, L., 1986, "Curved Beam Elements with Penalty Relaxation," *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 23, pp. 2245~2262.
- (13) Saleeb, A. F. and Chang, T. Y., 1987, "On the Hybrid-Mixed Formulation of C^0 Curved Beam Elements," *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 60, pp. 95~121.
- (14) Reddy, B. D. and Volpi, M. B., 1992. "Mixed Finite Element Methods for the Circular Arch Problem," *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 97, pp. 125~145.
- (15) Lee, P. G. and Sin, H. C., 1994, "Locking-free Curved Beam Element Based on Curvature," *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 37, pp. 989~1007.