

論文96-33A-5-17

복소수 입사각을 이용한 평판 광도파로 해석

(Analysis of Planar Optical Waveguides Using Incident Angle of Complex Number)

任 盈 俊 *, 金 昌 敏 *

(Young Joon Im and Chang Min Kim)

요 약

복소수 입사각 개념을 제안하고, 이를 이용하여 평판 광도파로를 해석하였다. 복소수 입사각은 prism-gap-waveguide를 modeling한 개념이다. 전달행렬 방법에 의하여 도파 해석할 때, 제안된 개념을 사용하면 leaky 구조를 도입한 Ghatak의 해석방법에 비하여 더욱 빠르고 정확하게 해를 구할 수 있음을 보였다.

Abstract

We propose the concept of incident angle of complex number and analyze planar optical waveguides by applying the concept. The incident angle of complex number is concerned with the modeling of prism-gap-waveguide structures. It is shown that, when optical waveguides are analyzed by use of the transfer matrix method, the proposed concept enables us to find solutions faster and more accurately than Ghatak's method which introduces the leaky structure.

I. 서 론

전달 행렬 방법은 유한 차분법(FDM), 유한 요소법(FEM) 등과 더불어 격자 구조, 도파로, 양자우물 등의 해석에 유용한 방법중의 하나이다. 이 방법은 격자 filter^[1], multi-layered 또는 graded-index 도파로^{[2]-[4]}, DFB LD^{[5]-[6]} 등의 해석에 사용되며, bent waveguide의 방사손실 해석^[7]에도 확장된 바 있다. 전달행렬을 구성하는 방법은 여러 가지가 있으나, ray optics approach를 포함한 대부분의 경우 layer와 layer 사이의 경계조건에 의하여 구성된다^[1]. Helmholtz 방정식을 바탕으로 도파로 해석을 하는 경우는 도파로 횡면을 회귀점을 중심으로 파가 진동함수를 갖는 영역, 지수함수를 갖는 영역으로 나눈 후 각 영역에 고유한 전달행렬을 구성하는 것도 가능하다^[2].

일반적으로 도파로 bound-mode의 고유치는 cover와 substrate의 파가 core로부터 멀어짐에 따라 지수 감쇠하는 조건으로부터 구해진다.

Ghatak은 도파로 해석의 보조 수단으로 leaky 구조를 도입하였다. 그는 leaky 구조로부터의 입사각 θ_i 의 변화에 따른 도파로 내부의 파와 입사파의 비는 Lorentzian 응답 곡선을 보이며, 곡선의 peak를 이루는 β 가 주어진 도파로의 고유치 임을 증명하였다^[4]. 그러나 이 방법은 세 가지의 단점을 안고 있다. 첫째, 도파로 해석을 위해 반드시 leaky 구조가 도입되어야 한다. 둘째, 명확한 해석 결과를 얻기 위해서는 leaky 구조와 도파로 구조사이에 적합한 gap distance에 대해서만 Lorentzian 응답곡선은 needle shape가 되며 정확한 해를 구할 수 있다. 셋째, 적합한 gap distance를 잡았다 하더라도 needle point의 정확한 지점을 구하려면 매우 많은 θ_i 또는 β_i 를 대입하여야 한다.

leaky 구조를 이용한 도파로 해석 방법은 근본 원리상 prism-gap 도파로의 coupling 현상과 동일하다. 도파로보다 크거나 같은 굴절율을 갖는 prism을 이용

* 正會員, 서울시立大學校 電子工學科

(Dept. of Elec. Eng., Seoul City Univ.)

接受日字: 1995年11月22日, 수정완료일: 1996年4月24日

하면 clad 영역으로부터 도파로 영역에 도파 모드를 excite 시키는 것이 가능하다.

본 논문에서는 prism-gap의 구조와 등가한 복소수 입사각을 제안함으로써 전달행렬에 의한 평판 도파로 해석을 용이하게 하고 있다. 복소수를 갖는 입사각 개념을 도입하여 칩재, 주어진 도파로에 leaky 구조를 도입해야 하는 번거러움을 없앤다. 따라서 prism-gap W/G 구조에서 해가 가능한 gap distance를 찾는 과정이 필요 없게 된다. 두 번째, 얻어진 Lorentzian 응답곡선으로부터 해를 구하는 graphical한 방법과는 달리 이분법(bisection method)을 사용하여 해를 더욱 빠르고 정확하게 구할 수 있다.

II. 전달 행렬의 구성

그림 1과 같이 여러 층으로 구성되어진 평판에 θ_1 의 각도로 입사하는 평면파에 대하여, 각 층에서의 전계는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

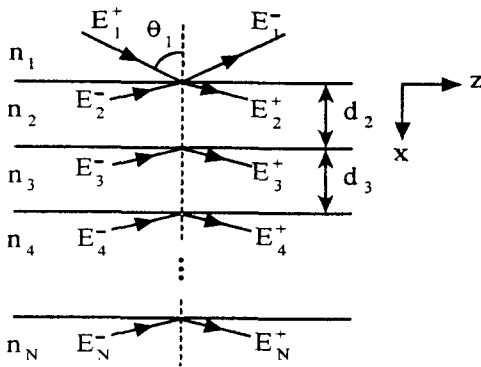


그림 1. 각 θ_1 으로 입사한 평면파
Fig. 1. The plane wave with an incident angle θ_1 .

$$E_i = \hat{e}_i^+ E_i^+ e^{j\Delta_i} \exp[-j(k_i \cos \theta_i x + \beta z)] + \hat{e}_i^- E_i^- e^{-j\Delta_i} \exp[j(k_i \cos \theta_i x - \beta z)] \quad (1)$$

여기서,

$$k_i = \frac{2\pi}{\lambda_0} n_i \quad (2a)$$

$$\beta = k_1 \sin \theta_1 = k_2 \sin \theta_2 = \dots = k_N \sin \theta_N \quad (2b)$$

$$\Delta_1 = \Delta_2 = 0, \quad (2c)$$

$$\Delta_i = k_i \cos \theta_i \sum_{k=2}^{i-1} d_k \quad (i \geq 3)$$

그리고 n_i 는 각 층의 굴절율이며, θ_i 는 진행 방향의 각도를 나타낸다. 또한, \hat{e}_i^+ 와 \hat{e}_i^- 는 전계 진행 방향의 단위 벡터이며, E_i^+ 와 E_i^- 는 각 방향에 대한 전계의 크기를 나타낸다.

각 층에서의 경계 조건을 적용하여, 입사 전계, 반사 전계, 투과 전계의 관계를 다음과 같은 행렬로 나타낼 수 있다^[11].

$$\begin{pmatrix} E_1^+ \\ E_1^- \end{pmatrix} = S_1 S_2 \dots S_{N-1} \begin{pmatrix} E_N^- \\ E_N^+ \end{pmatrix} \quad (3)$$

여기서,

$$S_i = \frac{1}{t_i} \begin{pmatrix} e^{j\delta_i} & r_i e^{j\delta_i} \\ r_i e^{-j\delta_i} & e^{-j\delta_i} \end{pmatrix} \quad (4a)$$

$$\delta_i = 0,$$

$$\delta_i = k_i d_i \cos \theta_i, \quad i = 2, 3, \dots, N-1 \quad (4b)$$

이며, TE mode의 경우에

$$t_i = \frac{2n_i \cos \theta_i}{n_i \cos \theta_i + n_{i+1} \cos \theta_{i+1}} \quad (5)$$

$$r_i = \frac{n_i \cos \theta_i - n_{i+1} \cos \theta_{i+1}}{n_i \cos \theta_i + n_{i+1} \cos \theta_{i+1}}$$

TM mode의 경우에는

$$t_i = \frac{2n_i \cos \theta_i}{n_i \cos \theta_i + n_{i+1} \cos \theta_{i+1}} \quad (6)$$

$$r_i = \frac{n_{i+1} \cos \theta_i - n_i \cos \theta_{i+1}}{n_{i+1} \cos \theta_i + n_i \cos \theta_{i+1}}$$

이다.

III. Ghatak 도파 해석의 평가

그림 2에는 영역 1, 2, 3으로 구성된 도파로가 있다. Ghatak은 도파로를 해석하기 위하여 영역 p로 표기된 leaky 구조를 도입하였다. 영역 p의 굴절율은 편의상 영역 2와 같게 놓았다.

그림 2와 같은 leaky 구조는 기본 모드만이 존재하는 것이 아니고, $n_1 < \beta/k_0 < n_2$ 를 만족하는 모든 β 가 허용되어지며, 이는 연속적인 방사 모드를 형성한다. 따라서, 전계 분포는 다음과 같이 구성되어진다.

$$\psi(x, z) = \int \phi(\beta) \phi_\beta(x) e^{-\beta z} d\beta \quad (7)$$

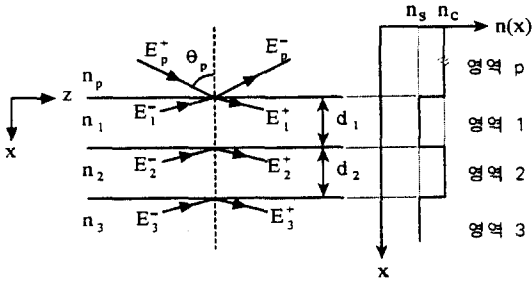


그림 2. 해석대상 도파로
(영역 p : leaky층, 영역 1, 3 : clad, 영역 2 : 도파로)

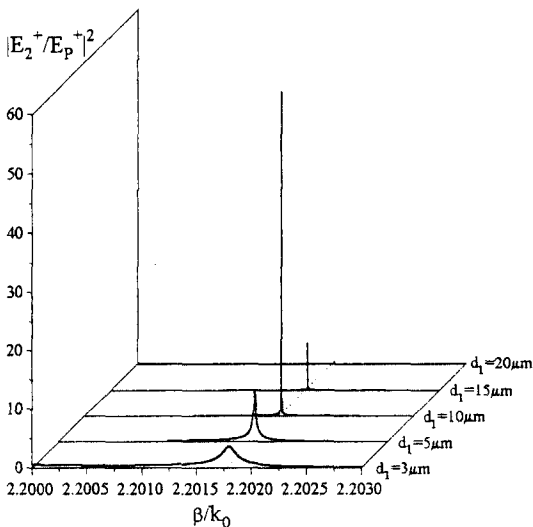
Fig. 2. A given waveguide structure.
(region p : leaky layer, region 1, 3 : clad, region 2 : waveguide)

즉, 전계 분포는 연속적인 방사 모드들의 중첩으로 구성되어 진다.

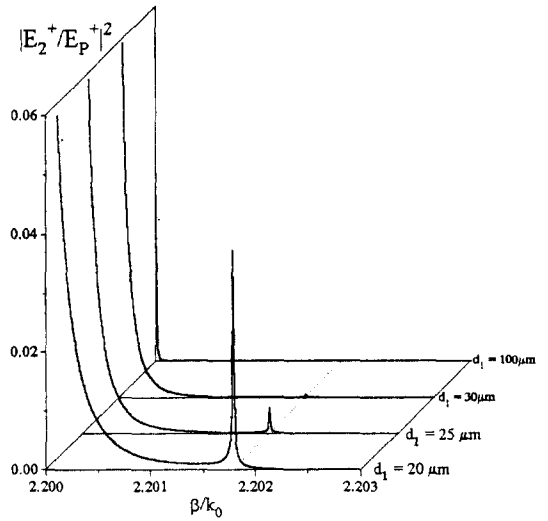
Ghatak에 의하면 $|\phi(\beta)|^2$ 는 다음과 같이 Lorentzian 응답곡선을 갖는다^[4].

$$\left| \frac{E_2^+}{E_p^+} \right|^2 \propto |\phi(\beta)|^2 = \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma}{(\beta - \beta_q)^2 + \Gamma^2} \quad (8)$$

식 (8)의 β_q 는 quasi-모드의 전파 상수이며, Γ 는 leakage loss와 관련된 상수를 나타낸다. leaky 구조 내의 θ_p 의 변화는 $\beta/k_0 = n_p \sin \theta_p$ 로부터 곧 β 의 변화이다. 식 (8)의 Lorentzian 곡선이 peak를 이룰 때 β_q 는 도파 모드의 β_g 가 된다.



(a)



(b)

그림 3. 그림 2에서 d_1 에 따른 $|E_2^+/E_p^+|^2$ 의 변화
($n_1=2.20, n_2=2.203, d_2=5 \mu\text{m}, \lambda_0=1.3 \mu\text{m}$)

Fig. 3. The variation of $|E_2^+/E_p^+|^2$ as a function of d_1 in Fig. 2.

($n_1=2.20, n_2=2.203, d_2=5 \mu\text{m}, \lambda_0=1.3 \mu\text{m}$)

그림 2의 영역 3에는 되돌아오는 파가 없으므로 $E_3^- = 0$ 이다. 식 (3)에 $(E_3^+, E_3^-) = (1, 0)$ 을 대입하고 θ_p 를 변화시키면 결국 θ_p 에 관한 $|E_2^+/E_p^+|^2$ 함수를 얻는다. 이때 E_2^- 의 위치는 도파로 경계를 포함, 도파로 내의 어느 곳이든 무방하다.

그림 3은 gap distance d_1 의 변화에 따른 $|E_2^+/E_p^+|^2$ 곡선의 변화를 모의 전산을 통하여 보여 주고 있다. 모의전산은 TE모드에 대하여 행하여 졌으며 E_2^- 의 위치는 그림 2와 같이 잡았다. d_1 의 변화에 따른 Lorentzian 곡선의 변화는 다음과 같다.

i) d_1 이 작을 때는 반치폭(FWHM)이 크고 도파 모드의 $\beta(\beta_g)$ 를 얻을 수 없다. ii) d_1 이 서서히 증가함에 따라 반치폭이 좁아지며 quasi-모드의 β_q 는 β_g 로 접근하고 있다. 이는 도파로 밖으로 새어나가는 손실이 줄어들음을 의미한다^[4]. iii) 적당한 d_1 에 대하여 결국 Lorentzian 곡선은 needle 형태가 되어지며 peak를 이루는 지점, 즉 β_g 를 구할 수 있다. iv) d_1 을 적당치 이상으로 늘리면 needle 형태의 크기는 서서히 작아져 결국 β_g 를 얻을 수 없게 된다. 이는 그림 2의 영역 p에서 영역 2로의 coupling이 점차 적어짐을 의미한다.

v) d_1 을 지나치게 크게 하면 그림 3(b)에서 처럼 β/k_0 가 작은 곳에서 $|E_2^+/E_p|^2$ 의 값이 오히려 dominant해진다. 이는 leaky 구조에서 허용되는 고유치중 β 가 작은 경우의 전계분포는 x축을 따라 퍼지는 형태를 가지기 때문에 영역 p에서 영역 2로 coupling이 잘 일어나기 때문이다.

이상과 같은 Ghatak 방법에 의하면, $|E_2^+/E_p|^2$ 합수가 impulse에 가까운 곡선을 보일 때만 β_g 의 검출이 가능하다. 이는 gap distance가 적정치인 경우에 한하며 이것이 Ghatak 방법의 단점이다. 또한 이러한 θ_p 또는 β/k_0 를 얻기 위해서는 graph에 의존해야만 하는 것도 이 방법의 또 다른 문제점이다.

IV. 복소수 입사각을 이용한 해석

그림 2의 영역 p를 prism으로 가정하고, prism 아래에 분포되는 감쇠 전계는 다음의 phase matching 조건에 대하여 도파로 안으로 침투하게 된다.

$$\beta = k_0 n_p \sin \theta_p = k_0 n_2 \sin \theta_2 \quad (n_p \geq n_2) \quad (9)$$

적당한 θ_p 에 대하여 입사파와 도파 모드는 z축에 대하여 synchronous ($\beta_p = \beta_2$)하게 되며, 이것이 prism을 통하여 도파로 내부에 도파모드를 여기시킬 수 있는 원리이다.

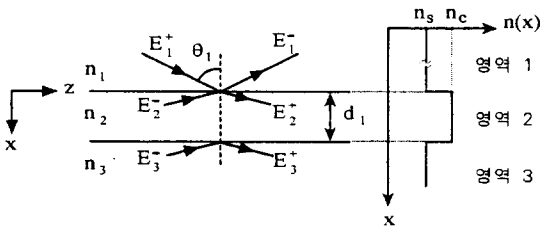


그림 4. 복소수 입사각 θ_1 으로 입사한 평면파
Fig. 4. The plane wave with an incident angle of complex number θ_1 .

그림 4에서 영역 1, 2의 임계각을 $\theta_c (= \sin^{-1}(n_1/n_2))$ 라고 놓고, Snell의 법칙을 영역 1, 2에 대해서 적용시키면,

$$\theta_1 = \sin^{-1}(\sin \theta_2 / \sin \theta_c) \quad (10)$$

Prism을 통하여 입사된 도파모드에 대하여 $\theta_2 > \theta_c$ 이고, 따라서 $\sin \theta_2 / \sin \theta_c > 1$ 이므로, θ_1 은 식

(11)의 복소수 형태를 갖는다. 따라서 prism coupling 현상은 원리적으로 그림 4의 평판 도파파로에 식 (11)의 복소수 입사각으로 광을 입사키는 것과 증가하다.

$$\theta_1 = \frac{\pi}{2} + j\theta_{im}, \quad (\theta_{im} > 0) \quad (11)$$

식 (11)의 가정은 prism-gap-W/G coupling 현상을 적절하게 modeling한 것이다. 식 (1)의 wave vector에 식 (11)을 대입하면

$$(\pm k_i \cos \theta_i, \beta) \rightarrow (\mp j\alpha_i, \beta), \quad (\alpha_i > 0, i=1,3) \quad (12)$$

식 (12)의 형태로 변환된다. 식 (12)의 upper sign은 E_j^- term에 해당되며, $-j\alpha$ 항은 positive x축을 따라 파가 지수적으로 감쇠함을 의미한다. lower sign은 E_j^+ term에 해당되며, $+j\alpha$ 항은 positive x축을 따라 파가 지수적으로 증가함을 의미한다.

E_1^+, E_3^- 는 영역 2를 기준으로 볼 때 도파로 밖으로 발산하는 함수 항이므로, 도파모드를 구하기 위해서는 0이 되어야 한다. 따라서 $(E_3^+, E_3^-) = (1, 0)$ 로 놓고 $(E_1^-, E_1^-) = (0, 1)$ 을 만족시키는 θ_{im} 을 찾게 된다. TE 모드에 대하여, 이 과정을 도식화한 것이 그림 5이다.

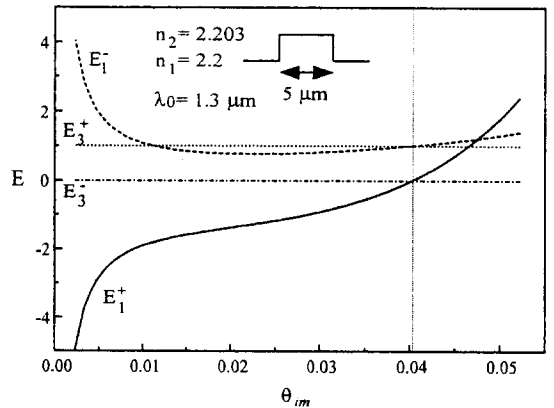
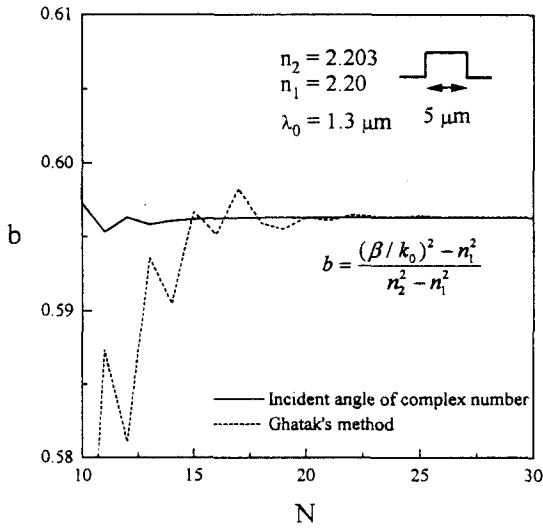
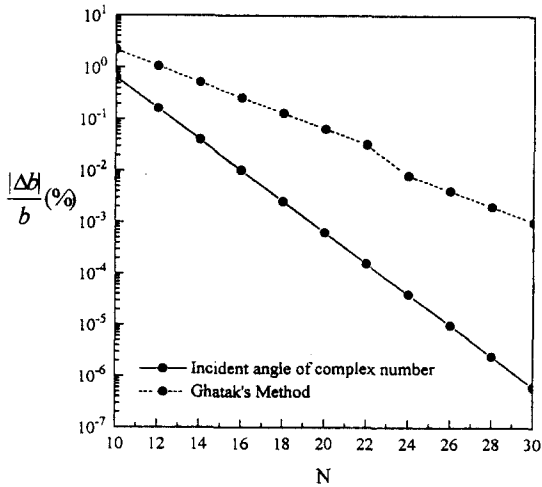


그림 5. θ_{im} 에 따른 $E_1^+, E_1^-, E_3^+, E_3^-$ 의 변화
Fig. 5. $E_1^+, E_1^-, E_3^+, E_3^-$ vs. θ_{im} .

복소수 입사각 방법은 전달행렬로 표현된 고유방정식으로부터 $E_1^+=0$ 이 되는 θ_{im} 을 찾아가는 과정이므로, 이분법을 사용하여 빠르고 정확한 해를 구하는 것이 가능하다. $n_1 < \beta/k_0 < n_2$ 가 만족되는 범위 내에서 θ_p 또는 θ_{im} 은 이분법의 iteration 과정을 N번 거치며 반복 대입된다.



(a)



(b)

그림 6. (a) 대입 횟수 N에 따른 b 값의 수렴 정도
(b) 대입 횟수 N에 따른 b의 오차
Fig. 6. (a) The convergence of b vs. N (b) The error of b vs. N.

한편, Ghatak의 방법에서는 그림 3(a), 또는 식 (8)에서 보여지듯이, 적합한 gap distance에 대하여 Lorentzian곡선은 needle 형태가 되며 peak point를 중심으로 거의 대칭을 이룬다. 응답곡선의 peak point를 찾기 위해서는 효율적인 알고리즘을 통하여 β 를 $n_1 < \beta/k_0 < n_2$ 의 범위 안에서 반복 대입할 필요가 있다. 본 연구에서는 (i) Δx 를 간격으로 하는 세 점 $x - \Delta x$,

x , $x + \Delta x$ 를 잡은 후 각 점에서의 함수치를 계산한 후 비교한다. (ii) 이중에서 최대치를 갖는 점을 새로운 x 로 놓고 $\Delta x/2$ 를 간격으로 하는 점을 좌우로 잡은 후 계산, 비교한다. (iii) 이후 $|\Delta x/x|$ 가 원하는 오차 내에 들어 올 때까지 과정 (ii)를 반복한다.

어느 방법에서도 한번 대입할 때의 계산량은 식 (3)에 의하므로 거의 동일하다. 따라서 해를 찾기 위해 대입한 θ_{im} 혹은 β 의 개수를 N이라 할 때 대입 횟수 N의 크기는 얼마나 빨리 정확하게 해로 수렴할 수 있는지의 척도가 된다.

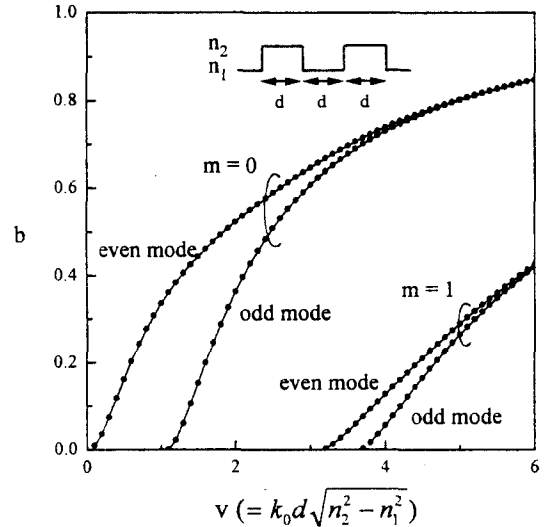


그림 7. 방향성 결합기의 b-v 곡선(TE 모드)

— : 복소수 입사각 방법
..... : FDM

Fig. 7. b-v curve for directional coupler (TE mode).

— : Incident angle of complex number
..... : FDM

그림 6(a)는 대입 횟수 N에 따른 해의 수렴성을 보이고 있다. 그림 6(b)는 N의 증가에 따른 b값의 오차의 변화를 보이고 있다. 두 그림을 통하여, 복소수 입사각을 이용한 방법이 Ghatak의 방법에 비하여 더욱 빠르고 정확하게 해에 수렴해가며, 동일한 N에 대하여 훨씬 작은 오차를 보이고 있음을 알 수 있다. 근본적으로 복소수 입사각 방법은 전달행렬 형태의 고유방정식으로부터 해를 찾는 과정이므로 이분법의 적용이 가능하며, leaky구조를 도입한 방법은 Lorentzian 곡선의 peak point를 세 점 대입을 통하여 찾는 과정이므로

더욱 많은 계산량이 요구되는 것이다.

그림 7은 계단형 분포 방향성 결합기에 대하여 복소수 입사각 방법에 의한 $b-v$ 곡선을 보여 주고 있다. 각 그림의 결과는 유한차분법(FDM)에 의한 결과들과 비교되었으며, 정확히 일치함을 알 수 있다.

V. 결 론

기존의 전달 행렬에 복소수 입사각을 이용하는 광도파로 해석을 제안하였으며, 복소수 입사각은 prism gap W/G 도파 과정을 modeling한 것이다. Leaky 구조를 이용한 Ghatak의 도파 해석방법을 살펴보고, 이 방법이 안고 있는 몇 가지 문제점을 지적하였다.

제안된 방법에 의한 해석 과정을 Ghatak의 해석 과정과 비교하였으며, 복소수 입사각을 이용한 해석은 더욱 빠르고 정확하게 해로 수렴하고 있음을 보였다.

참 고 문 헌

- [1] A. K. Ghatak and K. Thyagarajan, *Optical Electronics*. Cambridge, 1993.
- [2] M. O. Vassel, "Structure of optical guided modes in planar multilayers of optically anisotropic materials", *J. Opt. Soc. Am.*, vol. 64, pp. 166-173, 1974.
- [3] L. M. Walpita, "Solution for planar optical waveguide equations by selecting zero elements in a characteristic matrix," *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 2, pp. 595-602, 1985.
- [4] A. K. Ghatak, K. Thyagarajan, and M. R. Shenoy, "Numerical analysis of planar optical waveguides using matrix approach," *J. Lightwave Technol.*, vol. LT-5, no. 5, pp. 660-667, May 1987.
- [5] G. Björk and O. Nilsson, "A new exact and efficient numerical matrix theory of complicated laser structures: properties of asymmetric phase-shifted DFB lasers," *J. Lightwave Technol.*, vol. LT-5, no. 1, pp. 140-146, Jan. 1987.
- [6] T. Makino, "Transfer-matrix formulation of spontaneous emission of DFB semiconductor lasers," *J. Lightwave Technol.*, vol. 9, no. 1, pp. 84-91, Jan. 1991.
- [7] K. Thyagarajan et al. "Accurate numerical method for the calculation of bending loss in optical waveguides using a matrix approach," *Optics Letters*. vol. 12, p. 296, Mar. 1989.

저 자 소 개



任盈俊(正會員)

1971년 3월 25일생. 1995년 2월 서울시립대학교 전자공학과 공학사. 1995년 3월 ~ 현재 동대학원 전자공학과 석사과정 재학중. 주관심분야는 도파/집적광학, FDM, FEM, BPM 등 수치

해석

金昌敏(正會員) 第33卷 A編 2號 參照

1950년 4월 10일생. 1975년 2월 서울대학교 전자공학과 공학사. 1982년 2월 동 대학원 전자공학과 공학석사. 1989년 8월 U. of Florida Dept. of EE 공학박사. 1983년 5월 ~ 현재 서울시립대학교 전자공학과/반도체공학과 부교수. 주관심분야는 도파/집적광학, 진행파진극/고속광변조기, 저분산 광섬유, 광통신 시스템, FDM, FEM, BPM, SOR 등 수치해석