

論文96-33A-11-14

다중 언덕형 광도파로/양자우물의 WKB 고유방정식

(WKB Eigenvalue Equations for Multiple Graded-Index Waveguides/Quantum-Wells)

金昌敏*, 任盈俊*

(Chang Min Kim and Young Joon Im)

요 약

회귀점에서 field해가 발산하던 기존의 WKB 파동함수를 보정하여, 회귀점에서도 수렴하는 새로운 해의 형태를 제안하였다. 언덕형 분포를 갖는 다중 광도파로, 또는 양자우물의 고유방정식을 WKB이론에 의해서 구성되어진 전달행렬로부터 유도하였으며, 유도된 고유방정식은 점화형태로 이루어져 있다. 타당성 검증을 위하여 언덕형 굴절율 분포를 갖는 세 쌍둥이 도파로에 대해서 유한차분법(FDM)의 결과와 비교하였다.

Abstract

In the WKB analysis, we propose the new forms of the trial eigenfunctions which not only converge at the turning points but also approximate to the conventional WKB solutions away from the turning points. The eigenvalue equations of multiple waveguides with graded index profile are derived by using the proposed WKB analysis and the transfer matrix method. The derived equations are represented in the recursive form. The results of the eigenvalue equations are compared with those of the FDM, one of the well-known computational methods, for a three-waveguide coupler.

I. 서 론

광도파로의 도파모드 해석 방법 중의 하나로는 수학적 해석 방법으로 잘 알려진 WKB이론이 있다^{[1]-[9]}. WKB이론은 파장에 비하여 도파로의 횡면 치수가 클수록 비교적 정확한 해를 제공하며, 따라서 strongly-guiding 도파로나 다중모드 도파로에 적절하게 이용될 수 있다. 하지만 WKB이론은 저차모드 특히, 기본모드의 차단영역 근처에서는 많은 오차를 가진다. 이런 점에서 WKB이론은 단일모드 도파로의 정확한 설계가 요구되어질 경우에는 다소 제한적이다. 그럼에도 불구하고, 고유방정식이 간단한 형태를 가지며, 그 적용이 쉽기 때문에 많은 사람들의 관심을 끌어들였다.

많은 사람들은 WKB이론을 사용하여 광도파로와 방

향성 결합기를 해석해왔다^{[11]-[13]}. 그들 중에서 J. Ctyroky는 Ti:LiNbO₃ 채널 광도파로와 방향성 결합기를 유효굴절율방법과 WKB이론을 결합하여 해석하였고^[11], T. Suhara는 회귀점 부근에서 Bessel 함수를 도입하여 대칭적인 방향성 결합기에 대한 고유방정식을 유도하였으며^[12], C. M. Kim은 임의의 형태를 가지는 방향성 결합기에 대한 고유 방정식을 유도하여, FDM의 결과와 비교하였다^[13].

WKB이론에 의한 Field해는 회귀점 근처에서는 발산하기 때문에, 회귀점 근처에서는 굴절율 분포의 선형화로부터 Field 해는 Airy함수로 표현된다. Airy 함수를 이용하여 회귀점 양쪽 영역에 점근해의 연결공식이 구성된다^{[13], [15]-[17]}.

본고에서는, 회귀점에서 수렴할 뿐 아니라 회귀점에서 벗어난 영역에서도 기존의 점근해로 나타내어지는 WKB의 새로운 형태의 시도해를 제안하였다. 시도해를 이용하여 N 도파로 열을 갖는 결합기의 해석을 시

* 正會員, 서울시立大學校 電子工學科
(Dept. of Elec. Eng., Seoul City Univ.)

接受日字:1996年9月10日, 수정완료일:1996年10月29日

도하였다. 제안되는 시도에는 두 이웃 영역의 해를 쉽게 구할 수 있게 하며, 두 이웃 영역간의 계수를 행렬 형태로 표현 가능케 한다. 지역 행렬을 합성하여 전체 행렬을 구한 후, 무한대에서의 경계조건을 이용하여 고유방정식을 유도할 수 있다.

언덕형 분포를 갖는 다중 광도파로/양자우물의 고유방정식을 WKB 이론에 의하여 세계 최초로 유도하였으며, 고유 방정식은 점화식의 형태를 갖고 있다. 세 쌍둥이 도파로 결합기를 예로 들어, TE 모드에 대하여 WKB 고유 방정식의 결과를 계산하였으며, 정확한 수치해석 기법 중의 하나인 유한차분법(FDM: Finite-Difference Method)의 결과와 비교 검토하여 보았다.

II. 파동방정식과 기존 WKB 해

광도파로를 따라 전파하는 광도파로의 Helmholtz파동 방정식은 정규화 주파수 ν 와 정규화 전파상수 b , 그리고 정규화 변수 x 를 사용하여 표기하면 다음과 같다 [3].

$$\frac{d^2}{dx^2} E(x) + \nu^2 [f(x) - b] E(x) = 0 \tag{1}$$

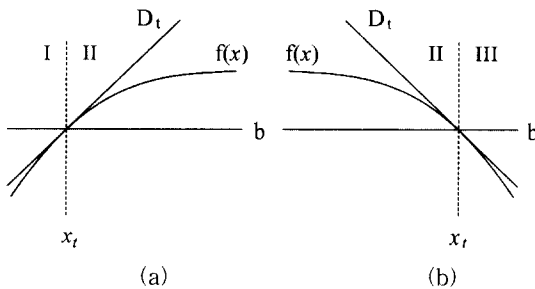


그림 1. 임의의 굴절율 분포 $f(x)$
 (a) $D_t > 0$ 인 경우 (b) $D_t < 0$ 인 경우
 b : 고유치, x_t : 회귀점
 D_t : 회귀점에서의 기울기

Fig. 1. Arbitrary refractive index profile $f(x)$.
 (a) for $D_t > 0$ (b) for $D_t < 0$
 b : eigenvalue, x_t : turning point
 D_t : gradient at turning point

그림 1에서 x_t 는 회귀점을 나타내며, 영역 I, III에서 $E(x)$ 는 지수함수의 형태를 가지고, 영역 II에서 $E(x)$ 는 진동함수의 형태를 갖는다. 구간에 따른 $E(x)$ 는 그림 1(a)의 경우, field point가 회귀점으로부터 충분히 떨어져 있을 때 WKB이론에 의하여 근사적으로 다음과

같이 기술된다^{[5]-[7]}.

$$E_I(x) \approx \frac{C_1}{\sqrt{P(x)}} \exp\left(-\int_x^{x_t} P(x) dx\right), \quad x < x_t \tag{2a}$$

$$E_{II}(x) \approx \frac{C_2}{\sqrt{Q(x)}} \exp\left(j \int_x^{x_t} Q(x) dx\right), \quad x > x_t \tag{2b}$$

여기서,

$$P(x) = \nu \sqrt{b - f(x)}, \quad b \geq f(x) \tag{3a}$$

$$Q(x) = \nu \sqrt{f(x) - b}, \quad b \leq f(x) \tag{3b}$$

회귀점 x_t 에서 $P(x_t)=Q(x_t)=0$ 이므로 식 (2)는 발산한다. 이러한 이유로 WKB근사해는 회귀점 근방에서 보정되어야 하며, 이는 회귀점 근처에서 $f(x)$ 를 선형화 시킴으로써 해결 가능하다. $f(x)$ 를 회귀점 x_t 근처에서 다음과 같이 표현하기로 한다.

$$f(x) \approx b + \frac{1}{\nu^2} D_t (x - x_t) \tag{4}$$

D_t 는 회귀점에서의 기울기이며, 다음의 변수를 도입하기로 한다.

$$u = -D_t^{1/3} (x - x_t), \quad du = -D_t^{1/3} dx \tag{5}$$

식 (4), (5)를 이용하면 식 (1)의 파동방정식은 다음의 Airy 방정식으로 변형된다.

$$\frac{d^2}{du^2} E(u) - uE(u) = 0 \tag{6}$$

1. 회귀점 영역에서 파동방정식의 해
 식 (6)의 해는 독립된 두개의 Airy 함수 $Ai(u)$, $Bi(u)$ 이다^{[5]-[7]}.

$$Ai(u) = |D_t|^{-1/6} \begin{cases} \frac{\sqrt{|u|}}{3} \left[J_{-1/3} \left(\frac{2}{3} |u|^{3/2} \right) + J_{1/3} \left(\frac{2}{3} |u|^{3/2} \right) \right], & u < 0 \\ \frac{\sqrt{|u|}}{3} \left[J_{-1/3} \left(\frac{2}{3} u^{3/2} \right) - I_{1/3} \left(\frac{2}{3} u^{3/2} \right) \right], & u > 0 \end{cases} \tag{7}$$

$$Bi(u) = |D_t|^{-1/6} \begin{cases} \frac{\sqrt{|u|}}{3} \left[J_{-1/3} \left(\frac{2}{3} |u|^{3/2} \right) - J_{1/3} \left(\frac{2}{3} |u|^{3/2} \right) \right], & u < 0 \\ \frac{\sqrt{|u|}}{3} \left[J_{-1/3} \left(\frac{2}{3} u^{3/2} \right) + I_{1/3} \left(\frac{2}{3} u^{3/2} \right) \right], & u > 0 \end{cases} \tag{8}$$

여기서,

$$Ai(0) = 3^{-2/3} / \Gamma(2/3) \approx 0.355, \quad Bi(0) = \sqrt{3} Ai(0) \tag{9}$$

식 (7), (8)은 그림 1의 회귀점 x_t ($u=0$) 근방에서 선형화된 굴절율분포에 관한 해이다. u 가 0으로부터 벗

어나 있을 때 식 (7), (8)의 점근식은 부록 A와 같다.

2. 회귀점을 벗어난 영역에서 파동방정식의 해 식 (3)의 위상함수 $P(x)$, $Q(x)$ 그리고 이들의 적분 결과는 u 의 함수로 표현 가능하다 [부록 B]. 이들의 결과식을 부록 A의 Airy 함수 점근식에 적용시키면 다음의 WKB 해 및 연결공식을 얻는다^[31, 151-171].

1) $D_t > 0$ 인 경우, 회귀점 x_t 를 중심으로

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi P(x)}} \exp\left(-\int_{x_t}^x P(x) dx\right) \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{\pi Q(x)}} \sin\left(\int_{x_t}^x Q(x) dx + \frac{\pi}{4}\right) \quad (10)$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi P(x)}} \exp\left(\int_{x_t}^x P(x) dx\right) \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{\pi Q(x)}} \cos\left(\int_{x_t}^x Q(x) dx + \frac{\pi}{4}\right) \quad (11)$$

2) $D_t < 0$ 인 경우, 회귀점 x_t 를 중심으로

$$\frac{1}{\sqrt{\pi Q(x)}} \sin\left(\int_{x_t}^x Q(x) dx + \frac{\pi}{4}\right) \leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{\pi P(x)}} \exp\left(-\int_{x_t}^x P(x) dx\right) \quad (12)$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi Q(x)}} \cos\left(\int_{x_t}^x Q(x) dx + \frac{\pi}{4}\right) \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{\pi P(x)}} \exp\left(\int_{x_t}^x P(x) dx\right) \quad (13)$$

III. WKBI론의 새로운 일반해

다음과 같은 함수를 정의하기로 한다.

$$A(\xi) \triangleq \left[\frac{\xi_i(u)}{6Q(u)} \right]^{1/2} [J_{-1/3}(\xi_i(u)) + J_{1/3}(\xi_i(u))], \quad u < 0 \quad (14)$$

$$A(\eta) \triangleq \left[\frac{\eta_i(u)}{6P(u)} \right]^{1/2} [I_{-1/3}(\eta_i(u)) - I_{1/3}(\eta_i(u))], \quad u > 0 \quad (15)$$

그리고,

$$B(\xi) \triangleq \left[\frac{\xi_i(u)}{2Q(u)} \right]^{1/2} [J_{-1/3}(\xi_i(u)) - J_{1/3}(\xi_i(u))], \quad u < 0 \quad (16)$$

$$B(\eta) \triangleq \left[\frac{\eta_i(u)}{2P(u)} \right]^{1/2} [I_{-1/3}(\eta_i(u)) + I_{1/3}(\eta_i(u))], \quad u > 0 \quad (17)$$

여기서,

$$\xi_i(u) = \int_{x_t}^x Q(x) dx, \quad \eta_i(u) = \int_{x_t}^x P(x) dx \quad (D_t > 0) \quad (18)$$

$$\xi_i(u) = \int_x^{x_t} Q(x) dx, \quad \eta_i(u) = \int_x^{x_t} P(x) dx \quad (D_t < 0) \quad (19)$$

새로 정의된 $A(\xi)$, $A(\eta)$, $B(\xi)$, $B(\eta)$ 는 회귀점을 포함한 모든 영역에서 파동방정식의 WKB 해가 된다. $u < 0$ 인 영역에서는 진동함수의 해를 가지며, $u > 0$

인 영역에서는 지수함수 형태의 해를 갖는다.

1. 회귀점 영역에서의 근사식

회귀점 영역에서 $\xi(u)$, $\eta(u)$ 는 식 (4)의 선형화에 의하여 부록 B로부터 다음과 같다.

$$\xi_i(u) = \frac{2}{3} |u|^{3/2}, \quad \eta_i(u) = \frac{2}{3} u^{3/2}$$

식 (14)~(17)에 부록 B의 내용을 적용시키면 그 결과는 식 (7), (8)의 Airy 함수 형태가 된다. 이는 선형화된 회귀점 영역에서의 해이며 식(6)의 해가 된다.

$$A(\xi_i(u)) = Ai(u), \quad u \leq 0 \quad (20)$$

$$A(\eta_i(u)) = Ai(u), \quad u \geq 0 \quad (21)$$

그리고,

$$B(\xi_i(u)) = Bi(u), \quad u \leq 0 \quad (22)$$

$$B(\eta_i(u)) = Bi(u), \quad u \geq 0 \quad (23)$$

본고에서 제안하고자 하는 WKB의 새로운 일반해 식 (14)~(17)은 회귀점에서도 연속성을 갖는 해 즉, Airy 함수가 됨을 확인하였다.

2. 회귀점에서 떨어진 영역에서의 근사식

회귀점에서 떨어진 영역에서 식 (14)~(17)은 부록 C의 점근식을 사용하면 다음으로 표현된다.

$$A(\xi_i(u)) \simeq \frac{1}{\sqrt{\pi Q(u)}} \sin\left(\xi_i(u) + \frac{\pi}{4}\right), \quad u < 0 \quad (24)$$

$$A(\eta_i(u)) \simeq \frac{1}{2\sqrt{\pi P(u)}} \exp(-\eta_i(u)), \quad u > 0 \quad (25)$$

그리고,

$$B(\xi_i(u)) \simeq \frac{1}{\sqrt{\pi Q(u)}} \cos\left(\xi_i(u) + \frac{\pi}{4}\right), \quad u < 0 \quad (26)$$

$$B(\eta_i(u)) \simeq \frac{1}{\sqrt{\pi P(u)}} \exp(\eta_i(u)), \quad u > 0 \quad (27)$$

식 (24)~(27)은 식 (2)의 형태를 가지며, 연결공식을 만족시키는 WKB 해이다. 이로써 식 (14)~(17)은 회귀점을 포함한 모든 영역에서 유효한 WKB 해가 됨을 확인하였다.

IV. 다중 광도파로/양자우물의 고유방정식

일반적인 광도파로의 굴절율분포는 다음과 같다.

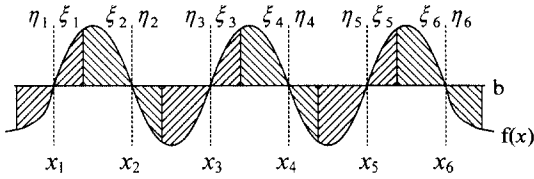


그림 2. 여섯 개의 회귀점을 갖는 다중 광도파로
 η_i, ξ_i : 각 빗금친 부분의 적분값
 Fig. 2. Multiple waveguides with six turning points.
 η_i, ξ_i : Integrals of each shaded area

그림 2에 대해서 식 (14)~(17)에 주어진 새로운 형태의 WKB 해와 식 (24)~(27)의 연결공식을 사용하여 각 영역에서의 파동함수를 표현하면 다음과 같다.

$$aA(\eta_1), \quad x \leq x_1 \quad (28a)$$

$$aA(\xi_1), \quad x_1 \leq x \quad (28b)$$

$$a \sin q_1 A(\xi_2) + a \cos q_1 B(\xi_2), \quad x \leq x_2 \quad (28c)$$

$$a \sin q_1 A(\eta_2) + a \cos q_1 B(\eta_2), \quad x_2 \leq x \quad (28d)$$

$$a_1 A(\eta_3) + a_2 B(\eta_3), \quad x \leq x_3 \quad (28e)$$

$$a_1 A(\xi_3) + a_2 B(\xi_3), \quad x_3 \leq x \quad (28f)$$

$$(a_1 \sin q_3 + a_2 \cos q_3)A(\xi_4) + (a_1 \cos q_3 - a_2 \sin q_3)B(\xi_4), \quad x \leq x_4 \quad (28g)$$

$$(a_1 \sin q_3 + a_2 \cos q_3)A(\eta_4) + (a_1 \cos q_3 - a_2 \sin q_3)B(\eta_4), \quad x_4 \leq x \quad (28h)$$

여기서,

$$a_1 = 2a \cos q_1 \exp(p_2), \quad a_2 = \frac{a}{2} \sin q_1 \exp(-p_2) \quad (29)$$

그리고

$$q_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} Q(x) dx = \xi_i + \xi_{i+1} \quad (i=1, 3, 5) \quad (30)$$

$$p_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} P(x) dx = \eta_i + \eta_{i+1} \quad (i=2, 4) \quad (31)$$

식 (28b)→(28c), 식 (28d)→(28e), 식 (28f)→(28g)의 변환은 연결공식에 의한다.

1. 단일 광도파로/양자우물의 경우 (x_1, x_2 만 존재)
 식 (28d)을 점근형태로 바꾸면 다음과 같다.

$$\frac{1}{2} a \sin q_1 (\pi P)^{-1/2} \exp(-\eta_2) + a \cos q_1 (\pi P)^{-1/2} \exp(\eta_2) \quad (32)$$

$x_2 < x$ 에서는 지수적으로 감소해야만 하므로 $\cos q_1 = 0$ 이 되어야 한다. 이를 다른 형태로 표기하면 다음과 같은 고유방정식을 얻는다.

$$\int_{x_1}^{x_2} Q(x) dx = (m + \frac{1}{2})\pi \quad (33)$$

2. 방향성 결합기의 경우 (x_1, x_2, x_3, x_4 가 존재)
 $x_4 < x$ 에서 파동함수가 지수적으로 감소하기 위해서는 식 (28h)에서 $(a_1 \cos q_3 - a_2 \sin q_3) = 0$ 이 되어야만 한다. 이는 곧 다음과 같이 표현된다.

$$\tan q_1 \tan q_3 = 4 \exp(2p_2) \quad (34)$$

식 (34)의 결과는 [3]의 결과와 일치한다.

V. 반복적인 광도파로/양자우물의 고유방정식

1. Transfer Matrix의 유도

광도파로/양자우물이 다수의 형태로 있을 때 고유방정식의 일반형태를 도출하고자 한다.

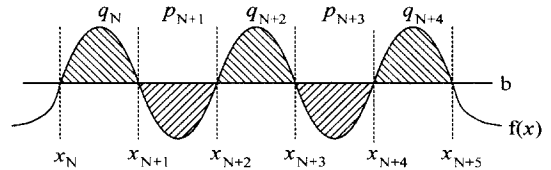


그림 3. 반복적인 다중 광도파로/양자우물
 q, p : 빗금친 영역의 적분값
 Fig. 3. Multiple waveguides/quantum wells.
 q, p : Integrals of each shaded area

그림 3의 회귀점 x_N, x_{N+1} 의 사이($f(x) \geq b$)에서 파동함수를 다음으로 표기하면 다음과 같다.

$$E(x) = c_N A(\xi_N) + d_N B(\xi_N), \quad x_N \leq x \quad (35)$$

$$E(x) = c_{N+1} A(\xi_{N+1}) + d_{N+1} B(\xi_{N+1}), \quad x \leq x_{N+1} \quad (36)$$

(c_N, d_N)과 (c_{N+1}, d_{N+1})의 관계는 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} c_N \\ d_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin q_N & \cos q_N \\ \cos q_N & -\sin q_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{N+1} \\ d_{N+1} \end{pmatrix} \quad (37)$$

회귀점 x_{N-1}, x_{N+2} 의 사이($f(x) \leq b$)에서 파동함수를 다음으로 표기하면

$$E(x) = c_{N+1} A(\eta_{N+1}) + d_{N+1} B(\eta_{N+1}), \quad x_{N+1} \leq x \quad (38)$$

$$E(x) = c_{N+2}A(\eta_{N+2}) + d_{N+2}B(\eta_{N+2}), \quad x \leq x_{N+2} \quad (39)$$

(c_{N-1}, d_{N-1}) 과 (c_{N+2}, d_{N+2}) 의 관계는 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} c_{N+1} \\ d_{N+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2\exp(p_{N+1}) \\ \frac{1}{2}\exp(-p_{N+1}) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{N+2} \\ d_{N+2} \end{pmatrix} \quad (40)$$

식 (37), (40)으로부터 Transfer Matrix를 다음과 같이 정의한다.

$$T_N^q = \begin{pmatrix} \sin q_N & \cos q_N \\ \cos q_N & -\sin q_N \end{pmatrix} \quad (41)$$

$$T_{N+1}^p = \begin{pmatrix} 0 & 2\exp(p_{N+1}) \\ \frac{1}{2}\exp(-p_{N+1}) & 0 \end{pmatrix} \quad (42)$$

여기서, $N=1, 2, 3, \dots$

2. 고유방정식 유도

임의의 N 개의 광도파로 또는 양자우물에 대한 다음의 식을 얻는다.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} c_1 \\ d_1 \end{pmatrix} &= (T_N^q)(T_{N-1}^q) \dots \dots (T_{2(N-1)}^p T_{2N-1}^q) \begin{pmatrix} c_{2N} \\ d_{2N} \end{pmatrix} = T_N \begin{pmatrix} c_{2N} \\ d_{2N} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} T_N(1,1) & T_N(1,2) \\ T_N(2,1) & T_N(2,2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{2N} \\ d_{2N} \end{pmatrix} \quad (N=1,2,3, \dots) \end{aligned} \quad (43)$$

광도파로/양자우물에서 $E(\pm\infty)=0$ 임을 고려하면 다음 식을 만족해야 한다.

$$d_1 = d_{2N} = 0 \quad (44)$$

따라서,

$$T_N(2,1) = 0 \quad (45)$$

이 된다. 한편 T_N 을 다른 방법으로 표현하면

$$T_N = T_{N-1}(T_{2(N-1)}^p T_{2N-1}^q) \quad (46)$$

가 되며 $T_N(1,1)$, $T_N(1,2)$, $T_N(2,1)$, $T_N(2,2)$ 는 각각 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} T_N(1,1) &= 2T_{N-1}(1,1)\exp(p_{2(N-1)})\cos q_{2N-1} + \frac{1}{2}T_{N-1}(1,2) \\ &\quad \exp(-p_{2(N-1)})\sin q_{2N-1} \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} T_N(1,2) &= -2T_{N-1}(1,1)\exp(p_{2(N-1)})\sin q_{2N-1} + \frac{1}{2}T_{N-1}(1,2) \\ &\quad \exp(-p_{2(N-1)})\cos q_{2N-1} \end{aligned} \quad (48)$$

$$\begin{aligned} T_N(2,1) &= 2T_{N-1}(2,1)\exp(p_{2(N-1)})\cos q_{2N-1} + \frac{1}{2}T_{N-1}(2,2) \\ &\quad \exp(-p_{2(N-1)})\sin q_{2N-1} \end{aligned} \quad (49)$$

$$\begin{aligned} T_N(2,2) &= -2T_{N-1}(2,1)\exp(p_{2(N-1)})\sin q_{2N-1} + \frac{1}{2}T_{N-1}(2,2) \\ &\quad \exp(-p_{2(N-1)})\cos q_{2N-1} \end{aligned} \quad (50)$$

식 (45)의 조건식으로부터 다음의 식을 얻는다.

$$-\frac{T_{N-1}(2,1)}{T_{N-1}(2,2)} \cot q_{2N-1} = \frac{1}{4} \exp(-2p_{2(N-1)}) \quad (51)$$

한편 식 (49), (50)으로부터 $-T_N(2,1)/T_N(2,2)$ 의 식을 얻는다.

$$-\frac{T_N(2,1)}{T_N(2,2)} = \cot[q_{2N-1} + \phi_{N-1}] \quad (52)$$

식 (51), (52)를 연계시키면 $N \geq 2$ 에 대하여 다음의 점화형태의 고유방정식을 얻는다.

$$\cot[q_{2N-3} + \phi_{N-2}] \cot q_{2N-1} = \frac{1}{4} \exp(-2p_{2(N-1)}) \quad (53)$$

여기서,

$$\phi_{N-2} = \cot^{-1} \left[-4 \frac{T_{N-2}(2,1)}{T_{N-2}(2,2)} \exp(2p_{2(N-2)}) \right] \quad (\text{단, } \phi_0 = 0) \quad (54)$$

VI. 모의 전산

1. 포물선형 굴절을 분포를 가지는 세쌍둥이 도파로 ($N=3$)

그림 4는 포물선형 굴절을 분포를 가지는 세쌍둥이 도파로를 나타내며, 굴절율의 분포함수는 다음과 같이 나타내어진다.

$$n(x) = n_1 + (n_2 - n_1)f(x) \quad (55)$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 - (x/d)^2 & , |x| \leq d \\ 1 - (|x - 2d - 2s|)^2/d^2 & , d + 2s \leq |x| \leq 3d + 2s \\ 0 & , \text{elsewhere} \end{cases} \quad (56)$$

식 (53)의 점화식을 $N=3$ 에 대하여 정리하면 다음과 같은 세쌍둥이 도파로의 고유 방정식을 얻는다.

$$16\exp(4p)\cot^3 q - (8\exp(2p) + 1)\cot q = 0 \quad (57)$$

식 (57)은 다음과 같은 고유방정식으로 나타내어진다.

$$q = (m + \frac{1}{2})\pi \tag{58}$$

$$q = (m + \frac{1}{2})\pi \pm \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{8\exp(2p)+1}}{4\exp(2p)} \right) \tag{59}$$

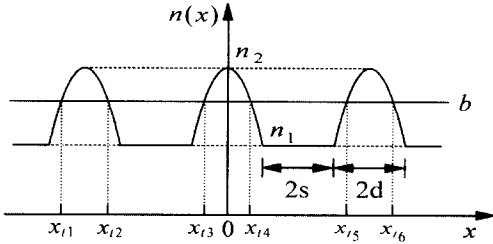


그림 4. 포물선형 굴절율 분포를 가지는 세도파로
Fig. 4. Three-identical waveguides with parabolic index profile.

한편 그림 4의 포물선형 굴절율 분포에 대한 q, p 는 식 (30), (31)로부터 정규화 주파수 v 와 정규화 전파상수 b 로 다음과 같이 계산된다. 단, 식 (55)의 변수 x 는 d 에 관하여 정규화 시킨 후 연산함을 유의한다.

$$q = \frac{\pi}{2} v(1-b) \tag{60}$$

$$p = v \left[(1+2\delta)\sqrt{b} + (1-b) \ln \left(\frac{1-\sqrt{b}}{\sqrt{1-b}} \right) \right] \tag{61}$$

여기서, v, b, δ 는 식 (62)와 같으며, β 는 전파상수이다.

$$v = k_0 d \sqrt{n_2^2 - n_1^2}, \quad b = \frac{(\beta/k_0)^2 - n_1^2}{n_2^2 - n_1^2}, \quad \delta = \frac{s}{d} \tag{62}$$

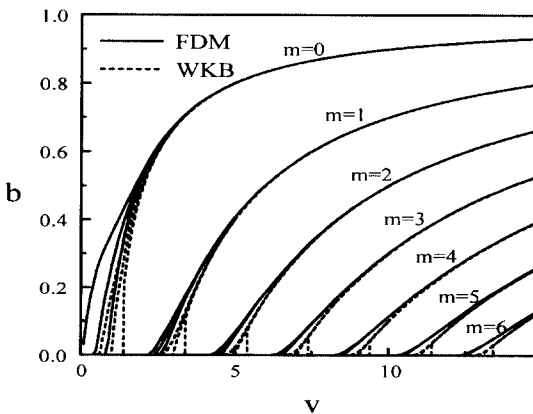


그림 5. 포물선형 굴절율분포를 가지는 세쌍둥이 도파로의 $b-v$ 곡선 ($s/d=1.0$)
Fig. 5. $b-v$ curves for three-identical waveguides with parabolic index profile. ($s/d=1.0$)

식 (60), (61)의 q, p 를 식 (58), (59)에 대입한 후 bisection 기법에 의하면 그림 5와 같은 $b-v$ 곡선을 얻을 수 있다. TE 모드에 대하여, 잘 알려진 수치해석 중의 하나인 FDM의 결과와 비교하여 보았다. 예상대로 저차모드의 차단영역 근처에서는 많은 오차를 나타내지만 차단영역에서 멀어질수록 잘 일치함을 확인할 수 있다.

2. 임의의 굴절율 분포를 가지는 N 쌍둥이 도파로
 $N=4$ 에 대해서도 $N=3$ 의 경우와 같이 모의전산하였으나 그림 5와 동일한 경향을 보이고 있으므로 생략하였다. 오히려 일반적인 N 도파로 열에 대한 고유방정식을 기술하는 것이 가치 있는 것으로 생각되어 기술하고자 한다. 임의의 굴절율 분포를 가지는 N 쌍둥이 도파로의 고유방정식은 다음과 같이 나타내어진다.

$$N=4 : 64\exp(6p)\cot^4 q - (48\exp(4p) + 8\exp(2p) + 1)\cot^2 q + 4\exp(2p) = 0 \tag{63}$$

$$N=5 : 256\exp(8p)\cot^5 q - (256\exp(6p) + 48\exp(4p) + 8\exp(2p) + 1)\cot^3 q + (48\exp(4p) + 8\exp(2p))\cot q = 0 \tag{64}$$

$$N=6 : 1024\exp(10p)\cot^6 q - (1280\exp(8p) + 256\exp(6p) + 48\exp(4p) + 8\exp(2p) + 1)\cot^4 q + (384\exp(6p) + 96\exp(4p) + 12\exp(2p))\cot^2 q - 16\exp(4p) = 0 \tag{65}$$

⋮
⋮
⋮

$N=4, 5, 6$ 을 포함하여 적어도 $N \leq 9$ 까지는 고유방정식의 인수분해가 가능한 것이 확인되었다. 그러나 인수분해 여부에 관계없이 직접 대입 방법에 의하여 $b-v$ 곡선을 얻는 것이 더욱 간명하다.

VII. 결 토

기존의 WKB 이론에서는 파동함수가 회귀점에서 발산상태로 정의되었으며, 점근함수만의 연결공식을 사용하여 고유방정식을 유도하였다. 회귀점 근처뿐 아니라 이로부터 떨어진 영역을 포함하는 모든 영역에서 유효한 포괄적인 시도해로써 파동함수를 제시하였다. 언덕형 굴절율분포를 갖는 단일 광도파로와 방향성 결합기, 그리고 세도파로 결합기의 고유방정식을 유도하여 기

존의 고유방정식과 일치함을 확인하였다.

여러 개로 이루어진 광도파로/양자우물에 대하여, 전달행렬을 이용하여 고유방정식의 일반형태를 점화식의 형태로 유도하였다. 포물선형 굴절률 분포를 갖는 세쌍둥이 도파로에 대하여 FDM에 의한 결과와 비교 검토하였으며, 차단영역 근처에서는 많은 오차를 나타내지만 차단영역에서 멀어질수록 잘 일치함을 확인하였다. 참고로 임의의 굴절률 분포를 갖는 N 쌍둥이 도파로 열에 대하여 고유방정식을 기술하여 보았다.

부록 A. Airy 함수의 점근식

회귀점($u=0$)에서 벗어난 영역에 대하여 Airy 함수의 점근해는 식 (7), (8)에 부록 C의 Bessel 함수 점근식을 적용시킴으로써 다음과 같이 표기할 수 있다.

$$Ai(u) \approx |D_t|^{-1/6} \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi}|u|^{1/4}} \sin\left(\frac{2}{3}|u|^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right), & u < 0 \\ -\frac{1}{2\sqrt{\pi}|u|^{1/4}} \exp\left(-\frac{2}{3}u^{3/2}\right), & u > 0 \end{cases} \quad (A1)$$

$$Bi(u) \approx |D_t|^{-1/6} \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi}|u|^{1/4}} \cos\left(\frac{2}{3}|u|^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right), & u < 0 \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}|u|^{1/4}} \exp\left(\frac{2}{3}u^{3/2}\right), & u > 0 \end{cases} \quad (A2)$$

부록 B. 회귀점으로부터 위상함수 $P(x)$, $Q(x)$

회귀점($u=0$) 근처에서 식 (3)의 $P(x)$, $Q(x)$ 는 다음과 같이 변환된다.

$$Q(x) = Q(u) = |D_t|^{1/3}|u|^{1/2} \quad (u < 0) \quad (B1)$$

$$P(x) = P(u) = |D_t|^{1/3}u^{1/2} \quad (u > 0) \quad (B2)$$

i) $D_t > 0$ 인 경우, 회귀점 x_t 를 중심으로 $P(x)$, $Q(x)$ 의 적분식은 다음과 같다.

$$\int_{x_t}^x Q(x) dx = \frac{2}{3}|u|^{3/2}, \quad \int_x^{x_t} P(x) dx = \frac{2}{3}u^{3/2} \quad (B3)$$

ii) $D_t < 0$ 인 경우, 회귀점 x_t 를 중심으로 $P(x)$, $Q(x)$ 의 적분식은 다음과 같다.

$$\int_x^{x_t} Q(x) dx = \frac{2}{3}|u|^{3/2}, \quad \int_x^{x_t} P(x) dx = \frac{2}{3}u^{3/2} \quad (B4)$$

이상의 적분결과에서 $(2/3)u^{3/2}$ 는 회귀점에 이르기까지, 또는 회귀점으로부터 축적된 위상천이를 나타낸다.

부록 C. Bessel 함수의 점근식

J_ν , I_ν , K_ν 는 각각 Bessel 함수와 Modified Bessel 함수이며, 점근식은 다음과 같이 나타내어진다^[6].

$$J_\nu(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{1}{4}(2\nu + 1)\pi\right) \quad (C1)$$

$$I_\nu(z) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi z}} \exp(z) \quad (C2)$$

$$K_\nu(z) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)}{\sin \nu\pi} \approx \sqrt{\frac{\pi}{2z}} \exp(-z) \quad (C3)$$

참 고 문 헌

- [1] J. Ctyroky, M. Hofman, J. Janta, and J. Schrofel, "3-D analysis of LiNbO₃:Ti channel waveguides and directional couplers," *IEEE J. Quantum Electron.*, vol. QE-20, no. 4, p. 400, Apr. 1984.
- [2] T. Suhara, Y. Handa, H. Nishihara, and J. Koyama, "Analysis of optical channel waveguides and directional couplers with graded-index profile," *J. Opt. Soc. Am.*, vol. 69, no. 6, pp. 807-815, Jun. 1979.
- [3] C. M. Kim and R. V. Ramaswamy, "WKB analysis of asymmetric directional couplers and its application to optical switches," *J. of Lightwave Technol.*, vol. 6, no. 6, pp. 1109-1118, Jun. 1988.
- [4] R. Srivastava, C. K. Kao, and R. V. Ramaswamy, "WKB analysis of planar surface waveguides with truncated index profiles," *J. of Lightwave Technol.*, vol. LT-5, no. 11, pp. 1605-1609, Nov. 1987.
- [5] R. L. Liboff, *Introductory Quantum Mechanics*, Addison-Wesley, 2nd Ed., Ch. 7, 1992.
- [6] M. L. Boas, *Mathematical Methods in the Physical Sciences*, Wiley & Sons., 2nd Ed., Ch. 12, 1983.
- [7] J. L. Powell and B. Crasemann, *Quantum Mechanics*. Reading, MA: Addison Wesley, 1961, pp. 140-153.
- [8] 정민섭, 김창민, "평면형 도파로해석에 있어서 WKB방법 및 MWKB방법의 평가," *대한전기학*

회논문지, 제45권, 제1호, pp. 146-158, 1996년 1월

한 방향성 결합기의 해석," 대한전자공학회 논문지, 제33권, 제8호, pp. 192-201, 1996년 8월

[9] 정민섭, 임영준, 김창민, "수정된 WKB이론에 의

저 자 소 개



金 昌 敏(正會員)

1950년 4월 10일생. 1975년 2월 서울대학교 전자공학과 공학사. 1982년 2월 동 대학원 전자공학과 공학석사. 1989년 8월 U. of Florida Dept. of EE 공학박사. 1983년 5월 ~ 현재 서

울시립대학교 전자전기공학부 부교수. 주관심분야는 도파/집적광학, 진행파적극/고속광변조기, 저분산 광섬유, 광통신 시스템, FDM, FEM, BPM, SOR 등 수치해석



任 聃 俊(正會員)

1971년 3월 25일생. 1995년 2월 서울시립대학교 전자공학과 공학사. 1995년 3월 ~ 현재 동 대학원 전자공학과 석사과정 재학중. 주관심분야는 도파/집적광학, FDM, FEM, BPM 등 수치해석