

## CAD/CAM 시스템에서 媒介變數形 曲線補間器에 관한 研究

김희송\*, 오 선\*\*

A Study of Parametric Curve Interpolator in CAD/CAM System

Kim, Hei Song · Oh, Seon

### Abstract

The interpolator is very important in CNC machines. This study proposed a parametric curve interpolator(PCI) which can be used for machining any sculptured surface represented in a parametric form and generates commands for tool motion between CAD data points according to given accuracy demands. The proposed interpolator is superior to the existing linear interpolator in accuracy, feed rate and acceleration continuity. Moreover in comparison to the recently developed cubic spline interpolator, the PCI has the capability of handling higher order parametric curves and also ensures precise tracking in the velocity domain. Results from real time simulations and experiments on open architecture CNC machines equipped with the proposed interpolator are presented to show its practical capability. It is believed that the combination of the proposed interpolator and the open architecture machine controller further advances the area of command generation which is an important aspect of CAD/CAM.

Keywords : parametric curve interpolator(매개변수형 곡선 보간기), linear interpolator(직선 보간기), circular interpolator(원호 보간기)

### 1. 序 論

機械産業의 全般的인 分野에서 既存의 受動的인 方法에서 脫皮하여 最近에는 生産自動化 시스템을 構築하는 企業이 急速度로 늘어나고 있고, CAD/CAM 分野의 統合도 活發하게 研究되고 있다. 이러한 研究의 核心的인

分野 中 하나는 3次元 自由曲面을 加工하는 것으로서 터어빈 날개, 航空機 프레임, 自動車 部品等과 같은 機械分野에서 쉽게 대할 수 있다. CAD 시스템에서는 曲面을 보통 媒介變數形 曲線에 의하여 無次元形式으로 나타낸다. 그러나 이러한 無次元形式의 曲線은 移送速度와 같이 指定된 파라메타로 實時間에 曲面을 加工하기 위하

\* 단국대학교 기계공학과

\*\* 단국대학교 기계공학과 대학원

여 시간 영역으로 置換할 必要가 있다. 移送速度나 加速度와같이 時間의 媒介變數에 根據하여 設定된 工具位置는 工具徑路를 따르는 時間의 項으로 주어져야 하고, 命令語 生成 過程은 制御器에 장치되어 있는 補間器가 수행하고 基準入力으로 사용된다.<sup>(1)</sup>

지난 수년동안 命令語를 生成하기 위해 간단한 直線補間이 사용되었는데, 이 方法은 速度의 不連續性이란 缺點을 가지고 있었다. 그러나 80年代初 이래 보다 우수한 補間方法들이 開發되었다. Sata et al.은 일련의 不連續인 CAD 데이터 점들을 연결하기 위해 Bezier 曲線을 사용하여 曲線을 生成하는 方法을 開發했는데 이러한 개선으로 보간 선분의 數는 直線 補間에 비해 減少되었다.<sup>(2)</sup> 最近 Chou와 Yang은 位置多項式의 徑路 媒介變數와 時間 사이의 統合을 公式化 했다.<sup>(3)</sup> 本 研究에서는 이러한 理論에 根據하여 보다 正確한 移送速度와 媒介變數形의 어떠한 曲線에서도 變化하는 移送速度 制御에 關한 命令語 生成이 可能한 媒介變數形 曲線 補間器(PCI)를 提示하였다.

## 2. 關聯理論

### 2.1 媒介變數形 曲線補間器의 命令語에 關한 基礎 理論

3次 曲線에 대한 媒介變數形 曲線의 一般的인 표현은 다음과 같다.<sup>(4)</sup>

$$\begin{aligned} x(u) &= a_{xp}u^3 + b_{xp}u^2 + c_{xp}u + d_{xp} \\ \bar{S}_p(u) = y(u) &= a_{yp}u^3 + b_{yp}u^2 + c_{yp}u + d_{yp} \\ z(u) &= a_{zp}u^3 + b_{zp}u^2 + c_{zp}u + d_{zp} \end{aligned} \quad (1)$$

工具의 移送速度가  $\bar{V}(u)$  라 하면 Chain rule에 의 해,

$$\begin{aligned} \bar{V}(u) &= \frac{d\bar{S}}{dt} = \frac{d\bar{S}}{du} \frac{du}{dt} \\ &= \left( \frac{dx}{du} \bar{i} + \frac{dy}{du} \bar{j} + \frac{dz}{du} \bar{k} \right) \frac{du}{dt} \end{aligned} \quad (2)$$

式 (2)의 크기를 考慮하면,

$$V(u) = \left| \frac{d\bar{S}}{du} \right| \frac{du}{dt} \quad (3)$$

$$= \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2 + \left(\frac{dz}{du}\right)^2} \frac{du}{dt}$$

따라서, 
$$\frac{du}{dt} = \frac{V(u)}{\left| \frac{d\bar{S}}{du} \right|} \quad (4)$$

式 (4)는 CAD 모델에서 제시된 靜的情報와 CNC 工具를 制御하는데 필요한 動的情報의 關係를 정의하고 또한 補間에 필요한 根據를 提供하는 것으로서 加速度를  $A(u)$ 라고 하면,

$$A(u) = \frac{dV(u)}{dt} = \frac{dV(u)}{du} \frac{V(u)}{\left| \frac{d\bar{S}}{du} \right|} \quad (5)$$

積分形式로 나타내면,

$$V(u) = \sqrt{V^2(u_0) + 2 \int_{u_0}^u A(u') \left| \frac{d\bar{S}}{du'} \right| du'} \quad (6)$$

따라서,

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{V(u)}{\left| \frac{d\bar{S}}{du} \right|} \\ &= \frac{\sqrt{V^2(u_0) + 2 \int_{u_0}^u A(u') \left| \frac{d\bar{S}}{du'} \right| du'}}{\left| \frac{d\bar{S}}{du} \right|} \end{aligned} \quad (7)$$

### 3. 媒介變數形 曲線補間器(PCI)

式 (4)에서 Euler method를 利用하면,<sup>(5)</sup>

$$u_i = u_{i-1} + \frac{V(u_{i-1})}{\left| \frac{d\bar{S}}{du} \right|_{u=u_{i-1}}} \Delta t \quad (8)$$

마찬가지로 式 (6)의 移送速度와 媒介變數의 關係는,

$$V^2(u_i) = V^2(u_{i-1}) + 2 \left\{ A(u_{i-1}) \left| \frac{d\bar{S}}{du} \right|_{u=u_{i-1}} (u_i - u_{i-1}) \right\} \quad (9)$$

式 (8)과 (9)에서,

$$\left| \frac{d\bar{S}}{du} \right|_{u=u_{i-1}} = \left\{ \left( \frac{dx}{du} \right)^2 + \left( \frac{dy}{du} \right)^2 + \left( \frac{dz}{du} \right)^2 \right\}_{u=u_{i-1}}^{1/2} = \sqrt{P(u)} \Big|_{u=u_{i-1}} \quad (10)$$

### 3.1 PCI의 速度와 加速度 特性

PCI의 重要한 特徵은 모든 媒介變數形 曲線에 대해서 速度와 加速度 命令을 쉽게 만들 수 있다는 것이다. 이러한 特徵으로 feedforward 토크 제어 알고리즘이 CNC에서 사용될 수 있다.

$\sqrt{P(u)} = \left| \frac{d\bar{S}}{du} \right|$  라 하고, 式 (3)과 (4)에서,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{du} \frac{du}{dt} = \frac{dx}{du} \frac{V(u)}{\left| \frac{d\bar{S}}{du} \right|} \quad (11)$$

加速度 命令語는 式 (11)을 微分하고 式 (4)와의 關係에서,

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{d}{du} \left\{ \frac{dx}{du} \frac{V(u)}{\left| \frac{d\bar{S}}{du} \right|} \right\} \frac{du}{dt} \\ &= \frac{d^2x}{du^2} \frac{V^2(u)}{P(u)} + \frac{dx}{du} \left\{ P(u) \frac{dV(u)}{du} - \frac{1}{2} V(u) \frac{dP(u)}{du} \right\} \frac{V(u)}{P^2(u)} \end{aligned} \quad (12)$$

移送速度가 一定한 3次 스플라인의 경우 速度를  $V^*$  라하면, 式 (11)과 (12)는,

$$\frac{dx}{dt} = (3a_{xj}u^2 + 2b_{xj}u + c_{xj}) \frac{V^*}{\sqrt{P(u)}} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= (6a_{xj}u + 2b_{xj}) \frac{V^{*2}}{P(u)} \\ &- \frac{1}{2} (3a_{xj}u^2 + 2b_{xj}u + c_{xj}) \left( \frac{V^{*2}}{P(u)} \right)^2 \frac{dP(u)}{du} \end{aligned} \quad (14)$$

### 3.2 PCI의 可變 移送制御

#### 3.2.1 直線 補間을 爲한 PCI

$\bar{S}(u)$  를  $u \in [0, 1]$  에 대해 媒介變數形 直線으로 表示하면, (6)

$$\bar{S}(u) = \left. \begin{aligned} x(u) &= x_j + (x_{j+1} - x_j)u \\ y(u) &= y_j + (y_{j+1} - y_j)u \\ z(u) &= z_j + (z_{j+1} - z_j)u \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

윗 式을 式 (8)에 適用하면 다음과 같은 可變 移送速度의 直線 補間을 위한 式이 된다.

$$u_i = u_{i-1} + \frac{V(u_{i-1})}{\left| \frac{d\bar{S}}{du} \right|_{u=u_{i-1}}} \Delta t = u_{i-1} + \frac{V(u_{i-1})}{\sqrt{(x_{j+1} - x_j)^2 + (y_{j+1} - y_j)^2 + (z_{j+1} - z_j)^2}} \Delta t \quad (16)$$

$$x(u_i) = x_j + u_i(x_{j+1} - x_j) \quad (17)$$

#### 3.2.2 圓弧 補間을 爲한 PCI

Fig. 1에서  $u \in [0, 1]$  에 대해서 媒介變數形 圓弧 補間은 다음과 같이 表現할 수 있다.

$$\bar{S}(u) = \left( \begin{aligned} x_o + r \cos[(\theta_s - \theta_f)u + \theta_f] \\ y_o + r \sin[(\theta_s - \theta_f)u + \theta_f] \end{aligned} \right) \quad (18)$$

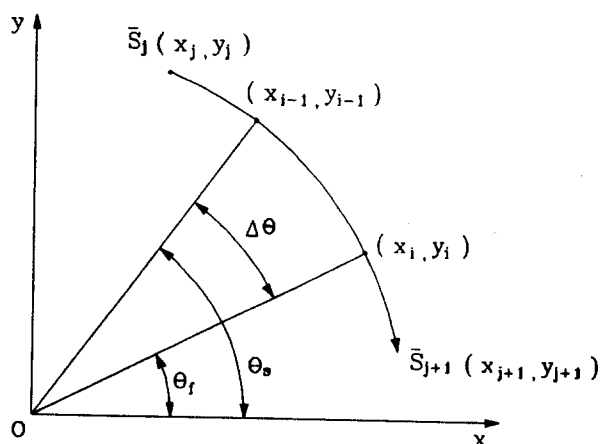


Fig. 1 An illustration of circular interpolator for PCI

半徑  $r$ 과 角速度  $\omega$ 에 대응하는 媒介變數形 曲線 補間과 移送速度  $V$ 의 定義를 이용하면 式 (8)은,

$$u_i = u_{i-1} + \frac{\omega}{(\theta_s - \theta_f)} \Delta t \quad (19)$$

$\omega \Delta t = \Delta \theta$  라는 定義에 의해, 式 (18)과 (19)는,

$$x_i - x_0 = r \cos [(\theta_s - \theta_f)u_{i-1} + \theta_f] \cos \Delta \theta - r \sin [(\theta_s - \theta_f)u_{i-1} + \theta_f] \sin \Delta \theta \quad (20)$$

### 3.2.3 3次 스플라인 補間을 爲한 PCI

式 (4)에서 시작점과 끝점 사이의 差를 考慮하면,  $\Delta u$  는 變化가 없으며,  $|\Delta \bar{S}|$  는 弦의 길이  $L_s$ 와 같다. 따라서 式 (4)는,

$$\frac{du}{dt} = \frac{V(u)}{L_s} \quad \text{또는} \quad u_i = u_{i-1} + \frac{V(u_{i-1})}{L_s} \Delta t \quad (21)$$

加速度  $A_d$ 가 주어지면, 移送速度

$V(u) = V(\tau) = V_0 + A_d \tau$ ,  $\tau$ 는 時間에 따른 變數이고, 初期條件  $u_0 = t_0 = 0$ 를 이용하면,

$$\int_{u_0}^u du = \int_{t_0}^t \frac{V(u)}{L_s} d\tau$$

$$u(t_i) = u_i = \frac{V_0}{L_s} t_i + \frac{A_d}{2L_s} t_i^2 \quad (22)$$

## 4. 샘플링 間隔과 移送의 決定

### 4.1 샘플링 間隔에 의한 位置公差

PCI 命令語에서 實質인 工具徑路는 하나의 命令語에서 다음 命令語로 작은 直線 線分을 따라 움직인다. 位置에러는 Fig. 2와같이 弦에의해 實際의 曲線을 近似化하기 때문에 생긴다. 만족할만한 機械加工을 위해 最大誤差  $e_m$ 는 허용位置公差  $e_p$ 보다 작아야 한다.

따라서 PCI의 性能을 評價하기 위해 工具徑路를 따르는  $e_m, e_p, \Delta t$ 의 變化사이의 理論인 關係가 필요

하다. 連續的인 command points 사이의 거리가 매우 작다는 假定에 根據하여 command points 사이의 實際 曲線은 接觸하는 圓弧에 의해 近似化 될 수 있다. Fig. 2에서 幾何學的으로 피타고라스정리를 利用하면,<sup>(7)</sup>

$$\Delta t \leq \frac{\sqrt{8e_p r - 4e_p^2}}{V} \quad (23)$$

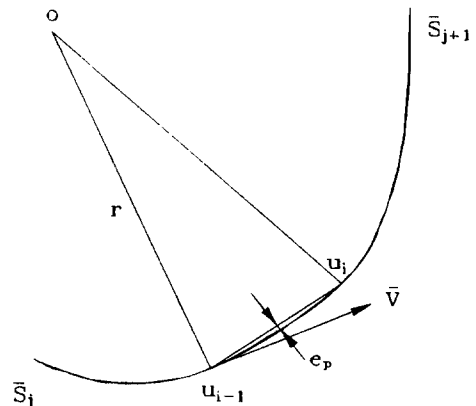


Fig. 2 Actual and desired tool paths

Fig. 3은 0.001mm에서 0.03mm까지의 許容位置公差와 샘플링간격  $\Delta t$ 와의 關係에서 半徑變化에 따른 許容位置公差를 나타낸 것으로서 半徑이 增加함에 따라 샘플링간격이 커짐을 豫測할 수 있다. 여기서 移送速度는 90mm/sec로 選擇하였다.

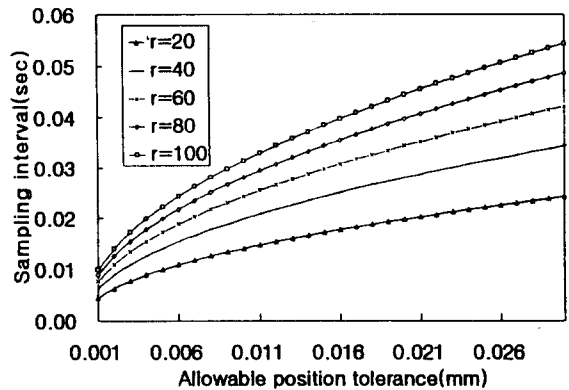


Fig. 3 Position tolerance vs. sampling interval

### 4.2 高精度 移送을 爲한 2次 補間

一般的으로 1次補間 式(8)은 移送速度를 따라가는데 있어서 정확하다. 만일 高精度 移送이 요구되고 샘플링 間隔을 줄일 수 없다면 2次항을 추가하여 1次 근사치의 정확도를 증가시킨다.<sup>(8)</sup>

$$u_i = u_{i-1} + \frac{V(u_{i-1})}{\left| \frac{dS}{du} \right|_{u=u_{i-1}}} \Delta t \quad (24)$$

$$- \frac{1}{4} \left[ \frac{V(u_{i-1})}{P(u_{i-1})} \Delta t \right]^2 \frac{dP(u)}{du} \Bigg|_{u=u_{i-1}}$$

媒介變數化된 曲線의 경우, 式 (24)의 2次항은 계산 하는데 큰 부담을 주지는 않는다. 즉,  $\bar{S}(u)$  가 3次 스플라인 曲線이고 移送速度가 一定하다면 추가되는 항은 단지 5개의 승과 2개의 곱만 추가된다.

Fig. 4와 같이 曲線  $\bar{S}(u)$  가  $u \in [0,1]$ 에 대해 다음과 같은 媒介變數 형태로 주어진다.

$$x(u) = 8.0213u^3 - 9.234u^2 - 6.469u \quad (25)$$

$$y(u) = 0.4761u^3 + 5.497u^2 - 6.552u - 3$$

Fig. 5는 式 (25)의 全體 曲線의 移送速度 變動을 몇 가지 샘플링 間隔으로 表示한 것으로서 샘플링 間隔의 變化에 따라 許容位置公差의 變化를 豫測할 수 있다. 移送速度 公差가  $\pm 0.05\%$  라 하고 最大 샘플링 間隔이 10ms 벗어나지 않는다면, 式 (24)를 사용하여 원하는 移送速度 公差를 만족할 수 있다.

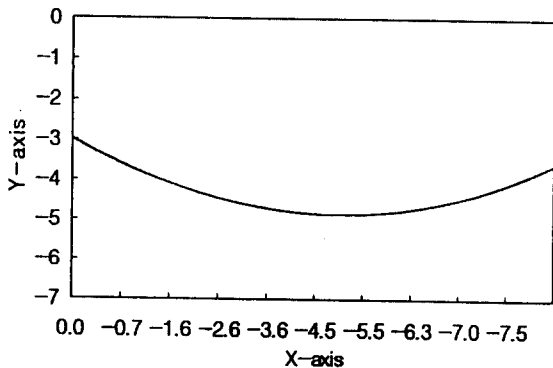


Fig. 4 A cubic spline curve

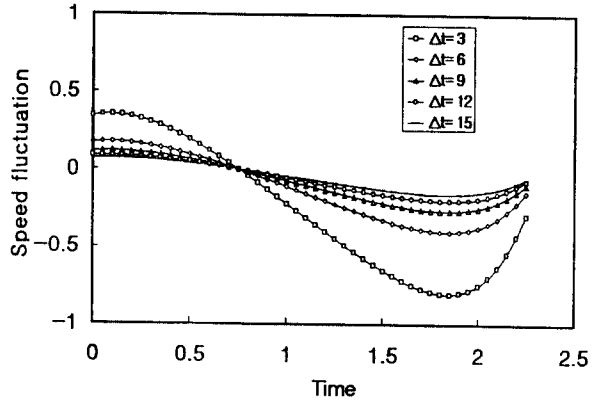


Fig. 5 Feedrate fluctuation vs. sampling interval for the PCI

## 5. 結論

CAD 시스템에서 曲線을 表現하는 方法은 음함수 형태나 媒介變數 형태로서 표시될 수 있다.

음함수 형태의 경우는 座標系에 의존하지만 媒介變數 형식은 점(point)에서 점으로 표현된다.

本 研究에서는 多樣한 移送速度 制御의 能力을 제공하고 또한 온라인 수행의 實質的인 可能性을 보인 것으로서, 여러 형태의 媒介變數形 曲線에 適用할 수 있는 補間은 位置에서의 高精度 뿐만 아니라 移送速度에서도 變動이 적은 CNC 加工에 對한 命令語를 만들 수 있다. 따라서 複雜한 3次元 自由曲面을 加工하거나 精確한 位置 制御와 速度 制御를 필요로 하는 熔接, Laser cutting 等 여러 種類의 生産 工程에 適用할 수 있을 것으로 期待된다.

## 참고문헌

1. Hwang, Jung-Tang, "Design and Application of a New CNC Command Generation for CAD/CAM Integration", University of California Los Angeles Ph. D., pp. 10-11, 1992
2. Sata, T., Kimura, F. Okada, N. and Hosaka,

- M. "A New Method of NC Interpolation for Machining the Sculptured Surface" Annuals of the CIRP, pp 369-372, vol 30/1 1981
3. Chou, J.-J. and Yang, D. C. H., "Command Generation for Three Axis CNC Machining", ASME 1989 Winter Annual meeting, Symposium on Advances in Manufacturing System Engineering, pp. 29-37, 1989
  4. Michael E. Mortenson, "Geometric Modeling", John Wiley & Sons, pp34-35, 1985
  5. Atkinson, K. E. An Introduction to Numerical Analysis, John Wiley, 2nd ed, 1989
  6. Hiroaki Chiyokura, "Solid Modeling with DESIGNBASE Theory and Implementation", ADDISON-WESLEY PUBLISHING COMPANY, pp 100-110, 1988
  7. 노승남, 오선, "CAD/CNC 시스템에서 曲線의 實時間 補間에 關한 研究", 서울산업대학교 논문집 제41집, pp 135-146, 1995
  8. 권준박, "IBM-PC를 중심으로 한 컴퓨터 그래픽스", 일진사, pp 183-189, 1991