

평면 차체프레임구조물의 민감도해석 및 최적설계

이종선*, 김엽래**, 이강손**

Sensitivity Analysis and Optimal Design of Plane Vehicle Frame Structures

Jong-Sun Lee*, Yeob-Rae Kim**, Kang-Son Lee**

Abstract

This paper is to estimate sizing design sensitivity of linear and nonlinear vehicle frame structure using structural analysis result from ANSYS.

Using design sensitivity results, optimal design of plane vehicle frame structure with buckling constraint is carried out the gradient projection method. Optimal design results are compares gradient projection method result with SUMT result.

Key words: Plane Vehicle Frame Structure(평면 차체프레임구조물), Thin-walled Beam(박판 부재), Sizing Design Sensitivity Analysis(치수설계민감도해석), Gradient Projection Method(미분벡터투영법), Optimal Design(최적설계)

1. 서 론

구조물설계시 충돌에 대한 안전성을 보장하기 위해서는 작용하중에 대한 좌굴특성을 정확히 파악하여야 한다. 재료와 제작방법의 복잡성이 증대되어 구조물은 좌굴현상과 같은 비선형거동을 보이고 파손하는 경향이 있다.

차체프레임구조물설계시 비선형 구조물에 대한 최적설계 기법을 도입할 필요가 있으며 최적설계시 구조물은 요구된 설계하중보다 낮은 하중에서 붕괴될 수 있으므로 설계는 구조물이 붕괴되지 않도록 개선되어야 한다. 따

라서 좌굴하중의 설계민감도해석은 비선형구조계의 설계를 위하여 필수적이다.

Choi, Haug와 Lam 등¹⁾은 선형구조계의 최적설계 문제를 제안하였으며 Choi와 Santos²⁾는 비선형구조계의 설계민감도해석을 위한 연속체방법을 제시하였다. McIvor, Wineman, Wang 등³⁾은 박판 부재를 이용하여 실제 차체의 프레임과 유사한 구조를 제작하여 실험한 결과와 소성 힌지를 이용한 이론해가 근사함을 보였으며 Chang⁴⁾은 탄소성해석의 경우 실험결과를 입력치로 활용해야 하므로 초기 설계시 적용할 수 없음을 지적

* 대전대학교 기계설계공학과
** 경민전문대학

하고 부재의 모멘트-회전각 선도를 탄성-완전소성 응답으로 해석하여 차체의 충돌 강도와 소성 힌지가 생기는 부위를 예측하여 초기 설계시 적용하였다. 그후 그는 자동차 객실부를 평면 프레임으로 가정하고 연결부위에 연결개념을 도입하여 탄소성해석을 수행한 결과 실제 차체의 실험결과와 잘 일치함을 보였다.

본 논문에서는 차체를 이루고 있는 접합부의 변형을 선형과 비선형 차체프레임구조물로 구분하여 이들 차체프레임구조물의 설계민감도해석을 수행하고 이 결과를 바탕으로 미분벡터투영법⁵⁾을 이용하여 최적설계를 수행한다. 또한 미분벡터투영법을 이용한 최적설계 결과를 ANSYS⁶⁾의 최적설계 프로그램인 SUMT를 이용한 결과와 비교 검토한다.

2. 이 론

Total Lagrange 수식화에 있어서 영역 ${}^{t+\Delta t}\Omega$ 와 경계 ${}^{t+\Delta t}\Gamma$ 를 갖는 물체에 대한 전체변형에너지형태 a_u 는 평형방정식으로부터 다음과 같이 표시될 수 있다⁷⁾.

$$a_u({}^{t+\Delta t}\bar{z}, \bar{z}) \equiv \int \int_{{}^{t+\Delta t}\Omega} {}^{t+\Delta t}S_{ij} {}^{t+\Delta t}\bar{\epsilon}_{ij}^0 d\Omega + \int \int_{{}^{t+\Delta t}\Gamma} {}^{t+\Delta t}T_i \bar{z}_i^0 d\Gamma, \text{ for all } \bar{z} \in Z \quad (1)$$

여기서 ${}^{t+\Delta t}\bar{z}$ 는 전체변위, \bar{z}_i 는 \bar{z} 의 x_i 방향성분, ${}^{t+\Delta t}S_{ij}$ 는 2차 Piola-Kirchhoff응력텐서의 직교좌표성분, ${}^{t+\Delta t}\bar{\epsilon}_{ij}$ 는 Green-Lagrange 변형률텐서의 직교좌표성분, ${}^{t+\Delta t}f_i$ 와 ${}^{t+\Delta t}T_i$ 는 각각 외부작용 물체력성분과 표면력성분이다.

a_u 의 선형화된 형태 a'_u 는 증분평형방정식으로부터 다음과 같이 표시된다.

$$a'_u({}^t\bar{z}; {}^t\bar{z}, {}^t\bar{z}) \equiv \int \int_{{}^t\Omega} {}^tC_{ijrs}({}^t\bar{z}_{r,s}) {}^t\bar{z}_{i,j} + {}^t\bar{z}_{k,i}({}^t\bar{z}_{r,s}) {}^t\bar{z}_{k,j} + {}^t\bar{z}_{k,r}({}^t\bar{z}_{k,s}) {}^t\bar{z}_{i,j} + {}^t\bar{z}_{k,r}({}^t\bar{z}_{l,i}) {}^t\bar{z}_{k,s}({}^t\bar{z}_{l,j}) d\Omega - \frac{1}{2} \int \int_{{}^t\Omega} {}^tC_{ijrs}({}^t\bar{z}_{r,s}) + {}^t\bar{z}_{s,r} + {}^t\bar{z}_{m,r}({}^t\bar{z}_{m,s}) {}^t\bar{z}_{k,i}({}^t\bar{z}_{k,j}) d\Omega \quad (2)$$

여기서 ${}^tC_{ijrs}$ 는 증분재료성질텐서를 나타낸다. 가상일의 원리를 이용하면 전좌굴평형방정식은 전체

변형에너지형태 a_u 와 하중형태 l_u 로 다음과 같이 표시될 수 있다

$$a_u({}^t\bar{z}, \bar{z}) = \beta_u l_u(\bar{z}), \text{ for all } \bar{z} \in Z \quad (3)$$

여기서 β_u 는 실제좌굴하중계수를 나타내며 전체작용 하중벡터 P_{t0} 에 대한 실제좌굴하중벡터 P_{cr} 의 비로서 다음과 같다.

$$\beta_u = \frac{P_{cr}}{P_{t0}} \quad (4)$$

a_u 와 l_u 의 미분가능가정과 함께 식(3)의 1차변분은 다음과 같이 표시된다.

$$a'_{\delta u}({}^t\bar{z}, \bar{z}) + a''_u({}^t\bar{z}; \bar{z}, \bar{z}) = \beta' l_u(\bar{z}) + \beta_u l'_{\delta u}(\bar{z}) \quad (5)$$

여기서 a'_u 는 a_u 의 1차변분이다.

식(5)는 최소고유치에 상응하는 고유함수이므로 \bar{z} 를 y 로 대치하면 다음과 같다.

$$a'_{\delta u}({}^t\bar{z}, y) + a''_u({}^t\bar{z}; \bar{z}, y) = \beta' l_u(y) + \beta_u l'_{\delta u}(y) \quad (6)$$

식(6)의 $a''_u({}^t\bar{z}; \bar{z}, y)$ 는 임계한계점에서 0이 되므로 β_u 의 1차변분 β' 는 다음과 같다.

$$\beta' = \frac{1}{l_u(y)} [a'_{\delta u}({}^t\bar{z}, y) - \beta_u l'_{\delta u}(y)] \quad (7)$$

여기서 ${}^t\bar{z}$ 는 최종 전좌굴평형형상에서의 변위이다.

식(4), (7)로부터 P_{cr} 의 1차변분 P'_{cr} 은 다음과 같다.

$$P'_{cr} = \frac{P_{t0}}{l_u(y)} [a'_{\delta u}({}^t\bar{z}, y) - \beta_u l'_{\delta u}(y)] \quad (8)$$

3. 치수설계민감도해석

3.1 차체프레임구조물의 모델링

차체프레임구조물은 8개의 회전스프링과 38개의 탄성보로 구성된 stick model⁸⁾로 Fig. 1과 같이 유한요소 모델링하였다. 보요소의 모멘트-회전각 관계는 박판부재로 된 외팔보의 끝단에 외력을 가한 실험결과를 이

용하였으며 선형 차체프레임구조물은 승객실 주변의 접합부의 모멘트-회전각 관계를 Fig. 2에서의 탄성구간까지를 그 입력값으로 사용하고, 비선형 차체프레임구조물은 탄소성구간까지를 그 입력값으로 사용하였다.

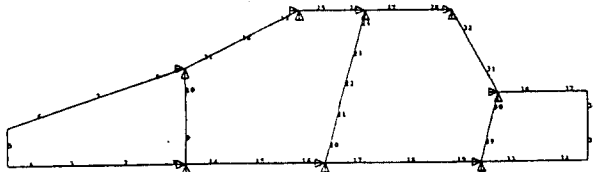


Fig. 1 Body in white of FE-analysis

설계변수로는 횡단면적 $A_1 \sim A_7$ 의 7개 그룹으로 구분하였으며 사용된 보요소는 폐쇄형의 정사각형 튜브형태이며 모멘트-회전각 관계선도를 얻기 위한 박판 부재의 단면형상은 $35 \times 35 \times 1.6\text{mm}$ ($h \times b \times t$)를 사용하였다. 차체프레임구조물의 재질은 다음과 같은 재료적 특성을 갖는 구조용강을 사용하였다.

Modulus of elasticity : $E = 2.1 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$

Mass density : $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$

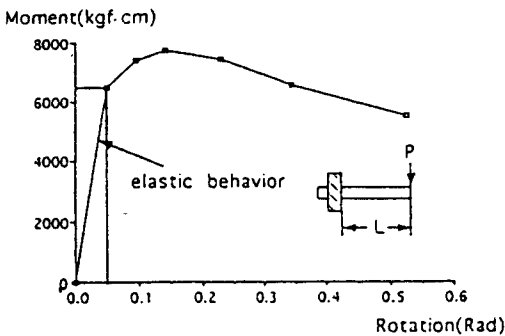


Fig. 2 Moment-rotation relation of joints

3.2 차체프레임구조물의 치수설계민감도

정적 좌굴하중에 대한 치수설계민감도를 구하기 위하여 FMVSS⁹⁾에서의 두 가지 하중조건 즉, 정면고정벽 충돌과 후면접근벽충돌에 대하여 치수설계민감도해석을 수행한다.

선형 차체구조물과 비선형 차체구조물의 좌굴하중에 대한 치수설계민감도를 구하여 Table 1과 2에 나타내었다.

치수설계민감도 해석결과를 세가지 설계섭동 즉, 1%, 0.1%, 0.01%에 대한 유한차분법의 결과와 비교하여 Table 3에 나타내었으며 마지막 칼럼에서 0.01% 설계섭동에 대하여 선형 차체프레임구조물은 정면고정벽충돌시 99.72%, 후면접근벽충돌시 99.78%, 비선형 차체프레임구조물은 정면고정벽충돌시 102.52%, 후면접근벽충돌시 101.68% 이므로 유한차분법의 결과와 본 치수설계민감도해석의 결과가 잘 부합됨을 알 수 있다.

4. 차체프레임구조물의 최적설계

4.1 차체프레임구조물의 설계최적화

충돌하중조건으로는 정면고정벽충돌과 후면접근벽충돌에 사용되는 하중을 설정하였으며 차체프레임구조물의 체적을 목적함수로 설정하고 좌굴구속조건으로는 임계하중을 설정하였다. 이 조건은 선형 차체프레임구조물과 비선형 차체프레임구조물에 동일하게 적용하며 최적설계는 다음과 같이 수식화된다.

설계변수 : $A_i, i = 1, 7$

목적함수 :
$$\psi^0 = \sum_{i=1}^7 L_i A_i \quad (9)$$

좌굴구속조건 :

$$\psi^1 = 1 - \frac{p_{cr}}{26000 \text{ kgf}} = 0$$

여기서 L_i 와 A_i 는 각각 i^{th} 번째 설계그룹의 길이와 횡단면적이다. 차체프레임구조물의 형상은 $L_1=270.7\text{cm}$, $L_2=139.1\text{cm}$, $L_3=168.5\text{cm}$, $L_4=108.8\text{cm}$, $L_5=105.7\text{cm}$, $L_6=115.2\text{cm}$, $L_7=217.1\text{cm}$ 이며 초기 설계변수는 $A_i=2.138\text{cm}^2, i=1-7$ 이다.

차체프레임구조물의 비선형성, 제한조건식 등을 고려하여 비선형 최적설계 기법인 미분벡터투영법을 사용하며 최적설계의 컴퓨터 흐름도는 Fig. 3과 같다.

4.2 결과와 검토

최적설계는 Fig. 4~5와 같이 선형 차체프레임구조물에

서 정면고정벽충돌시 10회, 후면접근벽충돌시 8회 반복 후에 수렴하고 비선형 차체프레임구조물에서 정면고정벽충돌시 8회, 후면접근벽충돌시 7회 반복후에 수렴하며 최적설계 과정의 체적과 좌굴구속조건에 대한 이력은 Table 4와 같다.

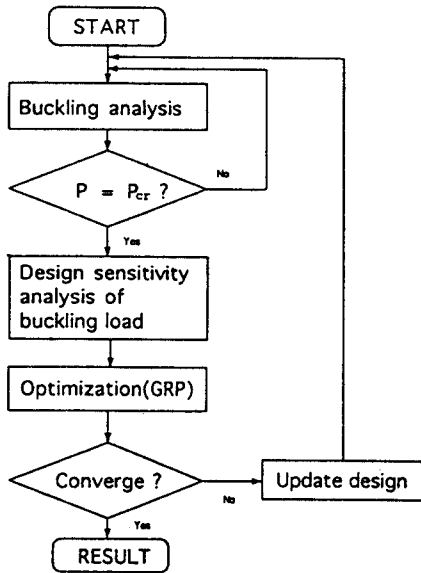


Fig. 3 Design optimization procedure for plane vehicle frame structures

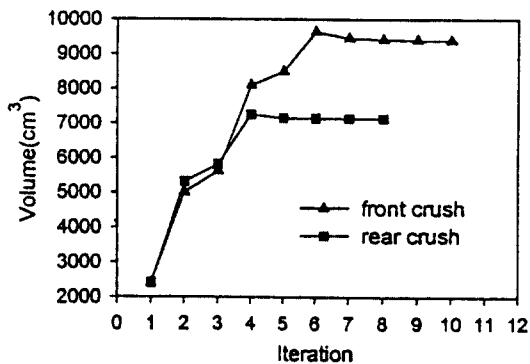


Fig. 4 Volume history of linear vehicle frame structure

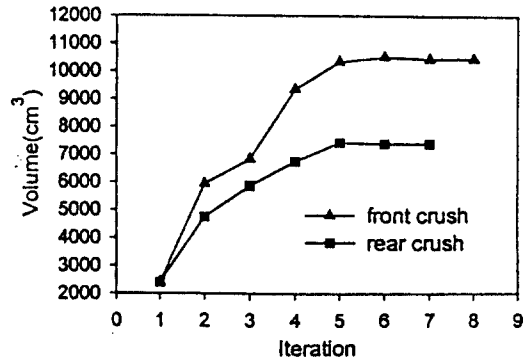


Fig. 5 Volume history of nonlinear vehicle frame structure

설계변수의 이력을 Table 5에 나타내었으며 선형 차체프레임구조물과 비선형 차체프레임구조물에서 정면고정벽충돌의 경우 A4인 Center Pillar의 횡단면적이 가장 크고, 후면접근벽충돌의 경우 A3인 Bottom rocker frame의 횡단면적이 가장 크며 하중조건에 민감한 반응을 보임을 알 수 있다.

미분벡터투영법을 이용한 최적설계 결과와 ANSYS의 최적설계 프로그램인 SUMT를 이용한 최적설계 결과를 비교하여 Table 6에 나타내었으며 하중조건에 따라 작은 편차를 보임으로서 비교적 잘 일치함을 알 수 있다.

5. 결론

평면 차체프레임구조물의 치수설계민감도해석을 수행하고 치수설계민감도 결과를 입력자료로 활용하여 최적설계를 수행한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

- 1) 치수설계민감도를 수행한 결과 하중조건과 경계조건에 따른 설계시 주요부분을 알 수 있었으며 그 결과를 토대로 최적설계를 함으로써 설계정보를 얻을 수 있었다.
- 2) 선형, 비선형 차체프레임구조물에 대해서 최적설계를 수행한 결과, 비선형 차체프레임구조물이 선형 차체프레임구조물보다 낮은 하중수준에서 좌굴이 일어남을 알 수 있었다. 이는 비선형성을 고려한 설계가 좌굴하중에 대해 안전한 설계가 되는 것을 알 수 있다.

3) 미분벡터투영법을 이용한 최적설계 결과와 ANSYS의 최적설계 프로그램인 SUMT를 이용한 최적설계 결과는 비교적 잘 일치함을 알 수 있었다.

참고 문헌

- 1) Choi, K. K., Haug, E. J., and Lam, H. C., "A Numerical Method for Distributed Parameter Structural Optimization Problems with Repeated Eigenvalues", Journal of Structural Mechanics, Vol. 10, No. 2, pp. 191-207, 1982.
- 2) Choi, K. K. and Santos, J. L. T., "Design Sensitivity Analysis of Non-linear Structural Systems Part I: Theory", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 24, pp. 2039-2055, 1987.
- 3) McIvor, I. K., Wienman, A.S. and Wang, H. C., "Plastic Collapse of General Frames", Int. J. Solids Structures, Vol. 13, pp. 197-210, 1977.
- 4) Chang, D. C., "A Design-Analysis Method for the Frontal-Crush Strength of Body Structures", SAE 770593.
- 5) Haug, E. J. and Arora, J. S., Applied Optimal Design, John Wiley & Sons, Inc., 1979.
- 6) Swanson, "ANSYS Ver 4.4 Manual", 1989.
- 7) J. S. Park and K. K. Choi, "Design sensitivity analysis and optimal design of nonlinear structural systems with critical loads" Technical Report R-58, 1989.
- 8) Choon T. Chon, Homa Mohammadtrab and Mohamed EI-Essawi, "Generic Stick Model of a Vehicle Structure", Vehicle Structural Mechanics Conference and Exposition, Detroit, Michigan, April 22-24, SAE 860825.
- 9) Kamal, M. M. and Lin, K. -H., "Collision Simulation", Modern Automotive Structural Analysis, Eds. M. M. Kamal and J. A. Wolf, Van Nostrand Reinhold Co., 1981.

Table 1 Design sensitivity history of design variable for linear vehicle frame structure

1) Front crush

| Iter | $\partial \beta / \partial A_1$ | $\partial \beta / \partial A_2$ | $\partial \beta / \partial A_3$ | $\partial \beta / \partial A_4$ | $\partial \beta / \partial A_5$ | $\partial \beta / \partial A_6$ | $\partial \beta / \partial A_7$ |
|------|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|
| 1 | -0.294D-01 | 0.163D+00 | 0.286D+00 | 0.763D-01 | 0.279D-01 | 0.627D-01 | -0.151D-02 |
| 2 | 0.137D+01 | -0.274D-02 | 0.420D-02 | -0.318D-01 | -0.334D-02 | 0.314D-01 | 0.248D-01 |
| 3 | 0.324D-01 | 0.150D-01 | 0.183D-01 | 0.123D+00 | 0.200D-01 | 0.340D-01 | -0.246D-02 |
| 4 | -0.330D-01 | -0.130D-01 | -0.209D-01 | -0.665D-02 | 0.857D-01 | 0.278D+00 | 0.854D-01 |
| 5 | -0.798D-01 | -0.134D-01 | 0.446D-02 | 0.224D-01 | 0.116D+00 | 0.245D+00 | -0.310D+00 |
| 6 | 0.125D-01 | 0.209D-03 | 0.166D-01 | 0.304D-01 | 0.513D-01 | 0.948D-01 | -0.138D+00 |
| 7 | 0.805D-02 | 0.762D-04 | 0.171D-01 | 0.305D-01 | 0.536D-01 | 0.984D-01 | -0.139D+00 |
| 8 | 0.807D-02 | 0.485D-03 | 0.178D-01 | 0.307D-01 | 0.525D-01 | 0.952D-01 | -0.132D+00 |
| 9 | 0.778D-02 | 0.563D-03 | 0.179D-01 | 0.308D-01 | 0.525D-01 | 0.947D-01 | -0.131D+00 |
| 10 | 0.755D-02 | 0.529D-03 | 0.179D-01 | 0.308D-01 | 0.527D-01 | 0.951D-01 | -0.132D+00 |

2) Rear crush

| Iter | $\partial \beta / \partial A_1$ | $\partial \beta / \partial A_2$ | $\partial \beta / \partial A_3$ | $\partial \beta / \partial A_4$ | $\partial \beta / \partial A_5$ | $\partial \beta / \partial A_6$ | $\partial \beta / \partial A_7$ |
|------|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|
| 1 | -0.132D-00 | -0.618D-02 | 0.228D+00 | 0.474D-01 | 0.158D-01 | 0.213D+00 | 0.777D-01 |
| 2 | -0.178D+01 | 0.212DD+00 | 0.328D+00 | -0.178D+00 | -0.275D+00 | -0.969D-01 | 0.736D-01 |
| 3 | 0.122D-02 | 0.101D+00 | 0.248D+00 | -0.711D-00 | -0.109D+00 | -0.533D-01 | 0.290D-01 |
| 4 | 554D-02 | 0.408D-01 | 0.208D+00 | -0.356D-01 | -0.523D-01 | -0.430D-01 | 0.115D-01 |
| 5 | 0.553D-02 | 0.426D-01 | 0.210D+00 | -0.367D-01 | -0.542D-01 | -0.431D-01 | 0.120D-01 |
| 6 | 0.551D-02 | 0.427D-01 | 0.210D+00 | -0.367D-01 | -0.542D-01 | -0.430D-01 | 0.120D-01 |
| 7 | 0.550D-02 | 0.428D-01 | 0.210D+00 | -0.367D-01 | -0.542D-01 | -0.430D-01 | 0.120D-01 |
| 8 | 0.550D-02 | 0.428D-01 | 0.210D+00 | -0.367D-01 | -0.542D-01 | -0.430D-01 | 0.120D-01 |

Table 2 Design sensitivity history of design variable for nonlinear vehicle frame structure

1) Front crush

| Iter | $\partial \beta / \partial A_1$ | $\partial \beta / \partial A_2$ | $\partial \beta / \partial A_3$ | $\partial \beta / \partial A_4$ | $\partial \beta / \partial A_5$ | $\partial \beta / \partial A_6$ | $\partial \beta / \partial A_7$ |
|------|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|
| 1 | -0.336D-01 | 0.109D+00 | 0.320D+00 | 0.958D-01 | 0.334D-01 | 0.735D-01 | -0.256D-02 |
| 2 | 0.239D+01 | -0.296D-04 | 0.574D-03 | -0.392D-02 | -0.129D-02 | 0.113D-02 | 0.100D-01 |
| 3 | 0.227D-01 | 0.100D-01 | 0.104D-01 | 0.133D+00 | 0.242D-01 | 0.301D-01 | -0.391D-02 |
| 4 | -0.265D+00 | -0.479D-01 | -0.340D-01 | -0.198D-01 | 0.179D+00 | 0.701D+00 | -0.639D+00 |
| 5 | 0.896D-02 | -0.467D-02 | 0.398D-03 | 0.107D-01 | 0.456D-01 | 0.121D+00 | 0.394D-01 |
| 6 | 0.134D-01 | -0.304D-02 | 0.355D-02 | 0.139D-01 | 0.429D-01 | 0.100D+00 | 0.244D-01 |
| 7 | 0.134D-01 | -0.327D-02 | 0.287D-02 | 0.128D-01 | 0.432D-01 | 0.104D+00 | 0.313D-01 |
| 8 | 0.134D-01 | -0.328D-02 | 0.284D-02 | 0.128D-01 | 0.432D-01 | 0.104D+00 | 0.315D-01 |

2) Rear crush

| Iter | $\partial \beta / \partial A_1$ | $\partial \beta / \partial A_2$ | $\partial \beta / \partial A_3$ | $\partial \beta / \partial A_4$ | $\partial \beta / \partial A_5$ | $\partial \beta / \partial A_6$ | $\partial \beta / \partial A_7$ |
|------|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|
| 1 | 0.592D-01 | 0.282D-02 | 0.289D+00 | 0.290D-01 | 0.100D-01 | 0.230D+00 | 0.816D-01 |
| 2 | 0.438D+00 | -0.466D+00 | -0.842D-01 | 0.587D+00 | 0.353D+00 | 0.858D-01 | -0.101D+00 |
| 3 | -0.503D-01 | 0.298D+00 | 0.412D+00 | -0.539D+00 | -0.455D+00 | -0.198D+00 | 0.107D+00 |
| 4 | 0.330D-01 | 0.144D+00 | 0.390D+00 | -0.400D+00 | -0.406D+00 | -0.185D+00 | 0.538D-01 |
| 5 | 0.373D-01 | 0.982D-01 | 0.359D+00 | -0.316D+00 | -0.335D+00 | -0.168+00 | 0.342D-01 |
| 6 | 0.373D-01 | 0.998D-01 | 0.360D+00 | -0.319D+00 | -0.337D+00 | -0.169D+00 | 0.349D-01 |
| 7 | 0.372D-01 | 0.996D-01 | 0.359D+00 | -0.318+00 | -0.337D+00 | -0.168D+00 | 0.349D-01 |

Table 3 Verification of design sensitivity of critical buckling loads using FDM

1) Front crush

| Linear vehicle frame structure | | | | | | Nonlinear vehicle frame structure | | | | |
|--------------------------------|--------------|----------------|-----------------|-----------|-------------------------|-----------------------------------|----------------|-----------------|-----------|-------------------------|
| Area | Perturbation | p_{cr} (kgf) | Δp_{cr} | p'_{cr} | $p'_{cr}/\Delta p_{cr}$ | Perturbation | p_{cr} (kgf) | Δp_{cr} | p'_{cr} | $p'_{cr}/\Delta p_{cr}$ |
| 2.1376 | | 5359.474 | | | | | 3892.882 | | | |
| 2.1590 | 1% | 5411.852 | 52.378 | 51.653 | 98.61% | 1% | 3902.012 | 9.13 | 9.432 | 103.31% |
| 2.1397 | 0.1% | 5364.692 | 5.218 | 5.1653 | 98.99% | 0.1% | 3893.798 | 0.916 | 0.9432 | 102.97% |
| 2.1378 | 0.01% | 5359.992 | 0.518 | 0.51653 | 99.72% | 0.01% | 3892.974 | 0.0942 | 0.09432 | 102.52% |

2) Rear crush

| Linear vehicle frame structure | | | | | | Nonlinear vehicle frame structure | | | | |
|--------------------------------|--------------|----------------|-----------------|-----------|-------------------------|-----------------------------------|----------------|-----------------|-----------|-------------------------|
| Area | Perturbation | p_{cr} (kgf) | Δp_{cr} | p'_{cr} | $p'_{cr}/\Delta p_{cr}$ | Perturbation | p_{cr} (kgf) | Δp_{cr} | p'_{cr} | $p'_{cr}/\Delta p_{cr}$ |
| 2.1376 | | 6554.340 | | | | | 6427.078 | | | |
| 2.1590 | 1% | 6655.980 | 101.59 | 99.398 | 97.83% | 1% | 6519.842 | 92.764 | 96.396 | 103.91% |
| 2.1397 | 0.1% | 6564.532 | 10.142 | 9.9398 | 98.00% | 0.1% | 6436.426 | 9.348 | 9.6396 | 103.12% |
| 2.1378 | 0.01% | 6555.386 | 0.996 | 0.99398 | 99.78% | 0.01% | 6428.026 | 0.948 | 0.96396 | 101.68% |

Table 4 Volume and constraint history of plane vehicle frame structure optimization

1) Front crush

| Iter. | Linear vehicle frame structure | | | Nonlinear vehicle frame structure | | |
|-------|--------------------------------|--------------------------|------------------|-----------------------------------|--------------------------|------------------|
| | p_{cr} (kgf) | Volume(cm ³) | Volume reduction | p_{cr} (kgf) | Volume(cm ³) | Volume reduction |
| 1 | 5359 | 2404.800 | 0 | 3893 | 2404.800 | 0 |
| 2 | 6335 | 5009.480 | 2604.680 | 2967 | 5941.700 | 3536.900 |
| 3 | 10917 | 5629.626 | 620.146 | 9484 | 6824.969 | 883.269 |
| 4 | 14187 | 8104.372 | 2474.746 | 13000 | 9343.887 | 2518.918 |
| 5 | 21420 | 8500.301 | 395.929 | 24644 | 10340.789 | 996.902 |
| 6 | 26855 | 9638.659 | 1138.358 | 26691 | 10509.431 | 168.642 |
| 7 | 26169 | 9450.560 | -188.099 | 26021 | 10452.119 | -57.312 |
| 8 | 26087 | 9418.545 | -32.015 | 26000 | 10450.149 | -1.970 |
| 9 | 26027 | 9400.157 | -18.388 | | | |
| 10 | 26000 | 9393.712 | -6.445 | | | |

2) Rear crush

| Iter. | Linear vehicle frame structure | | | Nonlinear vehicle frame structure | | |
|-------|--------------------------------|--------------------------|------------------|-----------------------------------|--------------------------|------------------|
| | p_{cr} (kgf) | Volume(cm ³) | Volume reduction | p_{cr} (kgf) | Volume(cm ³) | Volume reduction |
| 1 | 6554 | 2404.800 | 0 | 6427 | 2404.800 | 0 |
| 2 | 18599 | 5316.852 | 2912.052 | 12428 | 4744.638 | 2339.838 |
| 3 | 21083 | 5822.179 | 505.327 | 18721 | 5870.342 | 1125.704 |
| 4 | 26422 | 7264.767 | 1442.588 | 23214 | 6749.729 | 879.387 |
| 5 | 26053 | 7155.932 | -108.835 | 26177 | 7421.268 | 671.539 |
| 6 | 26024 | 7148.212 | -7.720 | 26025 | 7384.113 | -37.155 |
| 7 | 26010 | 7144.412 | -3.800 | 26000 | 7383.368 | -0.745 |
| 8 | 26000 | 7142.558 | -1.854 | | | |

Table 5 Design variable history of plane vehicle frame structure optimization(unit : cm²)

1) Front crush

| Iter. | Linear vehicle frame structure | | | | | | | Nonlinear vehicle frame structure | | | | | | |
|-------|--------------------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|-----------------------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| | A ₁ | A ₂ | A ₃ | A ₄ | A ₅ | A ₆ | A ₇ | A ₁ | A ₂ | A ₃ | A ₄ | A ₅ | A ₆ | A ₇ |
| 1 | 2.13 | 2.13 | 2.18 | 2.13 | 2.13 | 2.13 | 2.13 | 2.13 | 2.13 | 2.13 | 2.13 | 2.13 | 2.13 | 2.13 |
| 2 | 1.19 | 7.36 | 11.32 | 4.58 | 3.03 | 4.15 | 2.08 | 0.68 | 6.86 | 15.97 | 6.27 | 3.57 | 5.31 | 2.02 |
| 3 | 3.44 | 7.36 | 11.33 | 4.53 | 3.02 | 4.20 | 2.13 | 3.93 | 6.86 | 15.97 | 6.26 | 3.57 | 5.31 | 2.04 |
| 4 | 5.89 | 8.49 | 12.72 | 13.82 | 4.53 | 6.77 | 1.94 | 5.91 | 7.74 | 16.88 | 17.88 | 5.69 | 7.94 | 1.69 |
| 5 | 5.60 | 8.38 | 12.53 | 13.76 | 5.30 | 9.24 | 2.70 | 7.28 | 8.41 | 17.66 | 18.39 | 6.08 | 8.11 | 3.00 |
| 6 | 7.06 | 9.22 | 13.59 | 14.50 | 6.29 | 10.66 | 3.16 | 7.44 | 8.47 | 17.75 | 18.46 | 6.23 | 8.43 | 3.20 |
| 7 | 6.79 | 9.08 | 13.41 | 14.37 | 6.13 | 10.45 | 3.11 | 7.41 | 8.47 | 17.74 | 18.43 | 6.14 | 8.23 | 3.15 |
| 8 | 6.74 | 9.06 | 13.38 | 14.34 | 6.10 | 10.41 | 3.10 | 7.41 | 8.47 | 17.74 | 18.43 | 6.14 | 8.23 | 3.14 |
| 9 | 6.72 | 9.05 | 13.36 | 14.33 | 6.09 | 10.39 | 3.10 | | | | | | | |
| 10 | 6.71 | 9.04 | 13.36 | 14.32 | 6.08 | 10.38 | 3.10 | | | | | | | |

2) Rear crush

| Iter. | Linear vehicle frame structure | | | | | | | Nonlinear vehicle frame structure | | | | | | |
|-------|--------------------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|-----------------------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| | A ₁ | A ₂ | A ₃ | A ₄ | A ₅ | A ₆ | A ₇ | A ₁ | A ₂ | A ₃ | A ₄ | A ₅ | A ₆ | A ₇ |
| 1 | 2.13 | 2.13 | 2.13 | 2.13 | 2.13 | 2.13 | 2.13 | 2.13 | 2.13 | 2.13 | 2.13 | 2.13 | 2.13 | 2.13 |
| 2 | 5.30 | 1.98 | 7.61 | 3.27 | 2.51 | 7.24 | 3.99 | 3.36 | 2.19 | 8.10 | 2.73 | 2.34 | 6.88 | 3.82 |
| 3 | 6.02 | 2.20 | 7.81 | 3.68 | 2.98 | 7.61 | 4.51 | 4.72 | 3.23 | 9.12 | 3.08 | 2.78 | 7.50 | 5.12 |
| 4 | 7.95 | 3.17 | 8.92 | 4.47 | 3.77 | 8.45 | 6.04 | 5.86 | 3.99 | 10.05 | 3.26 | 2.99 | 7.89 | 6.11 |
| 5 | 7.80 | 3.09 | 8.83 | 4.41 | 3.71 | 8.39 | 5.92 | 6.76 | 4.49 | 10.70 | 3.53 | 3.25 | 8.23 | 6.84 |
| 6 | 7.79 | 3.09 | 8.82 | 4.41 | 3.71 | 8.38 | 5.92 | 6.71 | 4.46 | 10.66 | 3.51 | 3.24 | 8.21 | 6.80 |
| 7 | 7.79 | 3.09 | 8.82 | 4.41 | 3.71 | 8.38 | 5.91 | 6.71 | 4.46 | 10.66 | 3.51 | 3.24 | 8.21 | 6.80 |
| 8 | 7.79 | 3.08 | 8.81 | 4.41 | 3.71 | 8.38 | 5.91 | | | | | | | |

Table 6 Comparison of GRP and SUMT result for total volume(unit : cm³)

| Boundary condition | Linear vehicle frame structure | | Nonlinear vehicle frame structure | |
|--------------------|--------------------------------|------------|-----------------------------------|------------|
| | front crush | rear crush | front crush | rear crush |
| SUMT | 9393.712 | 7142.558 | 10450.149 | 7383.368 |
| GRP | 9882.330 | 7231.110 | 11131.000 | 7756.24 |
| Deviation(%) | 4.944 | 1.224 | 6.117 | 4.807 |