

〈論 文〉

연성효과에 의한 대형 구조물의 굽힘-비틀림 진동특성

Bending-Torsional Vibration Characteristics of Large Structures Influenced by Coupling Effects

송 창 용* · 손 충 열** · 송 재 영***

Chang-Yong Song, Choong-Yul Son and Jae-Young Song

(1996년 2월 15일 접수 ; 1996년 7월 26일 심사완료)

Key Words : Bending Vibration(굽힘 진동), Torsional Vibration(비틀림 진동), Coupling Effect(연성 효과), Transfer Matrix Theory(전달행렬법), Warping Effect(뒤틀림 효과), Noncontinuous Interface(불연속 경계면)

ABSTRACT

The channel type structure which has large openings is frail with respect to torsional strength, and the horizontal-torsional motion is highly coupled, because of the large difference between the centroid and the shear center. Also, a discontinuous boundary phase is came from tansition section between the opened section and the closed section. To analyze the Bending-Torsional coupled mode parameters for the channel type structure, the Transfer Matrix Method was used. Comparing the result of F. D. M, T. M. M yields good results in relatively low frequency region.

1. 서 론

대형선박, 항공기, 초고층 건축물 등은 얇은 박판 형태의 보로 이상화하여 구조 및 진동해석을 수행할 수 있다. 이러한 형태로 이상화한 구조물은 비틀림 강도면에서 매우 취약함을 보이고, 굽힘-비틀림 진동은 단면형상에 따라 연성도가 심화된다. 상하 굽힘진동은 탄성거동 영역에서 도심과 전단중심이 일치하는 대칭 진동(symmetric vibration) 현상을 보인다. 그러나, 수평 굽힘 진동은 도심과 전단중심의 차이가 커질수록 즉, 연성도가 높아질수록 비틀림

진동과 복합되어 복잡한 비대칭 진동(antisymmetric vibration)현상을 나타낸다. 본 논문에서는 연성효과에 의한 수평 굽힘 진동과 비틀림 진동 현상에 대한 연구를 수행하였고, 진동계산을 위해서 전달행렬법(transfer matrix method)을 사용하였다. 수치계산은 첫번째로, 도심과 전단중심의 차이가 매우 작아 연성도를 무시할 수 있을 정도의 구조물에 대해서 일반적인 수평 굽힘 진동 현상과 비틀림 진동 현상을 연구하였다. 두번째로, 연성도가 매우 심할 경우에 굽힘-비틀림 연성 진동 현상을 Timoshenko 보의 이론과 Vlasov 보의 이론에 따라 각각 계산을 수행하였다. 마지막으로, 첫번째와 두번째 구조를 결합한 경우에 대해서 굽힘-비틀림 연성 진동 현상을 연구하였다. 이 경우에 두 구조물의 결합부에서 비틀림 강성과 Warping 강성의 심한 변화로 인한 불연속 경계면이 발생하게 되고 이 때의 진동해석을 위해서

*인하대학교 대학원 선박공학과

**정회원, 인하대학교 선박해양공학과

***한국선급

보이론에 기초를 두고 상당히 높은 정확도를 제공하는 Haslum⁽²⁾ 등과 Pedersen⁽³⁾이 제시한 이론을 이용하였다.

2. 진동해석 이론 및 정식화

2.1 운동방정식 및 경계조건

구조물을 불균일 단면을 갖는 박판보로 모델링하면 임의의 미소단면에 대한 좌표와 단면력은 Fig. 1과 같다.

양단 자유이고 길이가 L 인 Timoshenko 보의 임의의 미소단면에 대한 수평-비틀림 연성 고유진동에 대한 운동방정식은 다음과 같다.

$$m_n \left\{ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + (c_n + e_n) \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right\} - \frac{\partial}{\partial z} \left\{ k_n A_n G \left(\frac{\partial y}{\partial z} - \phi \right) \right\} = 0 \quad (1)$$

$$I_{xn} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial z} \left(EI_n \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) - k_n A_n G \left(\frac{\partial y}{\partial z} - \phi \right) = 0 \quad (2)$$

$$I_{zn} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + m_n (c_n + e_n) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial z} \left(GJ_n \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) = 0 \quad (3)$$

여기서, m_n 은 단위길이당 질량, c_n 은 단면의 도심, y 는 Y 축 방향의 수평 굽힘 변위이고 ψ 와 ϕ 는 전단중심선의 굽힘 기울기와 Z 축에 대한 비틀림각 변위를 나타낸다. 또한, Vlasov 보의 운동방정식은 다음과 같다.

$$m_n \left\{ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + (c_n + e_n) \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right\} = 0 \quad (4)$$

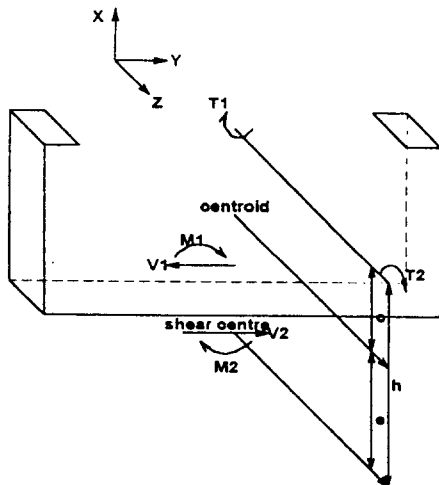


Fig. 1 Coordinates and stress resultant

$$I_{xn} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{EI_n}{1-\nu^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) = 0 \quad (5)$$

$$I_{zn} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + m_n (c_n + e_n) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial z} \left(GJ_n \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(I_w \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right) = 0 \quad (6)$$

여기서, ν 는 Poisson's ratio이고 I_w 는 Warping 관성을 나타낸다. Vlasov 보의 이론은 Timoshenko의 보이론이 전단강성의 영향을 도입한 반면에 전단강성의 영향을 무시하고 Warping 관성을 고려하였다. 또한, Vlasov 보의 이론은 다음과 같은 구조물에 대해 적용하여야 만족스러운 결과를 얻을 수 있다⁽⁹⁾.

$$\frac{\text{Wall Thickness}}{\text{Breadth}} \leq \frac{1}{10}, \quad \frac{\text{Breadth}}{\text{Length}} \leq \frac{1}{10}$$

단면력과 변위 사이의 관계식은

$$V = k_n A_n G \left(\frac{\partial y}{\partial z} - \phi \right) \quad (7)$$

$$M = EI_n \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (8)$$

$$T = GJ_n \frac{\partial \phi}{\partial z} - EC_{wn} \frac{\partial^3 \phi}{\partial z^3} \quad (9)$$

$$M_w = -EC_{wn} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \quad (10)$$

이며, 여기서 $k_n A_n G$, EI_n , GJ_n , EC_{wn} 은 각각 임의의 단면에서의 전단강성, 굽힘강성, St. Venant 비틀림강성, Warping 강성을 나타낸다. 보에 대한 경계조건은 양단 자유로 하였으며, 관계식은 다음과 같다.

$$\begin{cases} V |_{z=0, z=L} = 0 \\ M |_{z=0, z=L} = 0 \\ T |_{z=0, z=L} = 0 \\ M_w |_{z=0, z=L} = 0 \end{cases} \quad (11)$$

2.2 전달행렬식

식 (1) ~ (10)이 고유치 문제를 풀기 위한 특정방정식으로 유도되기 위해 다음과 같이 방정식들의 일반해를 가정한다.

$$\begin{cases} y = y e^{i\omega t} \\ \psi = \psi e^{i\omega t} \\ \phi = \phi e^{i\omega t} \\ V = V e^{i\omega t} \\ M = M e^{i\omega t} \\ T = T e^{i\omega t} \\ M_w = M_w e^{i\omega t} \end{cases} \quad (12)$$

이러한 일반해를 식 (1)~(10)에 대입하여 일반적인 전달행렬 정식화 과정을 거치면 다음과 같은 1차 미분방정식의 형태로 나타낼 수 있다.

$$\frac{dZ}{dz} = C_n Z \quad (13)$$

여기서, C_n 은 계수행렬, 즉 전달행렬(transfer matrix)이고 Z 는 구하고자 하는 상태벡터(state vector)로서 다음과 같이 표현된다.

$$C_n = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{b^*} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{kAG^*}{b^*k_nA_nG} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EI^*}{b^*EI_n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{b^*} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-b^*GJ^*}{EC_{wn}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-GJ_n}{b^*GJ^*} & 0 & \frac{1}{b^*} & 0 & 0 \\ \frac{-m_n\omega^2 h_n b^{*2}}{GJ^*} & 0 & \frac{-I_{xn}\omega^2 b^*}{GJ^*} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-I_{xn}\omega^2 b^*}{EI^*} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-b^*kAG^*}{EI^*} \\ \frac{-m_n\omega^2 b^*}{kAG^*} & 0 & \frac{-m_n\omega^2 h_n l}{kAG^*} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$Z = \left\{ \frac{y}{b^*} \phi \phi' b^* \phi' \frac{M_w}{GJ^*} \frac{b^*T}{GJ^*} \frac{b^*M}{EI^*} \frac{V}{kAG^*} \right\}^T \quad (15)$$

1차 미분방정식에 대한 일반해를 다음과 같이 표현한다.

$$Z(z) = e^{C_n z} Z \quad (16)$$

여기서 $e^{C_n z}$ 를 Taylor series expansion시키면,

$$F_n(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!} C_n^k \quad (17)$$

이다. 1부터 L 까지 전 영역에 대해서 확장시키기 위해서 구조물을 적정 갯수의 분할요소로 나누고, 그때의 전 영역에 대한 전달행렬식은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$Z_{n+1}^L = F_n(l_n) Z_n^R = I + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{l_n^k}{k!} C_n^k \quad (18)$$

여기서, I 는 단위행렬, l_n 은 임의의 분할요소의 길이를 나타낸다.

2.3 불연속 경계면에 대한 고려

폐단면(closed section)과 개단면(open section) 사이, 즉 연성도의 차이가 급속히 변화하는 변이 부분

에서는 전단중심이 급속하게 변화하며 이로 인하여 비틀림 강성과 Waring 강성의 변화가 심해지는 불연속 경계면이 발생하게 된다. 따라서, 이러한 불연속 경계면에 대해서 단면력과 변위에 대한 적절한 연속성이 주어지도록 고려되어야 한다. 경계면을 n 이라고 가정하고 그때의 단면력과 변위간의 관계식을 다음과 같다.

$$\begin{cases} \phi_n^R = \phi_n^L \\ \phi_n^R = \phi_n^L \\ M_n^R = M_n^L \\ V_n^R = V_n^L \end{cases} \quad (19)$$

두 요소 사이의 전단중심의 차이로 인한 불연속성에 대해서는 굽힘변위와 비틀림 모멘트에 대한 수정을 다음과 같이 고려한다.

$$\begin{cases} y_n^R = y_n^L + \phi_n^L (e_{n-1} - e_n) \\ T_n^R = T_n^L + V_n^L (e_n - e_{n-1}) \end{cases} \quad (20)$$

Bimoment와 이에 대응하는 변위 ϕ' 에 대해서는 Waring의 연속성을 만족시킬 수 있는 근사적인 방법을 다음과 같이 고려한다.

$$\begin{cases} \phi_n^R = \alpha \phi_n^L \\ M_w^R = \frac{1}{\alpha} M_w^L \\ \alpha = \sqrt{\frac{C_{wn}}{C_{wn+1}}} \end{cases} \quad (21)$$

여기서, α 는 Waring Compatibility Factor로서 불연속 경계면을 갖는 두 요소 사이의 강제 움직임을 무시하고 전단중심에서 Bimoment와 ϕ' 를 근사적으로 만족시켜 주는 계수이다. 식 (19)~(21)을 상태벡터 Z 와 격점행렬(point matrix) P 를 이용하여 표현하면 다음과 같다.

$$Z_n^R = P_n Z_n^L \quad (22)$$

이고, 여기서 격점행렬은 다음과 같은 행렬식으로 표현된다.

$$P_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{e_{n-1} - e_n}{b^*} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\alpha} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & \frac{kAG^* b^*}{GJ^*} (e_n - e_{n-1}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (23)$$

2.4 고유 진동수와 고유 모드

식 (11)의 경계조건식을 적용하여 첫번째 단과 끝 단에서의 행렬 U_0 와 U_L 을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$U_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad U_L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (24)$$

2.2절에서 구한 전달행렬을 U_n 이라고 표시하고, 2.4 절에서 구한 격점행렬 P_n 과 양단에 대한 경계조건 행렬 U_0, U_L 을 고려하여 전 영역에 대한 행렬식 형태로 표현하면,

$$U_L (U_n \cdot P_n \cdot U_{n-1} \cdots P_2 \cdot U_1) U_0 \begin{bmatrix} y \\ \psi \\ \phi \\ \phi' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

이고, 상태벡터 $\{y, \psi, \phi, \phi'\}^T$ 가 0이 아닌 값으로 존재하기 위해서는 다음과 같은 관계식을 만족해야 한다.

$$\det |U_L (U_n \cdot P_n \cdot U_{n-1} \cdots P_2 \cdot U_1) U_0| = 0 \quad (26)$$

따라서, 식 (26)에서 고유진동수를 계산하고, 구해진 고유진동수로부터 식 (25)를 이용하면 각 분할요소에서의 상태벡터의 값들이 결정되며, 이것을 통해 각 고유진동수에 대한 고유모드를 구할 수 있다.

3. 수치계산

3.1 상자형 균일 보

도심과 전단 중심의 차이가 매우 작아 연성도를 거의 무시할 수 있을 정도의 구조물의 굽힘 진동과 비틀림 진동 현상을 알아보기 위하여 상자형 균일 보에 대해서 수치계산을 수행하였고, 보의 특성치는 다음과 같다.

Length=208 m

Mass per Unit Length=214 Ton/m

Distance between Shear Centre and Mass Centre=2 m

Mass Polar Moment of Inertia=2.08E+04 Ton m²/m

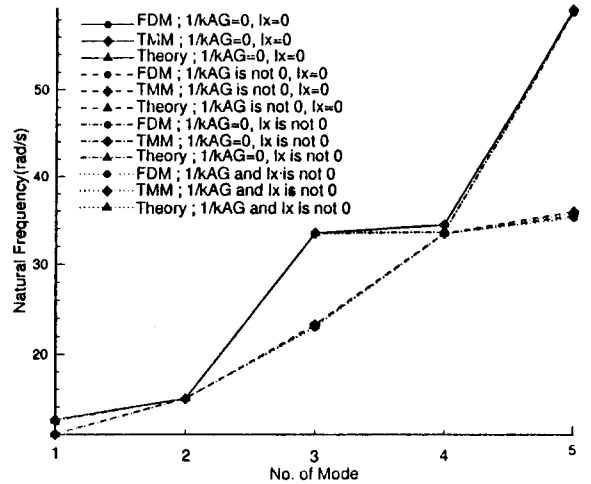


Fig. 2 Natural frequencies for uncoupled horizontal vibration(rad/sec)

Rotary Inertia=4844 Ton m²/m

Bending Rigidity=1.305E+10 Ton m²

Effective Shear Area=1.36 m²

Shear Modulus=0.81E+07Ton/m²

St. Venant Torsional Rigidity=1.93E+09 Ton m²

Warping Rigidity=1.306E+12 Ton m⁴

이러한 특성치를 갖는 상자형 균일 보에 대한 수치 계산 조건은 Timoshenko 보 이론을 바탕으로 비연성 수평진동, 비연성 비틀림 진동, Warping 강성을 고려하였을 때와 고려하지 않았을 때의 연성 수평-비틀림 진동계산을 20개의 분할요소로 나눈 전달행렬법에 의해 각각 수행하였다. 또한, 각각의 결과를

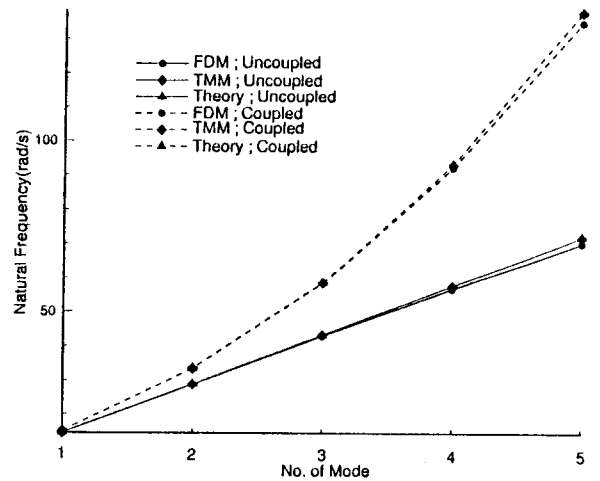


Fig. 3 Natural frequencies for uncoupled torsional vibration(rad/sec)

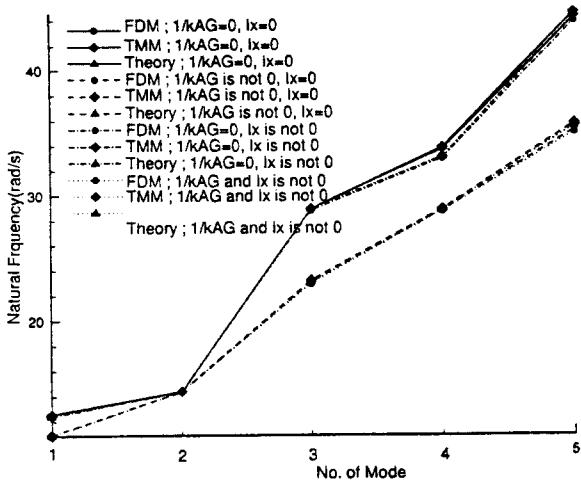


Fig. 4 Natural frequencies for coupled bending and twisting vibration with zero warping stiffness(rad/sec)

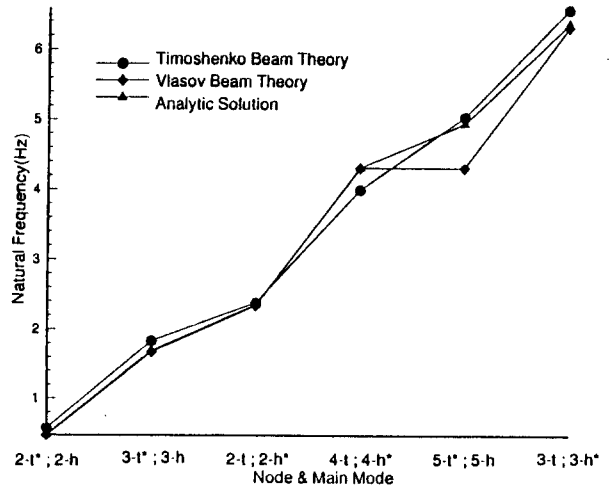


Fig. 6 Coupled bending-torsional vibration for a channel type uniform beam(t: torsional mode, h: horizontal bending mode, *: main mode)

전단변형과 회전관성 모두 고려하지 않은 경우, 전단변형만을 고려한 경우, 회전관성만을 고려한 경우, 그리고 전단변형과 회전관성 모두 고려한 경우로 나누어 계산하였다. 그 결과를 유한차분법(finite difference method)에 의한 계산 결과, 이론적인 해석해의 결과⁽⁸⁾와 비교하여 Figs. 2~5에 나타내었다. Figs. 2~5의 결과로부터 전달행렬법에 의한 수치계산은 매우 정확함을 알 수 있다. 예를 들어 Fig. 2에서 5차 모드의 경우 유한 차분법에 의한 결과는 이론치와 3.5% 오차가 있는 반면 전달행렬법에 의한 결과는 거의 오차가 없는 것으로 나타난다. 계산결

과로부터 구조물이 굽힘 거동을 할 경우에는 저차진동 영역에서 회전관성의 영향은 거의 무시할 수 있을 정도이고 전단변형의 영향이 지배적이라는 것을 알 수 있다. 또한, 비틀림 거동을 할 경우에는 Warping의 영향이 매우 큼을 알 수 있다. 수평과 비틀림 진동의 이러한 특징을 Fig. 8에 도식적으로 나타내었다. 고유모드 곡선은 Fig. 5에서 전단변형과 회전관성을 모두 고려하였을 경우에 4차까지의 진동수에 대해서 Fig. 9에 나타내었다.

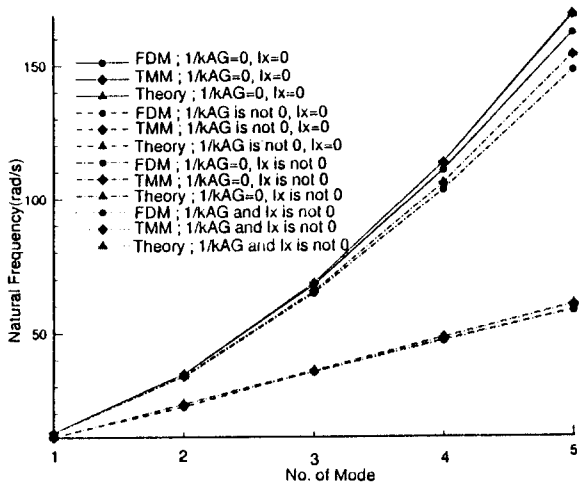


Fig. 5 Natural frequencies for coupled bending and twisting vibration with warping stiffness(rad/sec)

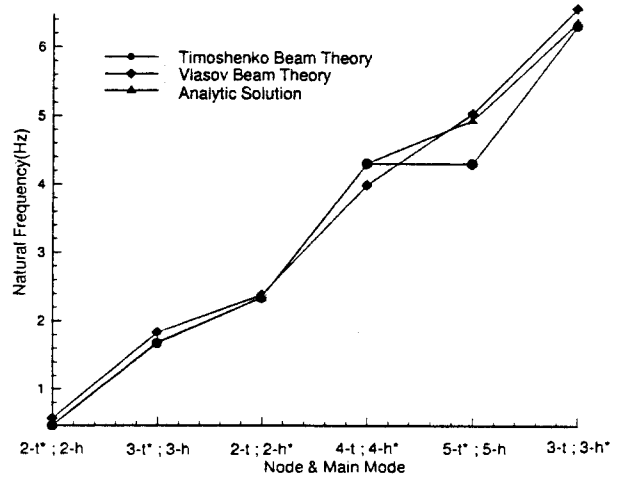


Fig. 7 Coupled bending-torsional vibration for a nonuniform beam(t: torsional mode, h: horizontal bending mode, *: main mode)

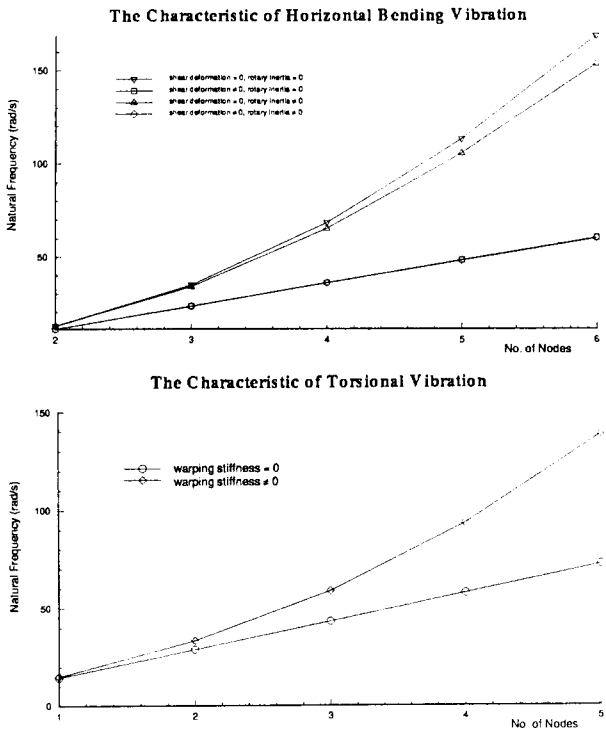


Fig. 8 Parametric analysis for the bending and torsional analysis

3.2 Channel형 균일 보

도심과 전단중심의 차이가 매우 크고, 따라서 연성도가 매우 높은 경우의 구조물의 굽힘-비틀림 연성 진동 현상을 알아보기 위하여 Channel형의 보에 대해서 수치계산을 수행하였고, 보의 특성치는 다음과 같다.

Length = 100 m

Mass per Unit Length = 157.5 Ton/m

Distance between Shear Centre and Mass Centre = 15.248 m

Mass Polar Moment of Inertia = $1.68E+04$ Ton m^2/m

Rotary Inertia = 3244 Ton m^2/m

Bending Rigidity = $4.799E+9$ Ton m^2

Effective Shear Area = 1.52 m^2

Shear Modulus = $0.81E+07$ Ton m^2

St. Venant Torsional Rigidity = $2.03E+04$ Ton m^2

Warping Rigidity = $2.736E+11$ Ton m^4

이러한 특성치를 갖는 보의 굽힘-비틀림 연성 진동 계산은 Timoshenko 보 이론과 Vlasov 보 이론에 따라 각각 계산하였고, 이론적인 해석 해와 비교하여 Fig. 6에 나타내었다. 계산결과로부터 Vlasov 보

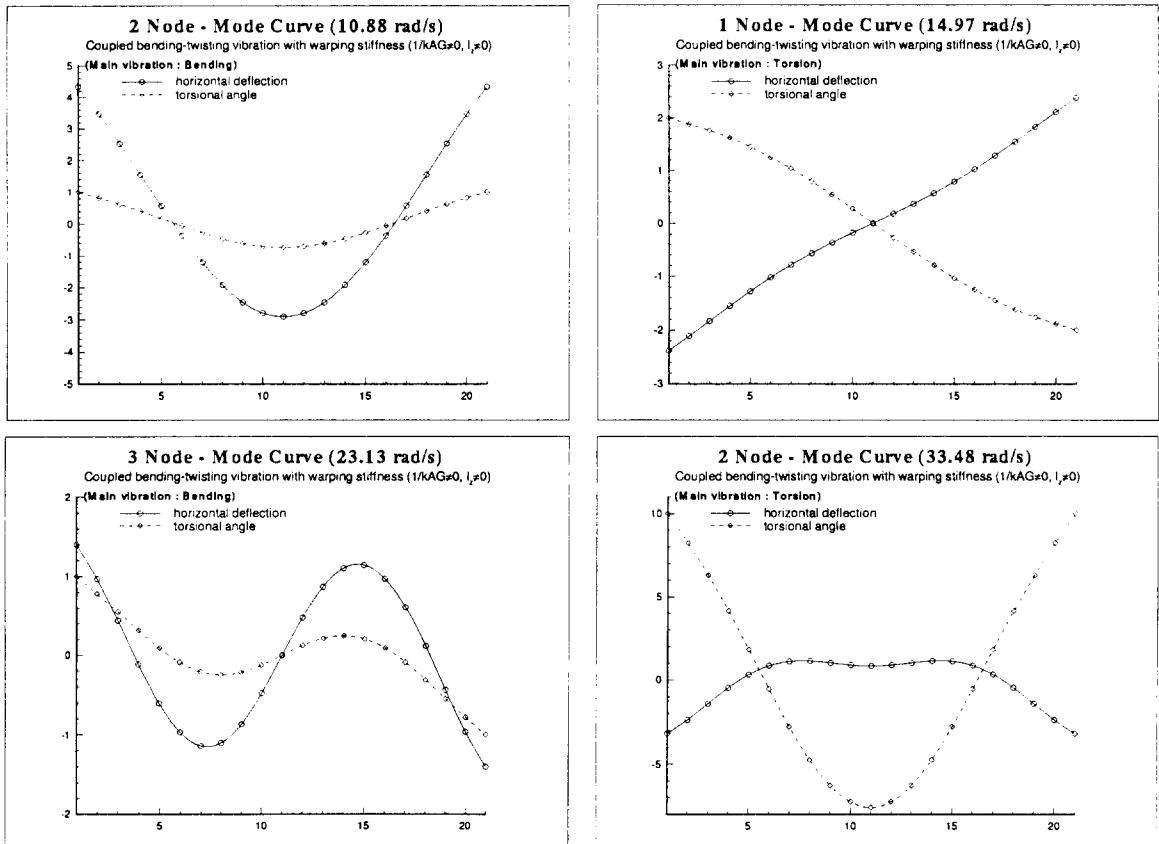


Fig. 9 Mode curves for a box-like uniform beam

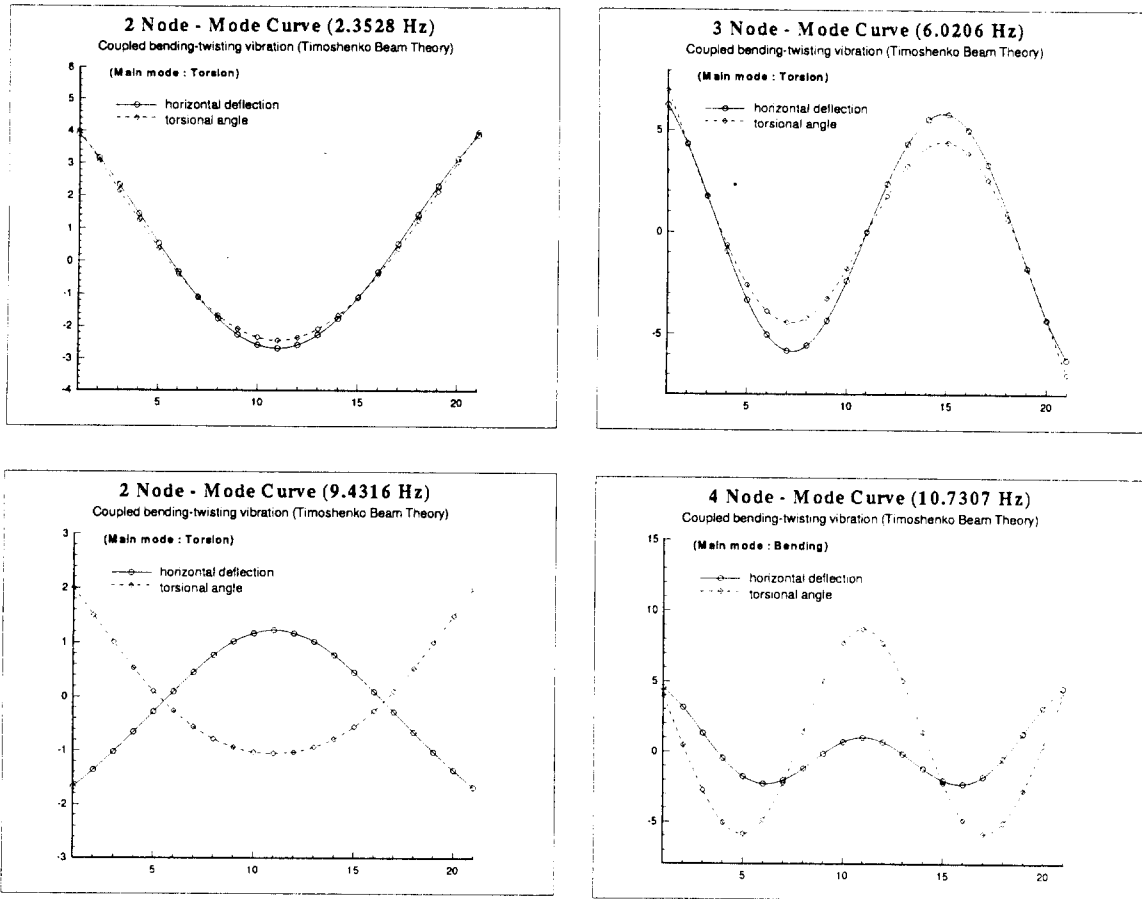


Fig. 10 Mode curves for a channel-type uniform beam

이론에 따른 굽힘-비틀림 연성 진동수는 3차 정도까지 정확도가 인지된다. 고유모드 곡선은 Timoshenko 보 이론으로 계산된 결과에 대해서 작성해 보았는데, 비틀림 거동이 지배적임을 알 수 있었고, 4차까지의 모드곡선을 Fig. 10에 나타내었다.

3.3 불균일 보

가장 일반적인 형태인 불균일 형상을 갖는 구조물의 굽힘-비틀림 연성 진동 현상을 알아보기 위하여 3.1절과 3.2절의 보를 각각 길이 100 m로 하여 연결시켰다. 3.1절의 보의 연성도가 매우 낮고, 3.2절의 보의 연성도가 매우 높기 때문에 두 구조물의 연결 부분에서는 심한 불연속 경계면이 발생하게 된다. 따라서, 수치계산은 Timoshenko 보 이론을 근거로 하여 불연속 경계면에 대해서 연속조건을 고려하지 않았을 때와 연속조건을 고려하였을 때로 나누어 계산을 수행하였고, 상용 유한요소해석 프로그램인 EMRC/NISA II (Ver. 92.0)를 이용하여 계산된 결과와 비교하였다. 비교 계산결과를 Fig. 7에 나타내

었다. 계산결과로부터 불연속 경계면이 발생하는 구조물의 굽힘-비틀림 연성 진동 계산을 위해서는 연속조건을 고려가 필요함을 알 수 있다. 고유모드 곡선은 연속조건을 고려하였을 때 4차까지의 모드곡선을 Fig. 11에 나타내었다.

4. 결 론

앞에서 수행된 수치계산 결과를 통해서 얻은 몇 가지 결론은 다음과 같다.

- (1) 보로 이상화된 구조물의 저차 고유진동 해석의 경우에 굽힘거동 영역에서 회전관성의 영향은 무시할 수 있을 정도로 작지만, 전단변형의 영향은 매우 크고 비틀림거동 영역에서는 Warping의 영향이 매우 큼을 알 수 있다.
- (2) 연성도가 매우 높은 구조물의 굽힘-비틀림 연성 진동 해석을 위한 Vlasov 보의 이론은 3차 정도의 저차 영역에서 정확도가 인지된다.
- (3) 연성도가 급격히 변화하는 구조물의 굽힘-비

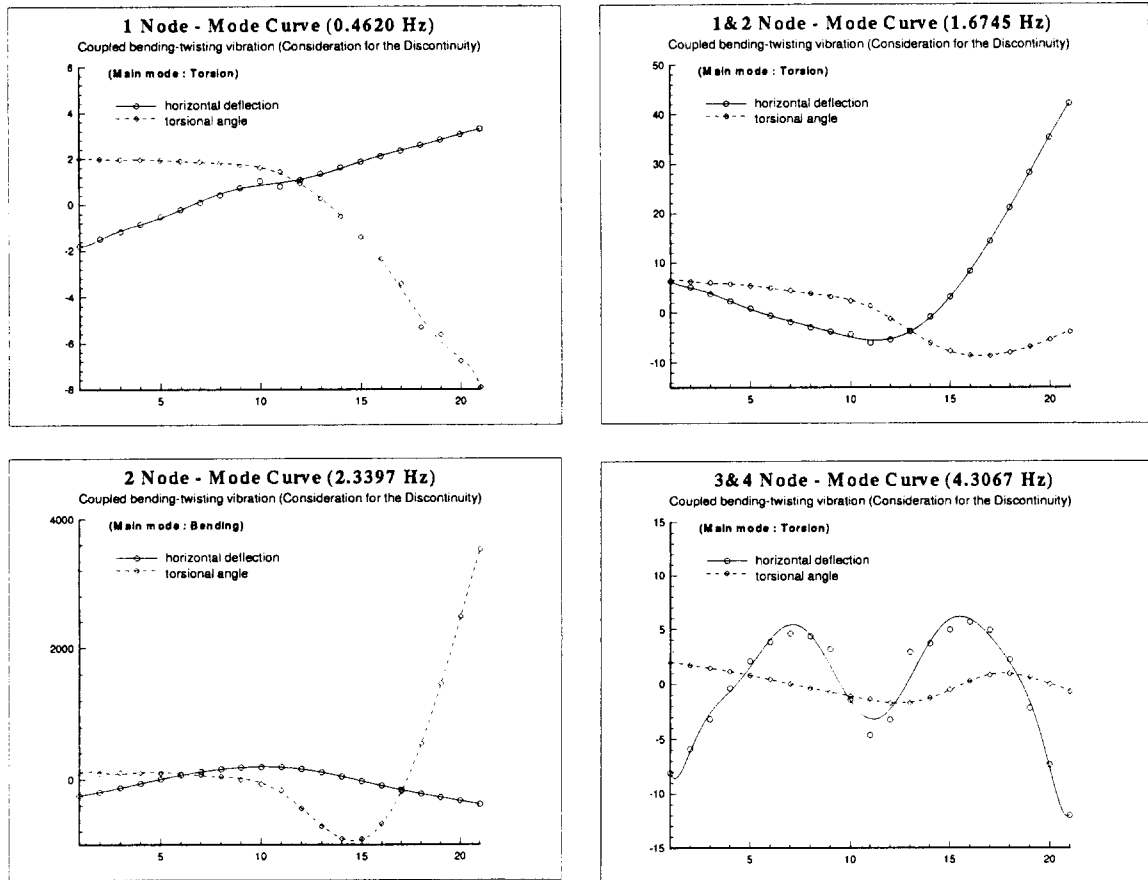


Fig. 11 Mode curves for a non-uniform beam

틀림 연성 진동해석을 위해서는 불연속 경계면에서 연속조건을 고려하여 해석하는 것이 정확도가 높다.

참고문헌

- (1) Chen, X. and Tamma, K. K., 1992, "Dynamic Response of Elastic Thin-Walled Structures Influenced by Coupling Effects," Computers & Structures.
- (2) Haslum, K. and Tonnessen, A., 1972, "An Analysis of Torsion in Ship Hulls," European Shipbuilding, No. 5/6.
- (3) Pedersen, P. T., 1983, "A Beam Model for the Torsional-Bending Responses of Ship Hull," Trans. of RINA.
- (4) Bishop, R. E. D., Price, W. G. and Temarelt, P., 1979, "Antisymmetric Vibration of Ship Hulls," Trans. of RINA.
- (5) Shimizu, S., Teramae, T. and Minematsu, H., 1977, "A Study on the Horizontal and Torsional Vibration of Container Ships," Jour. of SNA Japan, Vol. 141.
- (6) Huang, T. C., 1961, "The Effect of Rotary Inertia and of Shear Deformation on the Frequency and Normal Mode Equations of Uniform Beams with Simple End Conditions," Jour. of Applied Mechanics, ASME, Vol. 28, No. 4.
- (7) Bishop, R. E. D., Price, W. G. and Xi-Cheng, Z., 1983, "Lateral and Torsional Vibrations in Channel Section Beams of Ship-Like Proportions," Practical Design in Shipbuilding, Tokyo & Seoul.
- (8) Timoshenko, S. P., 1974, "Vibration Problems in Engineering," John Wiley & Sons.
- (9) Vlasov, V. Z., 1961, "Thin Walled Elastic Beams," Israel Program for Scientific Translation.