

〈論 文〉

일단고정-일단자유 원통 셸의 진동 해석

Free Vibration Analysis of Clamped-Free Circular Cylindrical Shells

임 정 식*

Jeong Sik Yim

(1995년 7월 26일 접수 ; 1996년 1월 26일 심사완료)

ABSTRACT

Frequency equation for clamped-free circular cylindrical thin shell is derived by the application of Rayleigh-Ritz method using the Sanders shell equation. The cubic frequency equation is solved for each axial and circumferential mode number. Integration of the beam characteristic functions was performed via Mathematica which results in more accurate integration of the beam functions that affect the accuracy of the frequency. The natural frequencies from this calculation are compared with existing results. It shows that this calculation predicts natural frequencies closer to the test results than existing results.

기 호 설 명

- x, θ, z : 셸 좌표
- ρ_s : 셸의 밀도
- n : 원주방향 모드 수
- ν : 푸아송 비
- h : 셸 두께
- a : 셸 반경
- L : 셸 길이
- u, v, w : 셸의 변위(길이방향, 원주방향, 반경방향)
- α : $\frac{Eh}{2a(1-\nu^2)}$
- β : $h^2/(12 a^2)$
- Δ : 진동수 매개 변수 $\rho a^2 \frac{(1-\nu^2)}{E} \omega^2$
- E : 영 계수
- G : 전단 탄성 계수
- m_s : 셸의 질량
- $e_{\theta}, e_{\phi}, e_{\psi}, \gamma_{\theta\phi}$: 변형률 (x, y, z direction, shear)
- $\sigma_{\theta}, \sigma_{\phi}, \sigma_{\psi}, \tau_{\theta\phi}$: 응력 (x, y, z direction, shear)
- U : 변형에너지
- T : 운동에너지

1. 서 론

일단고정-일단자유(Clamped-Free: C-F)인 외팔형 셸은 연통 및 지지구조물로써 주변에서 흔히 볼 수 있는 구조물이며 이러한 구조물의 진동특성을 예측하는 것은 구조물의 공진과 관련한 안전성을 평가하는데 필수적이다. 지금까지 이러한 구조물의 연구 동향은 도처에서 볼 수 있으며, 이들 중 Sharmal⁽¹⁾는 Flugge의 셸 이론을 사용하여 일단고정-일단자유 외팔형 셸의 외팔 경계조건을 갖는 원통 셸에 대하여 에너지 법과 Rayleigh-Ritz 법을 적용하여 이론적인 해를 구하여 그 특성을 고찰하였고, 직경에 비하여 상대적으로 길이가 긴 원통 셸에서 원주방향 변형 및 전단 변형이 없다는 가정을 도입하여 해를 단순화시킨 이론 식을 유도하였다. 참고문헌 (2)와 (3)에서는 Budyansky와 Sanders의 셸 이론을 사용하여 외팔 경계조건을 갖는 셸의 자유진동을 해석하고 진동수 매개변수(frequency parameter)에 대해 단순화시킨 선형관계식을 유도하였으며 파수(wave number)변화에 따른 여러 가지의 반경/두께 비 및 길이/반경 비에 대하여 진동수를 구하여 근사해와 엄밀해와의 차이를 심도 있게 분석하였다. 참고문헌 (4)에서는 일

*한국원자력연구소

단고정-일단자유의 외팔 경계조건 및 끝단에 보강 링을 갖는 원통 셀에 대해 Flugge의 셀 이론을 사용하고 Rayleigh-Ritz 법으로 근사해를 유도하고 수치해를 얻은 후 Timoshenko-Love 이론의 결과와 비교하였으며 길이가 길은 셀에 대해서는 원주방향과 전단변형이 없다는 가정의 도입은 큰 오차를 발생하지 않고 해를 단순화시킴을 밝히고, Timoshenko-Love 이론보다는 Flugge 이론이 좀 더 정확한 결과를 제공하고 길은 셀에 대해서 끝단의 링 강성은 흔들림 모드(swaying mode)나 타원모드에 주는 영향은 적지만 짧은 셀에서는 타원모드 진동수에 큰 영향을 주는 것임을 밝히고 있다. 참고문헌 (5)에서는 외팔형 원통 셀에 대해 Rayleigh-Ritz 법 및 축대칭 유한요소를 사용한 결과 및 지배방정식으로부터 얻은 엄밀해와의 비교를 수행하여 사용된 방법 사이에 연관관계가 있음을 보이고 링의 효과에 대해서도 언급하고 있다. 한편 Johns⁽⁶⁾는 하단이 고정되고 상단이 보강된 연통과 같은 길은 원통 셀에 대한 자유진동 연구를 수행하여 edge 경계조건의 영향, 특히 축방향 구속과 보강 링 강성의 영향을 연구하여 고유진동수의 정확한 예측을 위해서는 하단고정의 경계조건을 포함해야 함을 밝히고 있다. 또한 Warburton과 Higgs⁽⁷⁾는 Flugge 운동방정식을 직접 풀은 결과와, Rayleigh-Ritz 방법으로 외팔 원통 셀의 고유진동수를 얻은 결과를 비교하여 사용된 근사 방법의 정확함을 보여주었다.

국내의 연구동향으로는 이 영신 등⁽⁸⁾이 직교이방성 외팔 원통 셀의 자유진동해석에 대하여 고찰하였고, 염 기연 등⁽⁹⁾ 및 김태룡 등⁽¹⁰⁾은 내부가 유체로 채워진 보강 원통셀의 동적 해석을 실험적 및 상용 전산 코드인 ANSYS 코드를 이용하여 해석 고찰한 바 있으며, 정 경훈 등⁽¹¹⁾은 Fourier 급수전개를 이용한 부분적으로 유체가 채워진 원통 셀의 고유진동해석을 수행하였다.

한편 빔의 진동특성 함수를 이용하는 Rayleigh-Ritz 법에서는 진동수 방정식의 전개 및 해를 얻는 과정에서 셀의 길이에 걸친 빔 특성 함수 (beam characteristic function)의 적분이 필요하게 되며 이 적분의 해석적인 과정을 참고문헌 (12)에서 자세히 언급하고 있고 이의 해석 결과는 삼각 함수를 포함하는 적분을 셀의 길이에 걸쳐 수행하게 되므로써 대단히 복잡한 형태를 나타낸다.

이상의 연구동향에서 살펴본 대로 외팔 원통 셀의 경우 고유진동수 계산은 외팔 빔의 특성 함수를 이용하는 변위 항을 가정하여 이 가정된 변위를 운동

방정식에 대입하고 Rayleigh-Ritz 법을 적용하여 3×3 진동수 방정식을 구한 후 이 진동수 방정식을 전개한 3차 방정식을 풀어서 세 개의 진동모드에 해당하는 진동수를 구하고 있다.

본 연구에서는 외팔 경계조건을 갖는 원통 셀에 대하여 Sanders의 셀 이론 식을 이용하고 에너지 방정식에 기초한 Rayleigh-Ritz 법을 적용하여 얻은 3×3의 진동수 방정식을 전개하여 각각의 진동모드에 해당하는 진동수 및 변형 에너지를 구하였다. 여기서 진동수 방정식의 유도과정과 함께 빔 함수의 적분을 수식전개에 따른 번거로움과 오류를 줄이기 위해 Mathematica⁽¹³⁾를 이용하여 기호화한 적분 (symbolic intergration)을 수행하고 이의 결과를 프로그램에 직접 삽입하므로써 외팔 원통 셀의 진동수를 보다 정확하게 얻을 수 있는 방법을 사용하였고 이러한 방법의 적합성 및 정확성을 검토하기 위하여 빔 함수의 적분값 및 계산된 진동수를 기존의 실험 결과를 포함하는 해석결과와 비교하였다. 이 결과 본 연구에서 사용한 방법과 절차에 의한 수치 결과는 기존의 실험결과에 보다 더 잘 일치함을 보이고 기존의 해석적인 결과와도 무시할 수 있는 정도의 오차를 보임으로써 해의 적합성 및 정확성을 입증하고 있음을 알 수 있다.

2. 이론적 배경

2.1 에너지 방정식

Sanders 셀 이론을 이용하여 얇은 셀의 고유진동수를 얻기 위하여 셀의 변형 에너지를 변위성분으로 표시할 필요가 있으며 이를 위한 절차는 다음과 같다.

셀의 변형 에너지를 U 로 나타내면

$$U = 1/2 \int_V (\sigma_x e_x + \sigma_y e_y + \sigma_z e_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) dV \quad (1)$$

얇은 셀에 대한 가정에서 $e_z = \gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0$ 를 적용하면 응력 변형률 관계는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} (e_x + \nu e_y) \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} (e_y + \nu e_x) \\ \tau_{xy} &= G \gamma_{xy} \end{aligned} \quad (2)$$

식 (2)를 식 (1)에 대입하면

$$U = 1/2 \int_V \frac{E}{1-\nu^2} (e^2_x + 2\nu e_x e_y + e^2_y + \frac{(1-\nu)}{2} \gamma^2_{xy}) dV \quad (3)$$

원통 셀의 좌표계 x, θ, z 에 대한 변위를 u, v, w 로 나타내면 변형률-변위관계는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} e_{xx} &= u_{,x} - zw_{,xx} \\ e_{\theta\theta} &= \frac{1}{a}(v_{,\theta} + w) - \frac{z}{a^2}(w_{,\theta\theta} - v_{,\theta}) \\ e_{x\theta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} u_{,\theta} + v_{,x} \right) - z \left(\frac{1}{4a^2} u_{,\theta\theta} - \frac{3}{4a} v_{,x} + \frac{1}{a} w_{,x\theta} \right) \end{aligned} \quad (4)$$

식 (3)에 식 (4)를 대입하면 변위 항으로 표현되는 셀의 변형에너지를 구할 수 있다. 즉,

$$\begin{aligned} U &= \frac{Eh}{2a(1-\nu^2)} \int_0^{2\pi} \int_0^L [a^2 u^2_{,x} + (w + v_{,\theta})^2 + 2\nu a u_{,x}(v_{,\theta} + w) + \frac{1}{2}(1-\nu)(u_{,\theta} + av_{,x})^2 + \beta \{ a^4 w^2_{,xx} + (w_{,\theta\theta} - v_{,\theta})^2 + 2\nu a^2 w_{,xx}(w_{,\theta\theta} - v_{,\theta}) \frac{1}{8}(1-\nu)(u_{,\theta} - 3av_{,x})^2 + 2(1-\nu)a^2 w^2_{,x\theta} + (1-\nu)au_{,\theta}w_{,x\theta} - 3(1-\nu)a^2 v_{,x}w_{,x\theta} \}] dx d\theta \end{aligned} \quad (5)$$

한편 셀의 운동에너지는 T 로 나타내며 다음과 같다.

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int_V m_s (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) dV \\ &= \frac{1}{2} \rho_s a h \int_0^{2\pi} \int_0^L [(\dot{u})^2 + (\dot{v})^2 + (\dot{w})^2] dx d\theta \end{aligned} \quad (6)$$

2.2 변위의 가정

외팔 경계조건을 갖는 원통 셀의 변위의 가정은 빔 함수를 사용하여 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} u &= A\phi_r \cos n\theta \cos \omega t \\ v &= B\phi_r \sin n\theta \cos \omega t \\ w &= C\phi_r \cos n\theta \cos \omega t \end{aligned} \quad (7)$$

여기서 빔의 모달 함수 $\phi_r(x)$ 는

$$\phi_r(x) = \cosh pr_x - \cos pr_x - Cr (\sinh pr_x - \sin pr_x) \quad (8)$$

이며, C_r 은 다음으로부터 구한다.

$$\begin{aligned} Cr &= \frac{\cosh prL + \cos prL}{\sinh prL + \sin prL} \\ &= \frac{\sinh prL - \sin prL}{\cosh prL + \cos prL} \end{aligned} \quad (9)$$

이때의 pr 값은 경계조건을 적용한 다음 식을 이용하여 수치 해법으로 구할 수 있다.

$$\cosh prL \cos prL + 1 = 0 \quad (10)$$

2.3 Rayleigh-Ritz 법의 적용

변위 가정식 (7)을 에너지 방정식 (5)와 (6)에 대입하면 축방향 파수에 따른 빔 특성 값과 원주방향 파수 n 의 값으로 표현되는 미지수 A, B, C 를 갖는 식으로 변형이 되며 미지의 계수를 구하기 위해 Rayleigh-Ritz 법을 적용하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial}{\partial X_j} [U(x, \theta) - \omega^2 T(x, \theta)] = 0 \quad (11)$$

여기서 X_j 는 각각 A, B, C 를 나타낸다.

식 (11)의 미분결과를 계수 A, B, C 에 대해 정리하면 빔 함수의 적분을 포함하는 다음 식을 얻는다.

$$\begin{aligned} \alpha \int_0^L \left[\left\{ a^2 \phi^{2''} \phi + \frac{1}{2}(1-\nu)n^2 \phi^2 + \beta \frac{1}{8}(1-\nu)n^2 \phi^2 - a^2(1-\nu)\omega^2 \frac{\phi^2}{E} \right\} A + \left\{ \nu a p_r n \phi \ddot{\phi} - \frac{1-\nu}{2} a n p_r \phi^2 + \beta \frac{3}{8}(1-\nu) a n p_r \phi^2 \right\} B + \left\{ \nu a p_r \phi \ddot{\phi}^2 + \beta \frac{(1-\nu)}{2} a n^2 p_r \phi^2 \right\} C \right] dx d\theta = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \alpha \int_0^L \left[\left\{ \nu a n p_r \phi \ddot{\phi} - \frac{1}{2}(1-\nu) a n p_r \phi^2 + \beta \frac{3}{8}(1-\nu) (a n p_r \phi^2) \right\} A + \left\{ n^2 \phi^2 + \frac{1}{2}(1-\nu) a^2 p_r^2 \phi^2 + \beta n^2 \phi^2 + \beta \frac{9(1-\nu)}{8} a^2 p_r^2 \phi^2 - \frac{\rho a^2 (1-\nu^2) \omega^2}{E} \phi^2 \right\} B + \left\{ n \phi^2 + \beta n^3 \phi^2 - \beta \nu a^2 n p_r^2 \phi \ddot{\phi} + \frac{3}{2} \beta (1-\nu) a^2 n p_r^2 \phi^2 \right\} C \right] dx d\theta = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \alpha \int_0^L \left[\left\{ \nu a p_r \phi \ddot{\phi} + \beta \frac{(1-\nu)}{2} a n^2 p_r \phi^2 \right\} A + \left\{ n \phi^2 + \beta n^3 \phi^2 - \beta \nu a^2 p_r^2 \phi \ddot{\phi} + \frac{3}{2} \beta (1-\nu) a^2 n p_r^2 \phi^2 \right\} B + \left\{ \phi^2 + \beta (a^4 p_r^4 \ddot{\phi}^2 + n^4 \phi^2 + 2a^2 p_r^2 n^2 ((1-\nu) \phi^2 - \nu \phi \ddot{\phi})) - \rho a^2 \omega^2 \frac{1-\nu^2}{E} \phi^2 \right\} C \right] dx d\theta = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

이들 식으로부터 미지의 계수 A, B, C 에 대해 정리

하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \end{Bmatrix} = 0 \quad (15)$$

여기서

$$\begin{aligned} A_{11} &= \alpha \int_0^L \left\{ a^2 \phi^2 \ddot{\phi} + \frac{1}{2} (1-\nu) n^2 \dot{\phi}^2 \right. \\ &\quad \left. + \beta \frac{1}{8} (1-\nu) n^2 \phi^2 - a^2 (1-\nu) \omega^2 \frac{\phi^2}{E} \right\} dx d\theta \\ A_{12} &= \alpha \int_0^L \left\{ \nu a p_r n \phi \ddot{\phi} - \frac{1-\nu}{2} a n p_r \dot{\phi}^2 \right. \\ &\quad \left. + \beta \frac{3}{8} (1-\nu) a n p_r \phi^2 \right\} dx d\theta \quad (16) \\ A_{13} &= \alpha \int_0^L \left\{ \nu a p_r \phi \dot{\phi}^2 + \beta \frac{(1-\nu)}{2} a n^2 p_r \phi^2 \right\} dx d\theta \\ A_{22} &= \int_0^L \left\{ n^2 \phi^2 + \frac{1}{2} (1-\nu) a^2 n p_r^2 \dot{\phi}^2 + \beta n^2 \phi^2 \right. \\ &\quad \left. + \beta \frac{9(1-\nu)}{8} a^2 p_r^2 \dot{\phi}^2 - \frac{\rho a^2 (1-\nu^2) \omega^2}{E} \phi^2 \right\} dx d\theta \\ A_{23} &= \int_0^L \left\{ n \phi^2 + \beta n^3 \phi^2 - \beta \nu a^2 n p_r^2 \phi \dot{\phi} \right. \\ &\quad \left. + 3\beta (1-\nu) a^2 n p_r^2 \dot{\phi}^2 \right\} dx d\theta \\ A_{33} &= \int_0^L \left\{ \phi^2 + \beta (a^4 p_r^4 \dot{\phi}^2 + n^4 \phi^2 + 2a^2 p_r^2 n^2 ((1-\nu) \dot{\phi}^2 - \nu \phi \ddot{\phi})) \right. \\ &\quad \left. - \rho a^2 \omega^2 \frac{(1-\nu^2)}{E} \phi^2 \right\} dx d\theta \\ A_{21} &= A_{12} \\ A_{31} &= A_{13} \\ A_{32} &= A_{23} \end{aligned}$$

이며 이것은 다시 진동수 매개변수 Δ 를 도입하여

$$\Delta = \rho a^2 (1-\nu^2) \frac{\omega^2}{E} \quad (17)$$

으로 나타낼 수 있고 식 (16)의 A_{ij} 에서 Δ 를 분리하여 다시 나타내면 다음 식과 같다.

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \Delta I_2 & A_{12} & A a_{13} \\ A_{21} & a_{22} - \Delta I_4 & A a_{23} \\ A_{31} & A a_{32} & a_{33} - \Delta I_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \end{Bmatrix} = 0 \quad (18)$$

미정 계수 $A, B, C \neq 0$ 의 조건으로부터 식 (19)를 얻는다.

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \Delta I_2 & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & a_{22} - \Delta I_4 & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & a_{33} - \Delta I_4 \end{vmatrix} = 0 \quad (19)$$

여기서

$$I_2 = 1/L \int_0^L \dot{\phi}_r \dot{\phi}_r dx, \quad (20)$$

$$I_4 = 1/L \int_0^L \phi_r \phi_r dx$$

이며 식 (19)로부터 Δ 의 3차 진동수 방정식(ω 에 대해서는 6차 방정식)을 얻을 수 있고 이 3차 방정식으로부터 진동수를 계산할 수 있다.

2.4 변형 에너지

식 (5)에 가정된 변위함수 (7)을 대입하면 미지의 계수 A, B, C 를 갖는 다음의 변형 에너지 식의 합으로 전개할 수 있다.

$$U = E_{bending} + E_{stretching} \quad (21)$$

여기서 $E_{bending}, E_{stretching}$ 은 각각 굽힘에너지 및 신장(stretching) 에너지를 표시하며 이들은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} E_{stretching} &= \alpha \int_0^L \int_0^{2\pi} \left\{ [a^2 p_r^2 I_3 + 1/2 (1-\nu) n^2 I_2] A^2 \right. \\ &\quad + \{ (2\nu n p_r a I_1 - (1-\nu) n p_r a I_2) AB \\ &\quad + \{ 2\nu p_r a I_1 \} AC + \{ n^2 I_4 + 1/2 a^2 p_r^2 I_2 \} B^2 \\ &\quad \left. + \{ 2n I_4 \} BC + I_4 C^2 \right\} dx d\theta \quad (22) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{bending} &= \alpha \int_0^L \int_0^{2\pi} \beta \left\{ [1/8 (1-\nu) n^2 I_2] A^2 \right. \\ &\quad + \{ 1/8 (1-\nu) 6 n a p_r I_2 \} AB \\ &\quad + \{ (1-\nu) a p_r n^2 I_2 \} AC + \{ n^2 I_4 \\ &\quad + 9/8 (1-\nu) a^2 p_r^2 I_2 \} B^2 + \{ 2n^3 I_4 \\ &\quad - 2\nu a^2 p_r^2 n I_1 + 3(1-\nu) n a^2 p_r^2 I_2 \} BC \\ &\quad \left. + \{ p_r^4 a^4 I_3 + n^4 I_4 - 2\nu a^2 p_r^2 n^2 I_2 \right. \\ &\quad \left. + 2(1-\nu) a^2 n^2 p_r^2 I_2 \} C^2 \right\} dx d\theta \quad (23) \end{aligned}$$

여기서 I_2, I_4 는 식 (20)과 같고 I_1, I_2 는

$$I_1 = 1/L \int_0^L \phi_r \ddot{\phi}_r dx \quad (24)$$

$$I_3 = 1/L \int_0^L \ddot{\phi}_r \ddot{\phi}_r dx$$

이며 I_3, I_4 는 범 함수의 직교성에 의해 구하여진다. 한편 식 (18)로부터 계산되는 $A/C, B/C$ 는

$$\begin{aligned} A/C &= (a_{12} a_{23} - a_{13} a_{22}) / (a_{11} a_{22} - a^2 I_2) \\ B/C &= (a_{22} a^2 I_3 + a_{33} a^2 I_2 - a_{11} a_{22} a_{33} - a_{12} a_{13} a_{23}) \\ &\quad / [a_{23} (a_{11} a_{22} - a^2 I_2)] \quad (25) \end{aligned}$$

이며 식 (25)와 식 (22), (23)을 이용하여 변형에너지를 나타내면 식 (26)과 식 (27)이 된다.

$$U_{stretching} = \alpha \int_0^L \int_0^{2\pi} \{ [a^2 p_r^2 I_3 + 1/2 n^2 (1-\nu) I_2] (A/C)^2 + \{ a p_r n (\nu - 1) I_2 + 2 a p_r \nu n I_1 \} (A/C) (B/C) + [1/2 a^2 p_r^2 (1-\nu) I_2 + n^2 I_4] (B/C)^2 + \{ 2 \nu a p_r I_1 \} (A/C) + 2 n I_4 (B/C) + I_4 \} dx d\theta \quad (26)$$

$$U_{bending} = \alpha \int_0^L \int_0^{2\pi} \beta \{ [n^2/8 (1-\nu) I_2] (A/C)^2 + \{ 3/4 n a p_r (1-\nu) I_2 \} (A/C) + \{ 9/8 a^2 p_r^2 (1-\nu) I_2 + n^2 I_4 \} (B/C)^2 + \{ a^2 p_r^2 n (3(1-\nu) I_2 - 2 \nu I_1) + 2 n^3 I_4 \} (B/C) + \{ a p_r n^2 (1-\nu) I_2 \} (A/C) + \{ 2 a^2 p_r^2 n^2 (1-\nu) I_2 + a^4 p_r^4 I_3 - 2 a^2 p_r^2 \nu n^2 I_1 + n^4 I_4 \} \} dx d\theta \quad (27)$$

3. 수치결과 및 고찰

에너지 식 (5)와 (6)에 가정된 해 (7)을 대입하고 적분을 하게 되면 식 (12)~(14)에 나타나는 식 (20), (24)와 같은 빔 특성함수의 적분을 셀의 길이에 걸쳐 수행하여야 하며 이들 중 일부는 참고문헌 (8)과 (12) 및 (14) 등에서 찾을 수 있으나 일반적으로 이들 삼각함수의 적분은 시간과 노력을 요하고 대단히 복잡하게 되어 전개 과정 중에 오류의 가능성이 있으므로 여기서는 빔 특성함수의 적분과 식 (11)의 Rayleigh-Ritz 방법 적용시 각 각의 계수에 대한 미분을 Mathematica를 사용하여 기호화한 결

과를 얻고 이 결과를 직접 해를 구하기 위한 프로그램에 삽입함으로써 적분시의 오류 및 프로그램의 간편화를 이루도록 하였다. 동일한 셀 제원에 대한 이들 빔 특성함수의 적분 결과는 비교를 위해 Table 1에 수록하였다.

Table 1에서 축방향 파수가 증가된 곳에서는 빔 함수의 적분 값이 차이가 남을 알 수 있고 이것은 곧 축방향 파수가 증가된 곳에서 기존의 해석 결과와 진동수 차이를 예견하게 한다.

식 (19)로부터 구한 주파수 매개변수 Δ 에 대한 3차 진동수 방정식의 근의 공식을 이용하여 Δ 를 계산할 수 있으며 이로부터 파수에 따른 진동수를 구할 수 있다. 이러한 계산의 결과를 기존의 실험 및 해석적 결과와 비교하면 Table 2에서 나타낸 각 경우에 대하여 Table 3, Table 4, Table 5와 같고, 원주방향 모드 수에 따른 진동수 변화는 Fig. 1, Fig. 2, Fig. 3과 같다. Table 3, Table 4 및 Table 5는 참고문헌 (3)의 Table 1(Case I), Table 2(Case II), Table 3(Case III)에 나타낸 외팔형 원통 셀에 대한 물성자료와 셀 형상자료를 이용하여 구한 축방향 모드 수 및 원주방향 파수에 따른 진동수를 나타내고 있고 여기에는 참고문헌 (3)에서 나타낸 실험의 결과(after Gill)와 함께 선형, 2차식, 3차식의 진동수 방정식으로부터 구한 결과를 같이 나타내었다.

Table 3에서 보면 축방향 파수 $M=1$ 에서는 본 연

Table 1 Comparison of the integrated results with other works

Integral	Axial wave number					
	1	2	3	4	5	
I1 Ref. (7)	0.244096	-0.603349	-0.744025	-0.818178	-0.858629	
	Ref. (12)	0.244096	-0.603338	-0.744024	-0.818169	-0.858526
	Present	0.244095529	-0.603339785	-0.744024298	-0.818169083	-0.858525883
I2 Ref. (7)	1.321888	1.471179	1.252871	1.181911	1.141274	
	Ref. (12)	1.321888	1.471209	1.252875	1.181965	1.141468
	Present	1.32188798	1.47121157	1.25287489	1.18196513	1.14146832
I3 Ref. (7)	-0.746684	-0.858532	-0.902059	-0.925104	-0.939370	
	Ref. (12)	-0.746684	-0.858532	-0.902059	-0.925104	-0.939370
	Present	-0.746684137	-0.858531614	-0.902058460	-0.925103123	-0.939369490
I4 Ref. (7)	0.746684	0.858532	0.902059	0.925104	0.939370	
	Ref. (12)	0.746684	0.858532	0.902059	0.925104	0.939370
	Present	0.746683984	0.858531970	0.902020090	0.925496386	0.935550020

$$I_1 = \frac{1}{L} \int_0^L \ddot{\phi}_r \phi_r dx, \quad I_2 = \frac{1}{L} \int_0^L (\dot{\phi}_r)^2 dx, \quad I_3 = \frac{1}{L} \int_0^L \ddot{\psi}_r \psi_r dx, \quad I_4 = \frac{1}{L} \int_0^L (\dot{\psi}_r)^2 dx$$

구에서 계산된 진동수와 기존의 진동수 계산결과는 거의 일치하는 경향을 보이지만 축방향 파수가 증가된 곳에서는 서로 차이를 보이고 본 연구에서 계산

된 진동수가 기존의 결과보다 낮은 값을 나타내며 이것은 보다 실험 값에 접근하는 경향을 보인다. 이러한 경향은 Table 4 및 Table 5에서도 마찬가지이다.

Table 2 Dimensions of shells for each case

	Case I	Case II	Case III
Length (mm)	502	625.5	594.92
Radius (mm)	63.5	242.3	304.8
Thickness (mm)	1.63	0.648	0.8128
Young's modulus (N/mm ²)	2.1×10^{11}	68.95×10^9	69.95×10^9
Poisson's ratio	0.28	0.315	0.3
Density (kg/m ³)	7.8×10^3	2.7145×10^3	2.823×10^3

Table 3 Comparison of natural frequencies of case I with other works

Circumf. wave no.		Axial wave number				
<i>n</i>	Results	<i>m</i> =1	<i>m</i> =2	<i>m</i> =3	<i>m</i> =4	
2	Experiment ⁽³⁾		293.0	827.0	1894.8	—
	Sharma ⁽³⁾	Linear	321.0	1095.2	2921.8	5566.1
		Quad.	320.9	1095.4	2922.3	5566.1
		Cubic	319.5	1019.7	2398.9	3963.2
	Present (Cubic)		319.9	1020.2	2368.0	3849.7
3	Experiment ⁽³⁾		760.0	886.0	1371.0	2155.0
	Sharma ⁽³⁾	Linear	769.9	941.7	1638.4	2882.8
		Quad.	769.8	941.7	1638.9	2884.1
		Cubic	769.8	930.4	1515.4	2428.3
	Present (Cubic)		770.2	927.6	1505.1	2385.8
4	Experiment ⁽³⁾		1451.0	1503.0	1673.0	2045.0
	Sharma ⁽³⁾	Linear	1465.8	1526.8	1755.8	2283.8
		Quad.	1465.6	1525.9	1755.3	2284.3
		Cubic	1465.8	1525.0	1730.3	2158.0
	Present (Cubic)		1466.1	1519.8	1714.7	2122.8
5	Experiment ⁽³⁾		2336.0	2384.0	2480.0	2667.0
	Sharma ⁽³⁾	Linear	2367.1	2409.8	2519.3	2754.7
		Quad.	2366.7	2407.3	2516.6	2752.8
		Cubic	2367.1	2409.2	2513.4	2722.6
	Present (Cubic)		2367.3	2403.4	2494.4	2682.1
6	Experiment ⁽³⁾		3429.0	3476.0	3546.0	3667.0
	Sharma ⁽³⁾	Linear	3470.4	3509.1	3588.5	3733.8
		Quad.	3469.8	3505.4	3583.4	3728.4
		Cubic	3470.3	3505.8	3586.6	3724.3
	Present (Cubic)		3470.4	3502.8	3566.4	3681.0

원주방향 파수에 따른 진동수 변화를 Fig. 1, Fig. 2 및 Fig. 3에 나타내었고 이들 그림에서 보면 진동수는 원주방향 파수가 증가할수록 점점 작아져 최소

가 된 후 다시 증가하여 축방향 파수에 관계없이 큰 원주방향 파수에서는 거의 같은 값을 가지는 점근성을 보이며 이러한 현상은 변형 에너지를 도시킨 Fig.

Table 4 Comparison of natural frequencies of case II with other works

Circumf. wave no.		Axial wave number			
n	Results	$m=1$	$m=2$	$m=3$	
2	Experiment ⁽³⁾	—	—	—	
	Sharma ⁽³⁾	Linear	404.6	2313.0	5744.7
		Quad.	404.6	2310.7	5724.8
		Cubic	354.0	1500.6	2346.1
	Present (Cubic)	357.0	1447.0	2261.3	
3	Experiment ⁽³⁾	150.0 ~ 157.0	—	—	
	Sharma ⁽³⁾	Linear	194.4	1184.4	3204.0
		Quad.	194.4	1184.4	3203.6
		Cubic	181.9	911.8	1715.6
	Present (Cubic)	183.0	869.7	1641.0	
4	Experiment ⁽³⁾	107.0	—	—	
	Sharma ⁽³⁾	Linear	118.5	694.8	1918.6
		Quad.	118.5	694.8	1918.5
		Cubic	114.3	588.3	1248.5
	Present (Cubic)	114.9	580.5	1201.1	
5	Experiment ⁽³⁾	89.0 and 91.0	—	—	
	Sharma ⁽³⁾	Linear	96.7	456.6	1258.5
		Quad.	96.7	456.6	1258.5
		Cubic	95.3	407.6	926.2
	Present (Cubic)	95.6	405.4	899.5	
6	Experiment ⁽³⁾	102.0	276.0	—	
	Sharma ⁽³⁾	Linear	106.7	331.8	889.0
		Quad.	106.7	331.8	889.0
		Cubic	106.3	306.7	708.5
	Present (Cubic)	106.4	306.4	694.3	
7	Experiment ⁽³⁾	130.0	240.0	—	
	Sharma ⁽³⁾	Linear	134.3	270.6	668.8
		Quad.	134.3	270.6	668.8
		Cubic	134.2	257.3	563.9
	Present (Cubic)	134.3	257.3	556.5	
8	Experiment ⁽³⁾	166.0	227 and 231.0	—	
	Sharma ⁽³⁾	Linear	171.9	252.6	536.5
		Quad.	171.8	252.6	536.5
		Cubic	171.8	245.7	473.1
	Present (Cubic)	171.9	245.3	468.8	

9	Experiment ⁽³⁾		208.0	246.0	400.0
	Sharma ⁽³⁾	Linear	216.4	265.3	463.1
		Quad.	216.4	265.3	463.2
		Cubic	216.4	261.7	424.5
	Present (Cubic)		216.5	260.9	421.2
10	Experiment ⁽³⁾		260.0	281.0	409.0 and 412.0
	Sharma ⁽³⁾	Linear	267.0	298.6	433.9
		Quad.	267.0	298.5	433.9
		Cubic	267.0	296.7	410.6
	Present (Cubic)		267.2	295.6	407.2
11	Experiment ⁽³⁾		317.0	337.0	—
	Sharma ⁽³⁾	Linear	323.3	345.5	438.2
		Quad.	323.3	345.4	438.1
		Cubic	323.3	344.6	424.3
	Present (Cubic)		323.4	343.2	420.4
12	Experiment ⁽³⁾		374.0	393.0 and 396.0	—
	Sharma ⁽³⁾	Linear	385.1	402.2	467.4
		Quad.	385.1	402.0	467.2
		Cubic	385.1	401.7	459.1
	Present (Cubic)		385.2	400.1	454.7

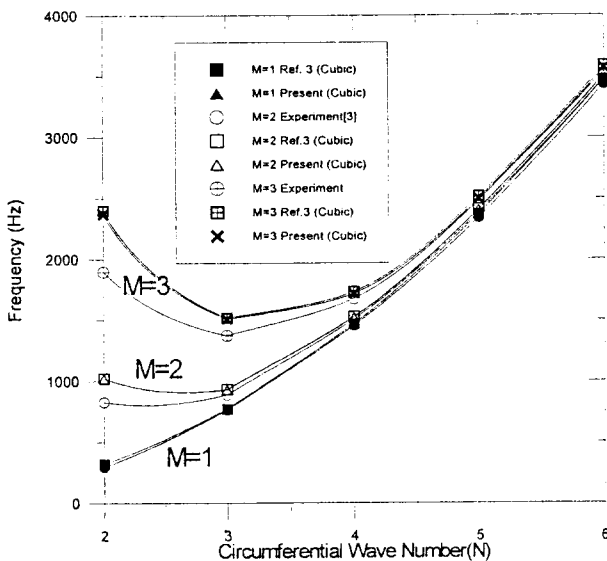


Fig. 1 Comparison of frequencies as a function of circumferential wave number for case I

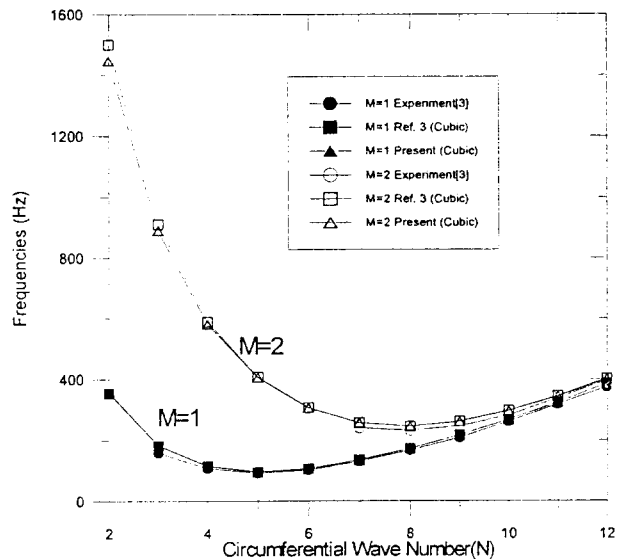


Fig. 2 Comparison of frequencies as a function of circumferential wave number for case II

4~Fig. 6으로부터도 설명될 수 있다. Fig. 4에서 보면 변형 에너지는 축방향 파수가 1일 경우($M=1$) 원주방향 파수 2($N=2$)에서 최소를 보이고 N 의 증

가에 따라 점차 증가하므로 최소 진동수는 $N=2$ 에서 발생함을 보이며 M 이 증가할수록 최소 에너지는 N 이 증가되는 곳으로 이동하여 일어남을 보인다.

이것은 Table 3의 각 축방향 파수에 따른 최소 진동수 발생 원주방향 파수를 비교하면 Fig. 1과 일치함을 알 수 있고 이러한 현상은 원주방향 파수가 작은 곳에서는 신장에너지가 유력하고 원주방향 파수가 증가할수록 굽힘에너지가 유력하게 되어 이 둘의 에

너지를 합하면 그 최소는 Fig. 4~Fig. 6에서 보는 것과 같이 급격히 감소한 후 다시 증가하는 현상으로 설명될 수 있다⁽¹⁵⁾. Fig. 4와 Fig. 5에서도 축방향 파수가 증가할수록 변형에너지가 최소가 되는 원주방향 파수는 N 이 증가된 곳에서 발생함을 보이며

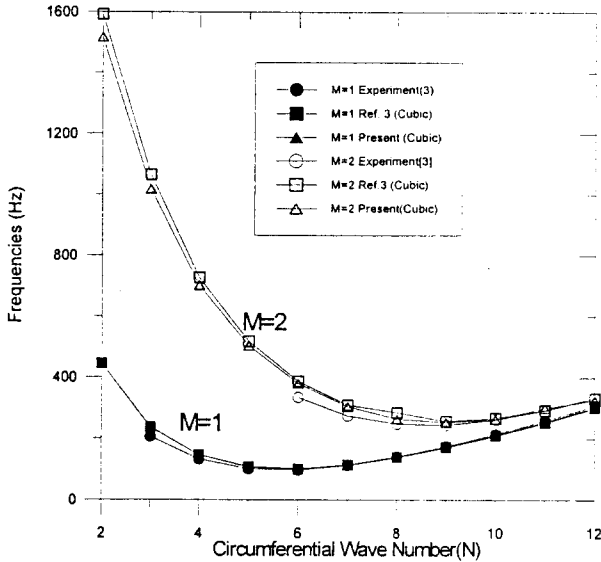


Fig. 3 Comparison of frequencies as a function of circumferential wave number for case III

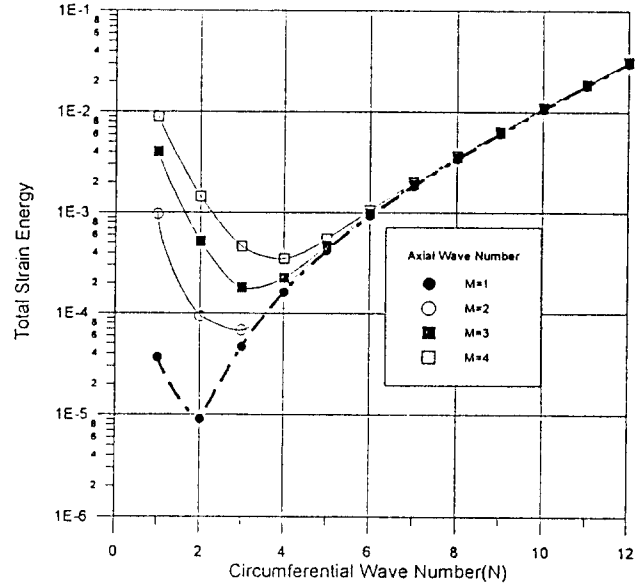


Fig. 4 Strain energy factor as a function of circumferential wave number for case I

Table 5 Comparison of natural frequencies of case III with other works

Circumf. wave no.		Axial wave number			
n	Results	$m=1$	$m=2$	$m=3$	
2	Experiment ⁽³⁾	—	—	—	
	Sharma ⁽³⁾	Linear	547.6	2960.5	6973.1
		Quad.	547.6	2954.1	6926.7
		Cubic	445.0	1592.3	2148.0
Present (Cubic)	445.1	1516.6	2080.2		
3	Experiment ⁽³⁾	201.8 and 206.2	—	—	
	Sharma ⁽³⁾	Linear	264.7	1592.9	4214.8
		Quad.	264.7	1592.6	4211.3
		Cubic	237.5	1065.3	1732.3
Present (Cubic)	236.8	1018.3	1647.9		
4	Experiment ⁽³⁾	131.7	—	—	
	Sharma ⁽³⁾	Linear	155.9	944.8	2589.6
		Quad.	155.9	944.8	2589.4
		Cubic	146.5	726.8	1362.2
Present (Cubic)	145.8	701.4	1290.2		

5	Experiment ⁽³⁾		100.8	429.1	—
	Sharma ⁽³⁾	Linear	111.2	619.2	1711.6
		Quad.	111.2	619.2	1711.6
		Cubic	107.5	517.0	1068.6
Present (Cubic)		106.9	503.4	1015.4	
6	Experiment ⁽³⁾		96.9	326.3 and 334.4	—
	Sharma ⁽³⁾	Linear	101.4	440.3	1208.4
		Quad.	101.4	440.3	1208.4
		Cubic	99.9	387.1	847.6
Present (Cubic)		99.2	379.4	810.5	
7	Experiment ⁽³⁾		113.0	273.5	—
	Sharma ⁽³⁾	Linear	113.6	338.5	900.7
		Quad.	113.6	338.5	900.8
		Cubic	113.1	309.0	685.9
Present (Cubic)		112.1	303.9	660.3	
8	Experiment ⁽³⁾		140.4	247.4	—
	Sharma ⁽³⁾	Linear	138.7	284.8	704.7
		Quad.	138.7	284.8	704.7
		Cubic	138.5	284.8	571.0
Present (Cubic)		137.3	264.2	552.6	
9	Experiment ⁽³⁾		174.3	244.2	—
	Sharma ⁽³⁾	Linear	171.7	265.5	579.1
		Quad.	171.7	265.5	579.1
		Cubic	171.6	256.1	493.6
Present (Cubic)		170.0	252.4	479.6	
10	Experiment ⁽³⁾		214.6	261.5	—
	Sharma ⁽³⁾	Linear	210.4	271.7	502.9
		Quad.	210.3	271.6	502.9
		Cubic	210.3	266.5	447.7
Present (Cubic)		208.3	262.3	436.0	
11	Experiment ⁽³⁾		258.4	292.1	—
	Sharma ⁽³⁾	Linear	253.9	295.9	464.1
		Quad.	253.8	295.8	464.1
		Cubic	253.9	293.0	428.8
Present (Cubic)		251.4	288.4	417.9	
12	Experiment ⁽³⁾		307.6	335.2	—
	Sharma ⁽³⁾	Linear	302.0	332.7	454.9
		Quad.	301.9	332.5	454.8
		Cubic	301.9	331.0	432.6
Present (Cubic)		299.0	325.8	421.7	

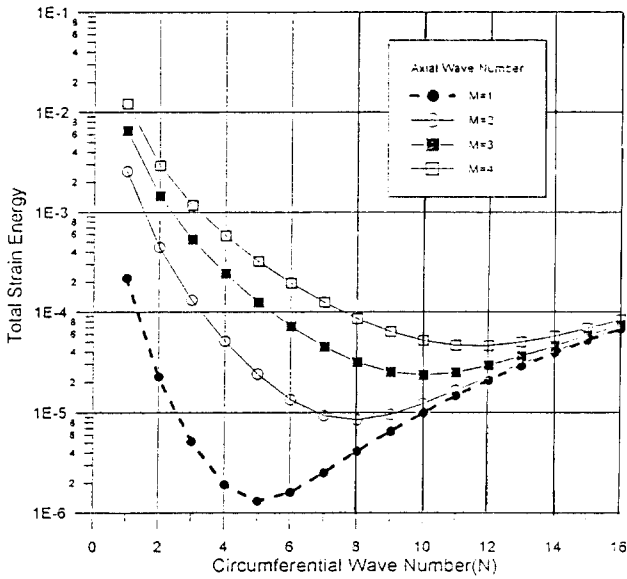


Fig. 5 Strain energy factor as a function of circumferential wave number for case II

Table 4와 Table 5에서 이 최소 에너지가 일어나는 N 에서 최소 진동수를 보이는 것을 알 수 있다. Table 3, Table 4, Table 5 및 Fig. 1~Fig. 3에서 알 수 있는 것은 본 연구에서 보인 결과와 참고문헌 (3)에서의 결과를 비교할 때 참고문헌 (3)에서 3차 진동수 방정식을 이용해서 구한 진동수는 실험 결과 보다 높은 진동수를 계산하고 본 연구의 결과는 참고문헌 (3)에서 3차 진동수 방정식을 이용하여 계산한 진동수보다 낮은 값을 계산하므로써 이것은 보다 실험값에 접근하는 진동수를 계산하고 있으며 이것은 빔 함수의 적분결과의 차이에 기인하는 것으로 보인다.

4. 결 론

일단고정-일단자유 외팔 경계조건을 갖는 원통 셸의 3×3 진동수 방정식을 Sanders의 셸 이론을 적용하고 에너지 법에 기초한 Rayleigh-Ritz 법을 유도하고 진동수 방정식의 계수에 나타나는 빔 함수의 적분을 Mathematica를 사용하여 기호화한 적분을 수행한 후 진동수 방정식으로부터 각 각의 진동모드에 해당하는 고유진동수를 구하였고 이 방법의 적합성을 검토하기 위하여 기존의 실험결과를 포함하는 해석결과와 비교하였다. 이들 비교 결과 외팔 원통 셸의 경우 기존의 방법에 의한 진동수 해석 결과보다 좀더 실험에 접근하는 결과를 보이고 있음으로써

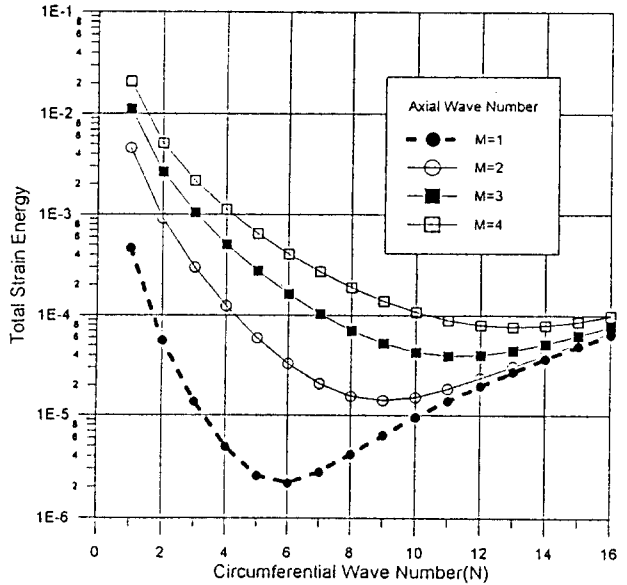


Fig. 6 Strain energy factor as a function of circumferential wave number for case III

외팔 원통 셸의 진동수를 본 연구에서 사용하고 있는 방법을 이용하여 보다 정확하고 간편하게 구할 수 있음을 알 수 있다.

참 고 문 헌

- (1) C.B. Sharma, D.J. Johns, 1970. "Vibration Characteristics of Clamped/Free and Clamped/Ring Stiffened Cylindrical Shells, A Theoretical Analysis", TT7001, Loughborough University of Technology.
- (2) C.B. Sharma, 1984. "Free Vibration of Clamped-Free Circular Cylindrical Shells". Thin Walled Structures, Vol. 2, pp. 175~193.
- (3) C.B. Sharma, 1974. "Calculation of Natural Frequencies of fixed-free circular cylindrical shells". J. of Sound and Vibration, Vol. 35, No. 1. pp. 55~76.
- (4) C.B. Sharma, D.J. Johns, 1971. "Vibration Characteristics of Clamped/Free and Clamped/Ring Stiffened Cylindrical Shell", J. of Sound and Vibration, Vol. 14, No. 4. pp. 459~474.
- (5) C.B. Sharma, D.J. Johns, 1972. "Free Vibration of Cantilever Circular Cylindrical Shells-A Comparative Study" J. of Sound and Vibration, Vol. 25, No. 3. pp. 433~449.

- (6) D.J. Johns, R.J. Allwood, 1968. "Vibration Study of A Ring-Stiffened Circular Cylindrical Shell", J. of Sound and Vibration, Vol. 8, No. 1. pp. 147~155.
- (7) G.B. Warburton, J. Higgs, 1970. "Natural Frequencies of Thin Cantilever Cylindrical Shells", J. of Sound and Vibration, Vol. 11, No. 3. pp. 335~338.
- (8) 이영신, 문홍기, 1986, "직교이방성 외팔 원통 셸의 자유진동해석", 대한기계학회논문집, 제10권, 제6호, pp. 929~936.
- (9) 엽기연, 윤경호, 김종균, 이영신, 1995, "내부가 유체로 채워진 보강 원통 셸의 동적 거동해석", 대한기계학회지, 춘계학술대회논문집(1), pp. 721~725.
- (10) 김태룡, 정승호, 박진호, 박진석, 정경훈, 1993, "원자로 내부 구조물 동특성 변화에 관한 연구(최종보고서)", KAERI/RR-1267/93, 한국원자력 연구소.
- (11) 정경훈, 이성철, 1994, "Fourier 급수전개를 이용한 부분적으로 유체가 채워진 원통형 셸의 고유진동해석", 한국소음진동공학회지, 제4권, 제1호, pp. 163~175.
- (12) C.B. Sharma, 1978, "Calculation of Integrals Involving Characteristic Beam Functions", J. of Sound and Vibration, Vol. 56, No. 4, pp. 475~480.
- (13) Stephen Wolfram "Mathematica: A System for doing Mathematics by Computers", Second Edition, Addison Wesley Publishing Co., 1993.
- (14) R.D. Blevins, "Formulas for Natural Frequency and Mode Shape", Van Nostrand Reinhold Company.
- (15) H. Kraus, "Thin Elastic Shells", John Wiley & Sons, Inc, New York. pp. 310.