

〈論 文〉

회전체 베어링계의 불균형 응답 해석을 위한 개선된 부분 구조 합성법

An Improved Substructure Synthesis Method for Unbalance Response Analysis
of Rotor Bearing Systems

홍 성 옥* · 박 종 혁**

Seong-Wook Hong and Jong-Heuck Park

〈1995년 10월 14일 접수 ; 1995년 11월 29일 심사완료〉

Key Words : Substructure Synthesis(부분 구조 합성), Rotor Bearing System(회전체 베어링계), Unbalance Response(불균형 응답), Finite Element Model(유한 요소 모델), Rotational Speed Dependency(회전속도 종속성), Non-Self-Adjoint(비자기수반), Dynamic Stiffness(동강성), Modal Analysis(모드 해석)

ABSTRACT

The finite element analysis for rotor bearing systems has been an essential tool for design, identification, and diagnosis of rotating machinery. Among others, the unbalance response analysis is fundamental in the vibration analysis of rotor bearing systems because rotating unbalance is recognized as a common source of vibration in rotating machinery. However there still remains a problem in the aspect of computational efficiency for unbalance response analysis of large rotor bearing systems. Gyroscopic terms and local bearing parameters in rotor bearing systems often make matters worse in unbalance response computation due to the complicated dynamic properties such as rotational speed dependency and/or anisotropy. The present paper proposes an efficient method for unbalance responses of multi-span rotor bearing systems. An improved substructure synthesis scheme is introduced which makes it possible to compute unbalance responses of the system by coupling unbalance responses of substructures that are of self adjoint problem with small order matrices. The present paper also suggests a scheme to easily deal with gyroscopic terms and local, coupling or bearing parameters. The proposed method causes no errors even though the computational effort is reduced drastically. The present method is demonstrated through three test examples.

1. 서 론

회전체 베어링계에 대한 유한요소 해석 방법은 지난 20여년간 많은 연구자들에 의해 개발, 적용되어

현재는 회전체 베어링계 설계 및 진단 등에 일반적으로 활용되고 있는 도구가 되고 있다^(1~5). 그러나 컴퓨터의 발전에도 불구하고 대형이거나 복잡한 회전기계에 대한 동적 해석에서는 과도한 기억용량과 계산시간 소모 등을 이유로 보다 개선된 모델링 및 계산방법의 개발에 관심이 계속되어 왔다^(6~9). 특히 대형 회전기계에서는 높은 자유도로 모델링될 뿐만 아니라 자이로 효과나 베어링 특성 등에 의하여 비

*정회원, 금오공과대학교 정밀기계공학과

**삼성전자(주) 산업전자 사업부

자기수반(non-self-adjoint) 특성과 회전속도 증속성을 나타내기 때문에 동적 해석에 있어 많은 시간을 요구하게 된다. 이와같은 계산상의 난점은 불균형 응답 해석 등 강제진동 해석에서 두드러지게 나타나게 된다. 회전체에 있어 불균형 응답은 가장 보편적인 진동응답이며 회전체 진동을 측정하거나 분석함에 있어 중요한 비중을 차지하고 있지만⁽⁹⁻¹²⁾ 모드 해석에 의한 확장이론을 이용하여 해석적인 결과를 얻을 경우 모든 속도에서 반복적으로 고유치 문제와 보조 고유치 문제를 풀어야 하므로 매우 비효율적이다. 따라서 대부분의 경우에 동강성 행렬의 역행렬을 계산하여 불균형 응답을 구하는 직접 계산법이 사용되고 있다. 직접 계산법도 역행렬 계산에 따른 과도한 계산시간 소모로 매우 비효율적이다.

구조물의 동적 해석시의 과도한 계산시간을 줄이기 위해 제안되었던 Guyan의 행렬 축약법⁽¹³⁾ 이후로 많은 행렬 축약법이 개발되었다. 그러나 대부분의 축약법은 전체 자유도를 주자유도(master d.o.f)와 종속자유도(slave d.o.f)로 구분한 후 종속자유도를 축약하는 방법을 이용하므로 주자유도 선택에 따른 차이가 크게 나타난다. 한편 부분 구조법으로 분류되는 많은 방법이 개발되어 왔는데 이방법들은 구조물을 몇개의 부분 구조의 합성으로 보고 부분 구조물에 대해 구해진 해를 전체 구조로 합성하는 과정에서 계산을 단순화시키는 방법으로서 일반 구조물의 동적 해석에서 다양하게 활용되고 있으며 그중에서도 구분 모드 합성법(component mode synthesis) 등은 비교적 폭넓게 사용되고 있다⁽¹⁴⁾. 그러나 부분 구조법에서도 단순화 과정에서 발생하는 오차의 정량화가 어려우므로 계산정확도가 작업자의 경험에 크게 의존한다는 것이 잘 알려져 있다. 회전기계에서는 구분 모드 합성 방법이 일찍부터 사용되었으나^(6,15) 개개의 회전체에 대한 경계좌표, 내부좌표 구분을 위한 좌표변환과 모드 해석 그리고 계산에 필요한 보조적인 모드의 계산 및 전체 회전체 모델로의 합성 등으로 이어지는 절차가 복잡할 뿐 아니라 자유도 축소과정에서 이미 언급한 바와 같이 경험에 따른 오차가 수반되는 등의 문제점이 있다.

본 연구에서는 다단 회전체 베어링계에 대한 불균형 응답 해석에서 큰 계산시간 저감효과를 얻을 수 있으면서도 이로 인한 오차는 발생되지 않도록 개선된 부분 구조 합성법을 제안하였다. 제안한 방법은 두 단계로 나눌 수 있는데 먼저 다단의 회전체에서 연결/지지부를 제외한 상태의 단일 회전체에 대한 불균형 응답을 고전적인 모드 해석에 의해 구하였

다. 회전체에서 자이로 효과도 회전속도에 종속인 특성을 가지며 반대칭(skew symmetric) 행렬로 나타나게 되는데 여기서는 복소좌표를 이용한 불균형 응답 해석을 통해 전방선회(forward whirl)와 후방선회(backward whirl)를 분리해서 고려하여 기존의 비감쇠계 모드 해석 기법에 의해 손쉽게 처리될 수 있도록 하였다. 다음으로 회전체들을 연결/지지하는 베어링 요소와 연결부(커플링 등)에 의해 회전체들이 결합될 때의 불균형 응답 계산식을 유도하였으며 이때 연결부의 행렬이 낮은 자유도를 갖게 되므로 행렬 압축 기법을 적용하여 불균형 응답 계산의 효율성을 높일 수 있도록 하였다. 다단인 대형 회전체에서의 동특성 해석을 위해 부분 구조계들을 베어링이나 결합부 등의 자유도에 관련된 것만으로 축약하여 계산하는 방법이 제안되기도 하였으나⁽¹⁶⁾, 이는 근사해법인 반면, 제안된 방법은 계산시간을 크게 줄이면서도 계산에 따른 오차는 유발되지 않는 큰 장점이 있다. 그러나 본 방법은 정상상태 응답 계산에만 응용이 가능하다. 한편 제안된 방법의 효용성을 검증하기 위해 다단 회전체 베어링계에 대한 불균형 응답 계산시간을 직접 계산법과 비교하였다. 또한 몇가지 회전체 베어링계의 불균형 응답 계산에 본 방법을 적용하여 방법의 편리성을 알 수 있었다.

2. 회전체 베어링계의 불균형 응답

2.1 단일 회전체의 불균형 응답 함수

n 개의 부분 회전체로 나누어져 있는 다단 회전체에서 i 번째 회전체에 대한 복소 유한 요소 방정식을 다음과 같이 쓸 수 있다[부록참조].

$$M_i \ddot{p}_i - j \Omega G_i \dot{p}_i + K_i p_i = F_i \quad (1)$$

여기서 p_i , F_i 는 각각 i 번째 회전체 복소좌표벡터 및 대응좌표에서의 외력벡터이며 M_i , G_i , K_i 는 각각 i 번째 회전체의 관성, 자이로, 강성 행렬을 나타낸다. 따라서 부록의 식 (A10)으로 부터 단일 회전체계의 불균형 응답 함수는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$H_{i,ff} = \{D_{i,ff}\}^{-1} = \{-\Omega^2(M_i - G_i) + K_i\}^{-1} \quad (2-1)$$

$$H_{i,bb} = \{D_{i,bb}\}^{-1} = \{-\Omega^2(M_i + G_i) + K_i\}^{-1} \quad (2-2)$$

$$H_{i,bf} = H_{i,fb} = 0 \quad (2-3)$$

다음 절에서의 이론전개를 위해 다음과 같은 변환 행렬을 정의하도록 한다.

$$p_i^* = T_i \quad p_i \quad (3)$$

$$m_i \times 1 \quad m_i \times N_i \quad N_i \times 1$$

여기서 p_i^c 는 베어링 요소나 커플링 요소 등 연결/지지요소들이 개입된 좌표벡터로서 m_i 의 차원을 가지며 변환행렬 T_i 는 N_i 차원의 좌표벡터 p_i 에서 부분 좌표 벡터 p_i^c 를 추출하는 기능을 갖는다.

2.2 전체 회전체 베어링계의 불균형 응답 함수

전체 다단 회전체 모델을 상첨자 0로, 베어링 요소 등 국부적인 연결/지지요소에 의한 행렬을 상첨자 c로, 그리고 전체 모델에서 연결부 행렬성분을 제외한 상태의 보조모델을 상첨자 s로 표시하면 전체 회전체 베어링계의 불균형 응답 함수에 대한 다음과 같은 관계식을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} H_{ff}^0 & H_{fb}^0 \\ H_{bf}^0 & H_{bb}^0 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} D_{ff}^s & 0 \\ 0 & D_{bb}^s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{ff}^c & D_{fb}^c \\ D_{bf}^c & D_{bb}^c \end{bmatrix} \right\}^{-1} \quad (4-1)$$

또는

$$\begin{bmatrix} H_{ff}^0 & H_{fb}^0 \\ H_{bf}^0 & H_{bb}^0 \end{bmatrix} = \left\{ I + \begin{bmatrix} H_{ff}^s & 0 \\ 0 & H_{bb}^s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{ff}^c & D_{fb}^c \\ D_{bf}^c & D_{bb}^c \end{bmatrix} \right\}^{-1} \begin{bmatrix} H_{ff}^s & 0 \\ 0 & H_{bb}^s \end{bmatrix} \quad (4-2)$$

여기서 보조모델에 대한 동강성 행렬 및 불균형 응답 행렬은 단일 회전체계의 결과를 이용하여 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} D_{ff}^s &= \text{diag}\{D_{1,ff}, D_{2,ff}, \dots, D_{n,bff}\} \\ H_{ff}^s &= \{D_{ff}^s\}^{-1} \\ D_{bb}^s &= \text{diag}\{D_{1,bb}, D_{2,bb}, \dots, D_{n,bb}\} \\ H_{bb}^s &= \{D_{bb}^s\}^{-1} \end{aligned} \quad (5)$$

직접 계산법에서는 식 (4-1)을 이용하고 있으나 식 (4-2)의 관계식을 개선하여 계산효율을 높이는 방법이 사용되기도 한다.^(17,18) 일반적으로 불균형 응답 직접 계산법에서는 $2N \times 2N$ 의 복소행렬에 대한 역행렬 계산을 수행하여야 한다. 한편 불균형 응답 함수를 계산하기 위해서는 상첨자 c로 표기되는 연결/지지부의 동강성 행렬을 결정할 필요가 있다.

3. 불균형 응답 계산법의 개선

3.1 연결/지지부의 동강성 행렬

식 (4)에서 도입하였던 연결부 동강성 행렬 D_{ki}^c , $k, l=f, b$ 는 성긴 행렬로 나타나게 되므로 다음과 같이 압축된 행렬로 표현할 수 있다.

$$d_{ki}^c = T_m D_{ki}^c T_m^T, \quad k, l=f, b \quad (6)$$

이때 d_{ki}^c 는 베어링 등 부분 요소에 대한 압축행렬로

서 연결부 좌표의 수가 $m (= \sum_{i=1}^n m_i)$ 이라고 할 때 $m \times m$ 의 크기가 된다. 이때 변환행렬은 다음과 같이 정의된다.

$$p^c = T_m \quad p \quad (7)$$

$$m \times 1 \quad m \times N \quad N \times 1$$

여기서 p^c 는 베어링 요소나 커플링 요소 등 연결/지지요소들이 연결되는 좌표벡터를 나타내고, 변환행렬 T_m 는 N 차원의 전체 좌표벡터 p 에서 부분 좌표 벡터 p^c 를 추출하며 모두 1이나 0인 요소를 가진다. 단일 회전체에 대한 변환행렬을 이용하면 T_m 은 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$T_m = \text{diag}\{T_1 \quad T_2 \cdots T_n\} \quad (8)$$

따라서 연결/지지부 행렬 D_{ki}^c , $k, l=f, b$ 이 주어지면 식 (9)의 관계를 이용해 압축 동강성행렬을 구할 수 있다. 연결/지지부 행렬을 전체 좌표계에서 구성하는 것은 소모적인 작업으로서 연결/지지부에 관련되는 좌표만으로 다음과 같이 압축 동강성행렬을 직접 구성할 수 있다.

$$d_{ki}^c = \sum_{\alpha=1}^m \sum_{\beta=1}^m d_{ki,\alpha\beta} \gamma_{\alpha\beta} \gamma_{\alpha\beta}^T \quad (9)$$

여기서 $d_{ki,\alpha\beta}$ 는 p^c 의 α 좌표와 β 좌표간의 연결 동강성이며 $\gamma_{\alpha\beta}$ 는 m 차원의 벡터로서 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} \gamma_{\alpha\beta} &= \{0 \cdots 0 \quad 1 \quad 0 \cdots 0 \quad -1 \quad 0 \cdots 0\}^T \quad \text{if } \alpha \neq \beta \\ &\quad \alpha - \text{th} \quad \beta - \text{th} \\ &\quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, m \\ \gamma_{\alpha\alpha} &= \{0 \cdots 0 \quad 1 \quad 0 \cdots 0\}^T \quad \text{if } \alpha = \beta \\ &\quad \alpha - \text{th} \end{aligned}$$

여기서 $\alpha \neq \beta$ 인 경우는 좌표간의 연결요소에 의한 것이고, $\alpha = \beta$ 인 경우는 연결요소의 한쪽이 바닥(Ground)에 연결되는 요소, 즉 지지요소에 의한 것을 의미한다. 한편 대상 문제에서 부분 구조계간의 연결부위를 일체 결합으로 고려해야 할 경우에는 해당되는 연결부의 강성 요소가 다른 요소에 비해 매우 큰 값을 갖는 것으로 두어 관련수식을 단순화시킬 수 있다.

3.2 모드 해석에 의한 단일 회전체 불균형 응답 함수 계산

연결/지지요소를 제외한 단일 회전체 모델의 불균형 응답 함수는 식 (2)로 표현되며 행렬 M_i , G_i , K_i 가 모두 대칭이다. 따라서 일반적인 구조물의 비

감쇠계에 대한 문제형태로 취급할 수 있으므로 고전적인 모드 해석을 이용하여 해석적인 표현을 얻을 수 있다. $H_{i,jf}$ 에 대해서 고전적인 모드 해석 기법을 이용해 다음과 같은 관계식을 얻을 수 있다.

$$H_{i,jf} = \{D_{i,jf}\}^{-1} = \sum_{k=1}^{N_i} \frac{u_{i,jfk} u_{i,jfk}^T}{\omega_{i,jfk}^2 - \Omega^2} \quad (10)$$

이때 고유치와 고유벡터는 다음의 고유치 문제를 풀어 결정할 수 있다.

$$\{-\omega_{i,jk}^2(M_i - G_i) + K_i\} u_{i,jk} = 0, \quad k=1, 2, \dots, N_i \quad (11)$$

여기서 고유벡터는 아래에 주어진 직교성을 만족할 수 있다.

$$\begin{aligned} u_{i,jk}^T (M_i - G_i) u_{i,jl} &= \delta_{kl} \\ u_{i,jk}^T K_i u_{i,jl} &= \omega_{i,jk}^2 \delta_{kl} \quad k, l=1, 2, \dots, N_i \end{aligned} \quad (12)$$

여기서 δ_{kl} 는 Kronecker 델타이다. 식 (10)과 유사하게 $H_{i,bb}$ 는 다음과 같이 얻어진다.

$$H_{i,bb} = \{D_{i,bb}\}^{-1} = \sum_{k=1}^{N_i} \frac{u_{i,bk} u_{i,bk}^T}{\omega_{i,bk}^2 - \Omega^2} \quad (13)$$

여기서 고유치와 고유벡터는 다음의 고유치 문제를 만족한다.

$$\begin{aligned} \{-\omega_{i,bk}^2(M_i + G_i) + K_i\} u_{i,bk} &= 0, \\ k &= 1, 2, \dots, N_i \end{aligned} \quad (14)$$

그리고 고유치와 고유벡터는 다음과 같은 직교성을 만족할 수 있다.

$$\begin{aligned} u_{i,bk}^T (M_i + G_i) u_{i,bl} &= \delta_{kl} \\ u_{i,bk}^T K_i u_{i,bl} &= \omega_{i,bk}^2 \delta_{kl} \quad k, l=1, 2, \dots, N_i \end{aligned} \quad (15)$$

결국 식 (10)과 (13)을 이용하면 연결/지지부가 배제된 모델에 대한 불균형 응답함수를 간단히 비감쇠계에 대한 고유치 문제의 결과를 이용하여 표현할 수 있음을 알 수 있다. 일반 좌표계를 사용하는 경우, 베어링을 고려하지 않더라도 자이로 행렬에 의해 비대칭 행렬식이 얻어지게 되어 고전적인 모드 해석법에 의해서는 식 (10)이나 (13)과 같은 결과를 얻을 수 없게 된다. 그러나 이미 기술한 바와 같이 복소좌표계를 이용하여 전방과 후방 응답으로 분리시키면 대칭 행렬식으로 유도되어 자기 수반계에 관한 고유치 문제를 통해 결과식을 얻을 수 있게됨을 알 수 있다. 한편 부분 구조계의 차수가 높지 않다면 동강성 행렬에 대해 직접 역행렬을 계산하는 방법도 사용이 가능할 것으로 사료된다.

3.3 부분 구조 합성에 의한 전체 회전체 베어링계의 불균형 응답 함수 계산

전체 회전체 베어링계의 불균형 응답식은 부분 구조계를 합성하여 얻을 수 있는데 식 (4-2)로 부터 아래와 같은 등식에서 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} H_{jf}^s & 0 \\ 0 & H_{bb}^s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} H_{jf}^0 & H_{fb}^0 \\ H_{bf}^0 & H_{bb}^0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} H_{jf}^s & 0 \\ 0 & H_{bb}^s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{jf}^c & D_{fb}^c \\ D_{bf}^c & D_{bb}^c \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} H_{jf}^0 & H_{fb}^0 \\ H_{bf}^0 & H_{bb}^0 \end{bmatrix} & \end{aligned} \quad (16)$$

이때 연결부의 행렬이 성긴 행렬이 되므로 식 (6)을 식 (16)에 대입하여 식 (17)을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} H_{jf}^s & 0 \\ 0 & H_{bb}^s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} H_{jf}^0 & H_{fb}^0 \\ H_{bf}^0 & H_{bb}^0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} H_{jfmN}^{sT} & 0 \\ 0 & H_{bbmN}^{sT} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} d_{jf}^c & d_{fb}^c \\ d_{bf}^c & d_{bb}^c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{jfmN}^0 & H_{fbmN}^0 \\ H_{bfmN}^0 & H_{bbmN}^0 \end{bmatrix} & \end{aligned} \quad (17)$$

따라서 식 (17)의 양쪽 좌측에 행렬 $\begin{bmatrix} T_m & 0 \\ 0 & T_m \end{bmatrix}$ 를 곱하고 정리하면 다음의 계산식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} H_{jfmN}^0 & H_{fbmN}^0 \\ H_{bfmN}^0 & H_{bbmN}^0 \end{bmatrix} &= \left\{ I + \begin{bmatrix} H_{jfmN}^s & 0 \\ 0 & H_{bbmN}^s \end{bmatrix} \right. \\ \left. \begin{bmatrix} d_{jf}^c & d_{fb}^c \\ d_{bf}^c & d_{bb}^c \end{bmatrix} \right\}^{-1} \begin{bmatrix} H_{jfmN}^0 & 0 \\ 0 & H_{bbmN}^0 \end{bmatrix} & \end{aligned} \quad (18)$$

여기서

$$\begin{aligned} H_{\cdot\cdot; mN}^0 &= T_m H_{\cdot\cdot}^0, \quad H_{\cdot\cdot; mN}^s = T_m H_{\cdot\cdot}^s; \\ H_{\cdot\cdot; mn}^s &= T_m H_{\cdot\cdot}^s; \quad T_m^T = \text{diag}\{T_1 H_{1,\cdot}, \dots, T_1^T, \\ & T_2 H_{2,\cdot}, \dots, T_2^T, \dots, T_n H_{n,\cdot}, \dots, T_n^T\} \end{aligned}$$

이다. 식 (18)을 식 (17)에 다시 대입하고 정리하면 다음의 최종 계산식을 얻을 수 있다.

$$H_{jf}^0 = H_{jf}^s - \{H_{jfmN}^s\}^T P H_{jfmN}^0 \quad (19)$$

$$H_{bf}^0 = -\{H_{bbmN}^s\}^T Q H_{jfmN}^0 \quad (20)$$

여기서

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} P & R \\ Q & S \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} d_{jf}^c & d_{fb}^c \\ d_{bf}^c & d_{bb}^c \end{bmatrix} \left\{ I + \begin{bmatrix} H_{jfmN}^s & 0 \\ 0 & H_{bbmN}^s \end{bmatrix} \right. \\ \left. \begin{bmatrix} d_{jf}^c & d_{fb}^c \\ d_{bf}^c & d_{bb}^c \end{bmatrix} \right\}^{-1} & \end{aligned} \quad (21)$$

이때 P, Q, R, S 는 모두 $m \times m$ 의 크기를 갖는 부분 행렬이다. 또한 식 (19), (20)을 부분 회전체 좌표에 관련된 식으로 다음과 같이 간편하게 기술할 수 있다.

$$\begin{aligned} H_{jf}^0(\alpha, \beta) &= H_{\alpha,jf} \delta_{\alpha\beta} - \{T_{\alpha} H_{\alpha,jf}\}^T \\ & P(\alpha, \beta) T_{\beta} H_{\beta,jf} \end{aligned} \quad (22)$$

$$H_{bf}^0(\alpha, \beta) = -\{T_\alpha H_{a,bb}\}^T Q(\alpha, \beta) T_\beta H_{b,ff} \quad (23)$$

여기서 (α, β) 로 표기한 것은 β 번째 회전체 좌표계의 입력에 대한 α 번째 회전체 좌표계에서의 출력을 표시한 것이며 $m_\alpha \times m_\beta$ 의 크기를 갖는다. 식 (22), (23)은 식 (4)의 $2N \times 2N$ 행렬 계산식을 근사화 없이 $2m \times 2m$ 으로 압축한 행렬을 계산하도록 개선한 식이므로 원래의 식 보다 그 계산시간을 대폭 단축시킬 수 있다. 즉 연결/지지부 요소를 제외한 단일 회전체계에 대해 식 (10), (13)의 고전적인 모드 해석 기법을 이용하여 $H_{i,ff}$, $H_{i,bb}$ 를 구한 후, 식 (21)의 $2m \times 2m$ 의 역행렬 계산과 간단한 행렬곱 연산으로 부터 전체계에 대한 결과를 얻을 수 있다. 또한 식 (19), (20)에 비해 계산을 요하는 부분만의 식으로 간결화되어 컴퓨터 기억용량 및 계산시간을 대폭 절감할 수 있다.

일반적으로 복소 불균형 벡터는 다음과 같이 표현된다.

$$W^T = \{W_1^T \ W_2^T \ \dots \ W_n^T\} \quad (24)$$

여기서 $W_i, i=1, 2, \dots, n$, 은 i 번째 회전체에 인가된 복소 불균형 벡터이다. 식 (A9)로부터 불균형 응답은 다음과 같이 얻어진다.

$$p_f = H_{ff}^0 W \Omega^2 \quad p_b = H_{bf}^0 W \Omega^2 \quad (25)$$

관심있는 회전속도 영역에 대해 식 (25)로부터 응답을 구하여 회전속도에 대해 그림을 그리면 일반적인 불균형 응답 선도를 얻을 수 있다. 불균형 응답을 표현하는 또 다른 방법으로서 고정된 회전속도에 대해 2차원 평면상의 선회격자를 구하기도 하는데 이때 얻어지는 그림을 Orbital 선도(Lissajous 선도)라고 하며 식 (A8)을 이용하여 구할 수 있다.

4. 수치 예제 및 토의

4.1 수치예제 1

본 수치예제에서는 계산효율을 비교하기 위해 Fig. 1과 같이 동일한 회전체가 연속적으로 연결된 다단 회전체 베어링계를 대상으로 회전체의 수(n)를 증가시키면서 불균형 응답을 계산하였다. 이때 제안한 방법과 직접 계산법을 동시에 적용하여 계산 효율을 비교하였다. 회전축에 대한 유한요소 모델은 동일 크기의 12개 보요소로 구성하였다. 따라서 직접 계산법에서는 $26n \times 26n$ 의 복소행렬에 대한 역행렬 계산이 필요하나 제안된 방법에서는 최종적으로 $3n \times 3n$ 의 행렬을 취급하게 된다. 동일한 조건에서 계산효율을 비교하기 위해 PC486에서 Matlab⁽¹⁹⁾을 이용하

여 계산 프로그램을 구성하였다. 계산을 통해 얻어진 불균형 응답 함수 및 불균형 응답은 두 방법에서 모두 동일한 결과를 나타내었다.

Fig. 2는 제안된 방법과 직접 계산법에 대해 회전체의 갯수 증가에 따른 계산시간의 변화를 나타낸 그림이다. 계산시간은 한개의 회전속도에서 불균형 응답 행렬을 계산하는 시간으로 하였고 데이터를 읽거나 계산결과를 도시하는 시간 등은 제외하고 순수하게 계산에 소요되는 시간만을 나타내었다. 직접 계산법에서의 역행렬 계산은 가우스 소거법을 이용하였다. 직접 계산법에서는 계산시간이 자유도의 증가에 따라 급격히 증가하고 있으나 제안된 방법은 기존의 방법에 비해 월등히 적은 계산 시간이 소요되고 있음을 알 수 있다. 한편 제안한 방법에서는

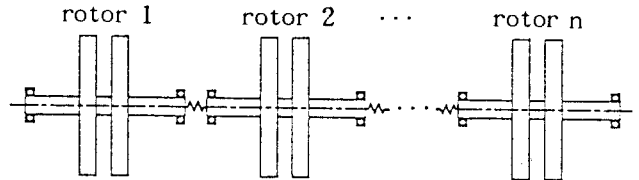


Fig. 1 Numerical model I:n-span rotors connected by identical couplings

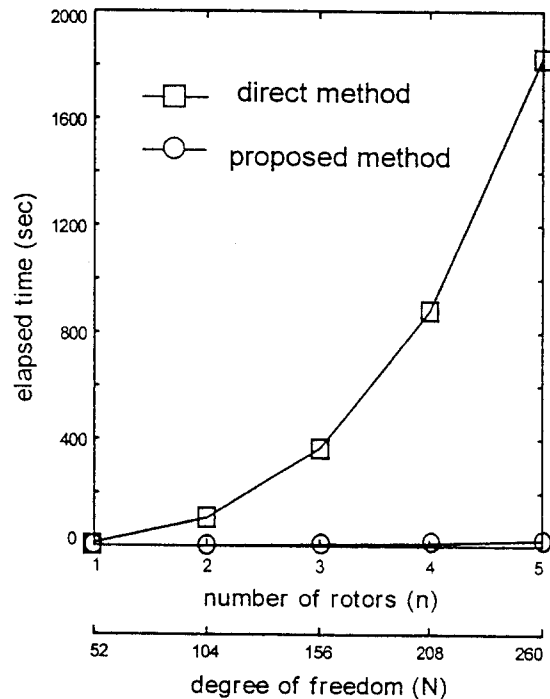


Fig. 2 Comparison of the proposed and direct methods on elapsed time for one point unbalance response computation with numerical model I

고유치 문제에 대한 해를 요하는데, 다루어야 할 고유치 문제가 자기수반계에 대한 것이므로 계산시간이 충분히 적었고 초기에 한번만 계산하면 되므로 계산점이 많아지면 무시할 수 있다. 또한 모드 해석을 통해 구하는 단일 회전체의 불균형 응답 계산과 정도 한번의 고유치 문제 계산으로 충분하고 단순히 급수 형태로 나타날 뿐 아니라 필요하다면 관심 회전속도 영역에서 멀리 떨어진 고유진동수를 계산에서 배제시켜 계산시간을 더욱 단축시킬 수 있을 것으로 생각된다.

4.2 수치예산 2

본 예제에서는 실용적인 문제로서 회전체 베어링계 설계시 여러가지 베어링에 대한 불균형 응답을 계산하는 과정을 실행하였다. Fig. 3에 보이고 있는

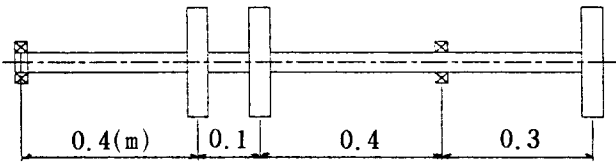
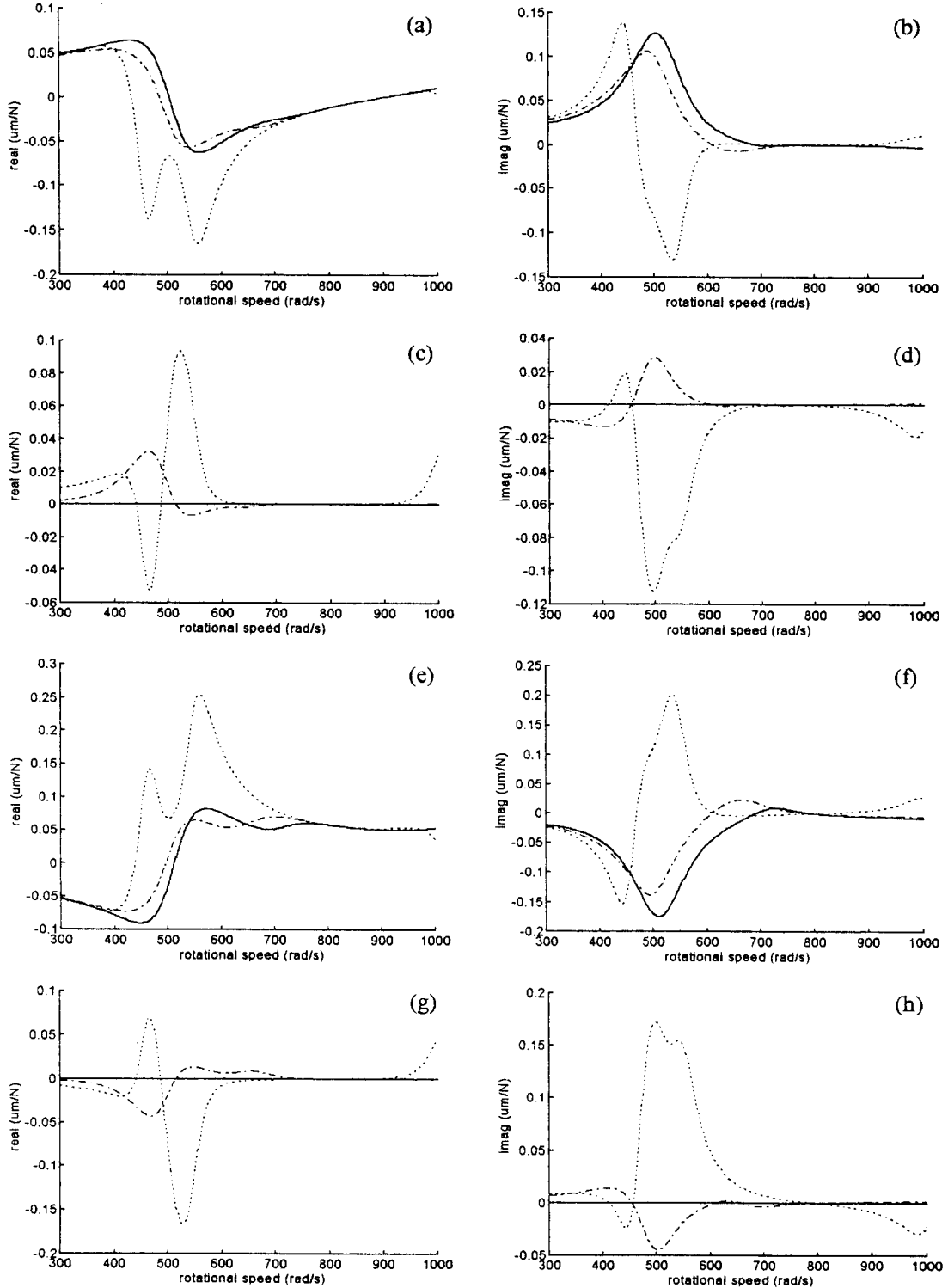


Fig. 3 Numerical model II: A laboratory test model

모델을 고려하였으며 회전체에 대한 자세한 제원은 Table 1에 제시하였다. 본 예제에서 고려하고 있는 모델은 13개의 절점을 두었으므로 식 (6)을 이용한 기존의 직접 계산법에 의해 불균형 응답을 계산하기 위해서는 52×52 크기의 복소행렬에 대한 역행렬 계산이 필요하다. 그러나 베어링이 2개로서 베어링에 관련된 자유도가 4이므로 제안한 방법을 이용하면 4×4의 행렬에 대한 역행렬 계산식으로 압축된다. 본 예제에서는 베어링 특성에 따른 불균형 응답의 변화를 보기 위해 서로 다른 3가지 유막베어링을 사용하였을 때의 불균형 응답을 계산하였다. 유막베어링은 일반적으로 회전속도 증속성을 보이고 있는데 계산에 사용된 베어링 동적계수는 참고문헌 (20)에 정리된 관련 데이터를 선형 보간하여 사용하였다. 동일한 회전체에 대해 베어링 특성만을 변화시킨 경우이므로 제안된 방법에서는 베어링 특성만을 교체하면서 간단히 불균형 응답을 계산할 수 있다. 모든 베어링에 대한 공통적인 조건으로 $L/D=0.5$, $C/R=2/1000$, $\mu=9.37 \text{ mPa}\cdot\text{s}$ 로 두었으며 좌측과 우측 베어링에 각각 29.42 kgf, 78.84 kgf의 하중이 인가되는 것으로 두었다. 각 베어링의 독립적인 특성들은

Table 1 Specifications of numerical model II

Shaft	Length	1.20m	
	Diameter	8.0cm	
	Young's modulus	$2.0 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$	
	Density	8000 kg/m^3	
	# of finite element	12 (equal length)	
Disk (3 identical)	Mass	20kg	
	Polar moment of inertia	$0.163 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$	
	Diametral moment of inertia	$0.085 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$	
	Location (from left)	Node #5(0.4m), Node #6(0.5 m) Node #13(1.2 m)	
Bearings	Bearing #1	Location (from left)	Node #1(0m)
		Load	29.42 kgf
		L/D, C/R	0.5, 2/1000
		Viscosity	9.37 mPa.s
	Bearing #2	Location (from left)	Node #10(0.9m)
		Load	78.84 kgf
		L/D, C/R	0.5, 2/1000
		Viscosity	9.37 mPa.s



(a) forward real ($h_{tt5,5}$) (b) forward imaginary ($h_{tt5,5}$) (c) backward real ($h_{bt5,5}$) (d) backward imaginary ($h_{bt5,5}$)
 (e) forward real ($h_{tt13,5}$) (f) forward imaginary ($h_{tt13,5}$) (g) backward real ($h_{bt13,5}$) (h) backward imaginary ($h_{bt13,5}$)
: 2 axial groove —: 4 tilting pad -·-·-·: 5 tilting pad

Fig. 4 Unbalance response functions at nodes #5 and #13(disk #1 and #3)

Table 2에 나타내었다. 제안된 방법과 직접 계산법을 모두 적용하여 계산결과가 동일함을 검증하였으며 제안된 방법이 약 41배 정도 계산속도가 빠른 것을 파악할 수 있었다.

Fig. 4는 3가지 베어링을 사용한 경우의 불균형 응답 계산결과로서 디스크 1,3에 대한 불균형 응답 함수를 보여주고 있다. 2 axial groove 베어링의 응답

Table 2 Specification of fluid film bearings used in numerical model II

Bearing type	Characteristics
2 axial groove	Oil groove angle=10°
4 tilting pad	Tilting pad angle=80° Preload factor=0 LBP type
5 tilting pad	Tilting pad angle=60° Preload factor=0 LBP type

이 다른 2가지 베어링의 경우 보다 응답이 크게 나타나고 있으며 4,5 tilting pad 베어링은 대체로 유사한 정도의 크기를 갖는 것을 볼 수 있다. 그러나 4 tilting pad 베어링의 경우에는 베어링이 등방성의 특성을 가지므로 후방 불균형 응답이 관측되지 않음을 알 수 있다. Fig. 5는 디스크 1에 10 g-cm의 불균형을 인가했을 때 디스크 3에서 구해진 불균형 응답으로서 불균형 응답 함수에 불균형 벡터를 곱하여 얻은 그림이다.

4.3 수치예제 3

본 예제에서는 Fig. 6에서 보이고 있는 실제 항공기 엔진용 2 스톱 회전체에 제안된 방법을 적용하였다. 본 예제의 회전체에 대한 유한 요소 모델 데이터는 참고문헌 (15)에 자세히 기술되어 있으며 여기서는 이를 그대로 이용하였다. 두개의 회전체 중 바깥측 회전체는 15,000 rpm의 일정한 회전속도이며 내부 불균형이 없다고 가정하였고 내측의 회전체는 회전속도가 100~2,000 rad/s로 변화된다고 두고 불

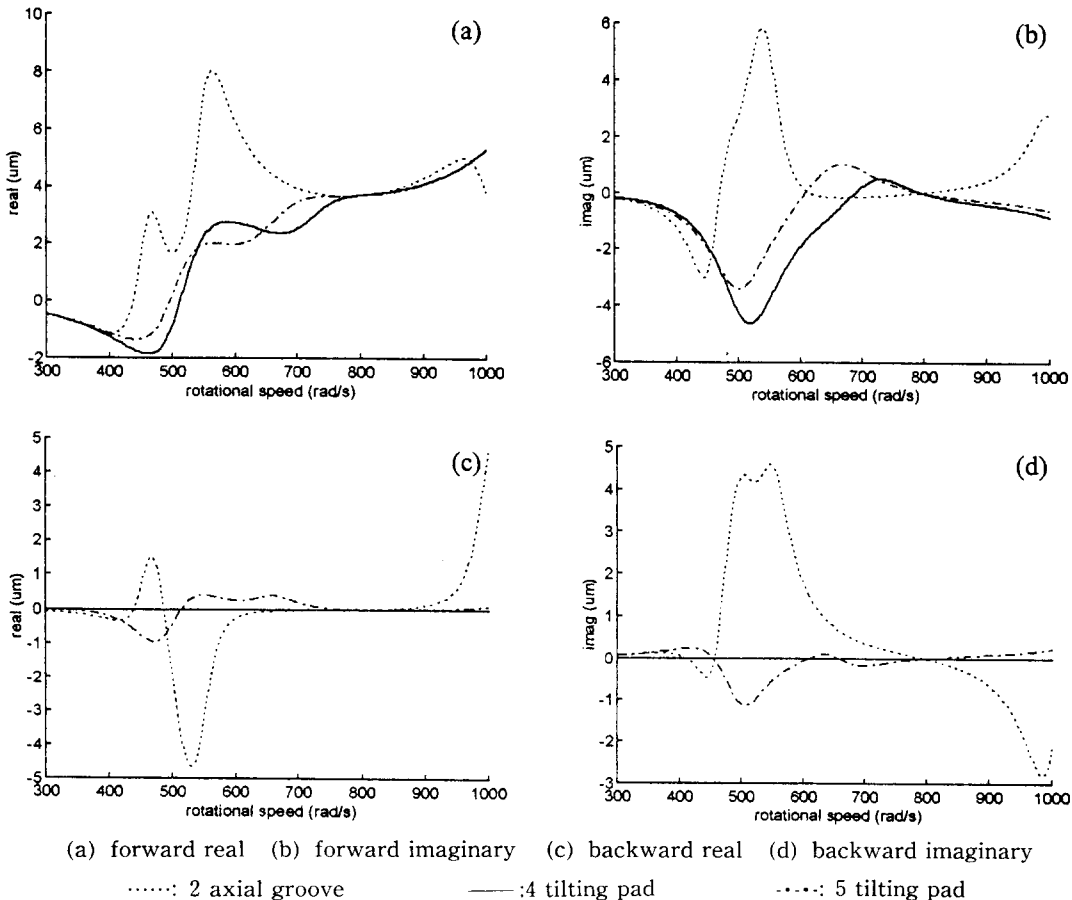


Fig. 5 Unbalance responses at disk #3(node #13) when an unbalance of 10 g-cm is attached to disk #1(node #5)

균형 응답을 계산하였다. 내측 회전체의 절점 9, 20에 서로 반대 위상으로 놓인 같은 양의 불균형, 3.6 g-cm가 부착되어 있다고 두었다. 제안된 방법에서

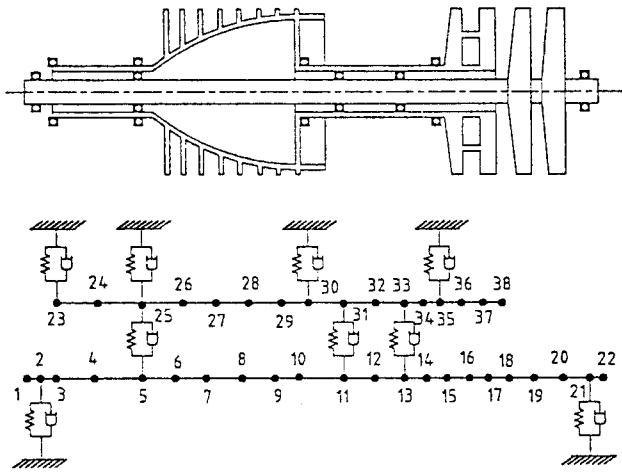
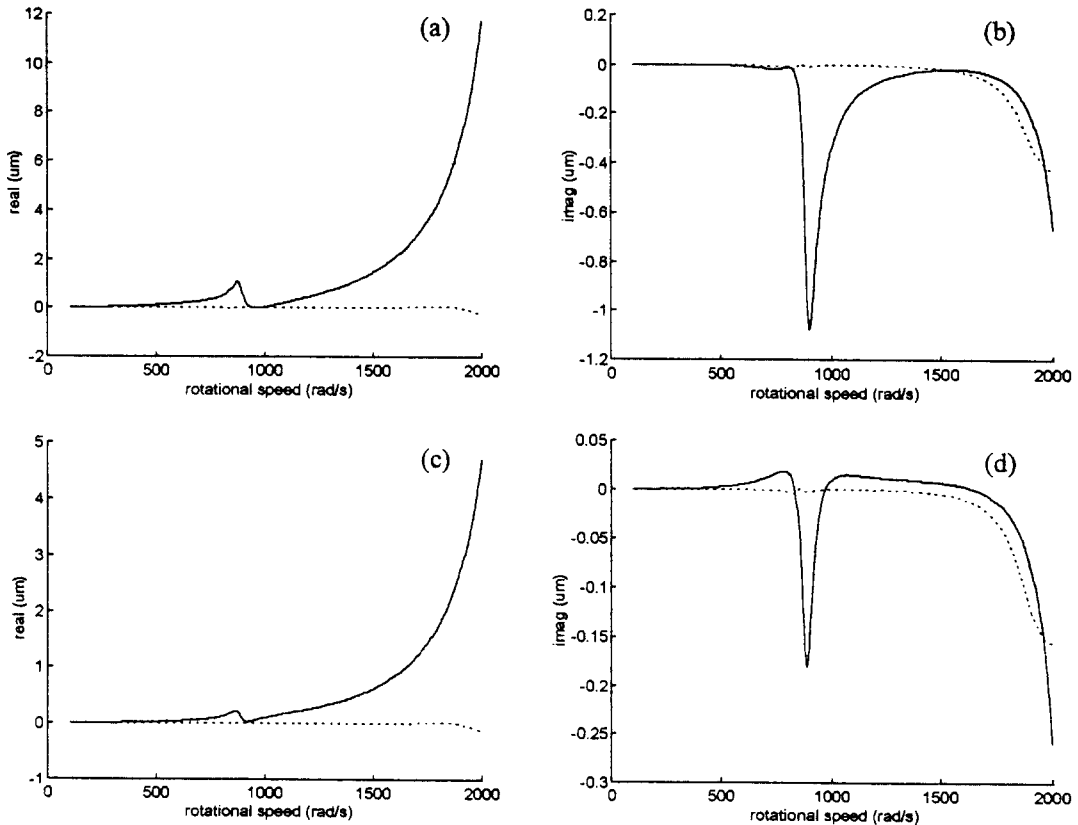


Fig. 6 Numerical model III: a two spool aircraft engine

는 전체 회전체 베어링계에 대한 불균형 응답을 구하기 위해 먼저 연결/지지부를 제외한 상태의 단일 회전체 각각에 대한 불균형 응답을 계산할 필요가 있다. 본 예제에서는 바깥측 회전체가 일정한 속도로 회전하고 있는 특별한 조건이기 때문에 바깥측 회전체의 응답은 식 (10), (13)으로 표현되는 모드 해석법을 사용할 수 없다. 따라서 직접 계산법을 이용하여 바깥측 회전체의 불균형 응답 함수를 계산하였고 내측 회전체에 대해서만 모드 해석법을 이용하여 불균형 응답 함수를 계산하였다. 그리고 전체 회전체 베어링계의 불균형 응답 함수는 개별적으로 계산된 불균형 응답 함수를 식 (19)~(21)에 대입하므로써 연결/지지부의 특성을 포함시켜 합성하여 얻을 수 있었으며, 최종적인 불균형 응답은 식 (25)를 이용하여 결정하였다. Fig. 7에는 2개의 절점위치에서 계산된 불균형 응답을 보여주고 있다. 본 예제에서는 제안된 방법이 직접 계산법 보다 약 11배 정도 계산속도가 빠른 것으로 파악되었다.



(a) Real of forward and backward at node #5
 (b) Imaginary of forward and backward at node #5
 (c) Real of forward and backward at node #25
 (d) Imaginary of forward and backward at node #25
 — : forward
 : backward

Fig. 7 Unbalance responses at node #5 and #25 of numerical model III

수치예제를 이용한 검토 결과 일반 회전체 베어링계의 불균형 응답 해석에 제안한 방법을 적용하면 계산상의 오차를 유발하지 않으면서도 기존의 방법에 비해 수치계산 노력이 획기적으로 줄어듦을 알 수 있었다. 또한 실제 회전체 베어링계에서 베어링의 갯수는 많지 않으며 복잡한 회전기계는 다단으로 이루어진다는 점을 고려할 때 본 방법은 매우 효과적인 방법으로 생각된다. 특히 회전체 베어링계의 특성설계에 있어 베어링의 위치나 특성을 변화시키면서 반복적인 계산을 하는 경우가 많은데 이때 베어링의 위치나 특성 데이터만을 변화시키면서 압축된 행렬계산을 하면 분석이 가능하므로 효과적인 활용이 가능하다.

5. 결 론

본 연구에서는 일반적인 다단 회전체 베어링계에서 연결/지지부의 특성이 비자기수반 특성과 회전속도 종속성을 야기시키지만 국부적으로만 존재한다는 점을 고려하여 단일 회전체에 대한 고전적인 모드 해석 적용 및 연결/지지부의 요소에 대해 행렬 압축 기법을 적용, 불균형 응답 계산을 효과적으로 할 수 있도록 개선된 부분 구조 합성법을 제안하였다. 단일 회전체에 대한 불균형 응답 계산에는 복소좌표계에 근거한 전방, 후방 응답 분리를 통해 자이로 효과에 의해 발생하는 비대칭성을 회피하고 비감쇠계에 대한 고유치 문제결과를 응답식에 사용할 수 있도록 하였다. 제안된 방법의 효율성을 검증하기 위해 유한요소법으로 모델링된 회전체 베어링계의 불균형 응답 계산에 본 방법을 적용하였고 기존의 직접 계산법과 비교하여 그 우수성을 입증하였다. 또한 두가지의 실용적인 예제에 제안한 방법을 적용하였다.

제안된 방법은 실제 대형이거나 복잡한 회전기계에서도 연결/지지부는 많지 않다는 점을 고려할 때 매우 효과적인 방법이다. 발전기와 같이 대형인 회전체의 경우에도 베어링이나 커플링은 많지 않으므로 각 회전체 별로 고전적인 모드 해석을 적용하고 합성시에는 연결/지지부의 자유도로 축소된 연산을 수행하여 불균형 응답을 계산할 수 있으므로 매우 효과적이다. 특히 회전체 베어링계의 특성설계에 있어 베어링의 위치나 특성을 변화시키면서 반복적인 계산을 필요로 하는 경우에 매우 효과적이다. 그러나 불균형 응답 해석은 정상상태의 응답특성 해석이므로 회전체 베어링계에 대한 안정성이나 고유치 특

성 해석은 수반되지 않으므로 이를 위해서는 별도의 계산이 필요하다. 계산의 효율성을 검증하기 위해 도입한 예제로부터 제안된 방법이 기존의 방법보다 월등히 계산시간을 단축할 수 있음으로 알 수 있었다. 또한 실제 회전체에 대해 제안된 방법을 손쉽게 적용할 수 있었다.

참 고 문 헌

- (1) Ruhl, R. L. and Booker, J. F., 1972, "A Finite Element Model for Distributed Parameter Turbo-Rotor Systems," Trans. ASME, Journal of Engineering for Industry, pp. 128~132.
- (2) Nelson, H. D. and McVaugh, J. M., 1976, "The Dynamics of Rotor Bearing Systems Using Finite Elements," Trans. ASME, Journal of Engineering for industry, Vol. 98, No. 2, pp. 593~600.
- (3) Nelson, H. D., 1980, "A Finite Rotating Shaft Element Using Timoshenko Beam Theory," Trans. ASME, Journal of Mechanical Design, Vol. 102, pp. 793~803.
- (4) Rouch, K.E. and Kao, J.S., 1979, "A Tapered Beam Finite Element for Rotor Dynamic Analysis," Journal of Sound and Vibration, Vol. 66, No. 1, pp. 119~140.
- (5) Hashish, E. and Sanker, T. S., 1984, "Finite Element and Modal Analyses of Rotor Bearing Systems under Stochastic Loading Conditions," Trans. ASME, Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design, Vol. 106, pp. 80~89.
- (6) Glasgow, D. A. and Nelson, H. D., 1980, "Stability Analysis of Rotor Bearing Systems Using Component Mode Synthesis," Trans. ASME, Journal of Mechanical Design. Vol. 102, pp. 353~359.
- (7) Kim, Y. D. and Lee, C. W., 1986, "Finite Element Analysis of Rotor Bearing System Using a Modal Transformation Matrix," Journal of Sound and Vibration, Vol. 111, pp. 441~456.
- (8) Ehrich, F. F., 1992, Handbook of Rotor-dynamics, McGraw Hill, Inc.
- (9) Lee, C. W. and Hong, S. W., 1990, "Asynchronous Harmonic Response Analysis of Rotor Bearing Systmes," International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis, Vol. 5,

- No. 2, pp. 51~65.
- (10) Klompas, N., 1983, "Unbalance Response Analysis of a Complete Turbomachine," Trans. ASME, Journal of Engineering for Power, Vol. 105, pp. 184~191.
- (11) Lee, C. W. and Hong, S. W., 1988, "Identification of Bearing Dynamic Coefficients by Unbalance Response Measurements," Proceedings of Institution of Mechanical Engineers, Vol. 203C, pp. 93~101.
- (12) 홍성욱, 박종혁, 1995, "회전체 베어링계에서 불균형 응답을 위한 효율적인 계산 방법," 한국정밀공학회지, Vol. 12, No. 9, pp. 137~147.
- (13) Guyan, R. J., 1965, "Reduction of Stiffness and Mass Matrices," AIAA Journal, Vol. 3, No.2, p. 380.
- (14) Meirovitch, L., 1980, Computational Methods in Structural Dynamics, Sijthoff & Noordhoff.
- (15) Wang, W. and Kirkhope, J., 1994, "Component Mode Synthesis for Multi-Shaft Rotors with Flexible Inter-Shaft Bearings," Journal of Sound and Vibration, Vol. 173, No. 4, pp. 537~555.
- (16) Fan, U. J. and Noah, S. T., 1988, "Vibration Analysis of Rotor Systems Using Reduced Subsystem Models," AIAA, Journal of Propulsion, Vol. 5, No. 5, pp. 602~609.
- (17) Ozguven, H. N., 1987, "A New Method for Harmonic Response of Non-Proportionally Damped Structures Using Undamped Modal Data," Journal of Sound and Vibration, Vol. 117, pp. 313~328.
- (18) Yang, B., 1993, "Exact Receptances of Non-proportionally Damped Dynamic Systems," Trans. ASME, Journal of Vibration and Acoustics, Vol. 115, pp. 47~52.
- (19) Moler, C., et al., 1992, PC-MATLAB User's Guide, The Math-Works, Inc.
- (20) Someya, T.(editor). 1988, Journal Bearing Databook, Spring-Verlag.

부 록

회전체 베어링계의 복소좌표 불균형 응답식 유도

회전체 베어링계의 유한요소 운동 방정식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$M^r \ddot{q}(t) + \{C^c(\Omega) + \Omega G^r\} \dot{q}(t) + \{K^r + K^c(\Omega)\} q(t) = f(t) \quad (A1)$$

여기서 상첨자 r, c 는 각각 회전체 및 연결/지지부(베어링 등)를 의미하며 유한요소 좌표벡터 $q(t)$ 와 힘벡터 $f(t)$ 는 다음과 같다.

$$q^r = \{y^r \ z^r\} \quad f^r = \{f_y^r \ f_z^r\} \quad (A2)$$

그리고, y 와 z 는 각각 절점에서의 y 방향과 z 방향 좌표벡터, 그리고 f_y 와 f_z 는 대응되는 힘벡터이다. 연결부의 강성 및 감쇠행렬 $K^c(\Omega)$ 와 $C^c(\Omega)$ 는 모두 일반적으로 비대칭이며 베어링 등에 의해 회전속도(Ω) 종속인 성긴(sparse)행렬이다. 관성행렬 M^r 과 강성행렬 K^r 은 대칭이고 자이로 행렬(gyroscopic matrix) G^r 은 반대칭(skew symmetric)이다. 시스템 전체 행렬은 모두 $2N \times 2N$ 이며 N 은 y 또는 z 좌표벡터의 차원이다 ($N=2 \times$ 유한요소 모델 절점수). 앞에서의 행렬들을 부분 행렬로 표현하면 다음과 같다.

$$M^r = \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \quad G^r = \begin{bmatrix} 0 & G \\ -G & 0 \end{bmatrix} \\ C^c = \begin{bmatrix} C_{yy} & C_{yz} \\ C_{zy} & C_{zz} \end{bmatrix} \quad K^c = \begin{bmatrix} K_{yy} & K_{yz} \\ K_{zy} & K_{zz} \end{bmatrix} \quad K^r = \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix} \quad (A3)$$

여기서 부분 행렬 M, G 및 K 는 대칭이다.

회전체의 동특성 해석을 위해서는 복소좌표계를 이용하는 것이 편리하므로 아래와 같은 복소 변위, 복소 힘벡터를 정의하기로 하자.

$$p = y + jz, \quad F = f_y + jf_z \quad (A4)$$

이때 운동 방정식 (A1)은 다음과 같이 복소 운동 방정식으로 다시 쓸 수 있다.

$$M\dot{p} - j\Omega G\dot{p} + C_f\dot{p} + C_b\ddot{p} + Kp + K_f\dot{p} + K_b\ddot{p} = F \quad (A5)$$

여기서 하첨자 f 와 b 는 각각 전방(forward) 및 후방(backward)을 그리고 '-'는 공액 복소수를 의미한다. 대각인 복소 베어링 감쇠 및 강성 행렬은 다음과 같다.

$$2C_f = C_{yy} + C_{zz} - j(C_{yz} - C_{zy}) \\ 2C_b = C_{yy} - C_{zz} + j(C_{yz} + C_{zy}) \\ 2K_f = K_{yy} + K_{zz} - j(K_{yz} - K_{zy}) \\ 2K_b = K_{yy} - K_{zz} + j(K_{yz} + K_{zy}) \quad (A6)$$

식 (A5)에서 외력이 불균형에 의해 주어진다고 하면 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$F = W \Omega^2 e^{j\Omega t} \quad (A7)$$

여기서 W 는 회전체에 인가되는 복소 불균형 벡터를 의미한다.

일반적으로 불균형 응답은 두개의 동조진동(synchronous vibrations), 즉 전방(forward)과 후방(backward) 성분으로 다음과 같이 나누어 쓸 수 있다.

$$p = p_f e^{j\Omega t} + \Omega p_b e^{-j\Omega t} \quad (A8)$$

여기서 p_f 와 p_b 는 각각 불균형 응답의 전방과 후방 선회응답(shirl response) 벡터를 의미한다. 이때 불균형 응답은 식 (A7), (A8)을 식 (A5)에 대입하여 얻을 수 있다. 즉

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} p_f \\ p_b \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} D_{ff} & D_{fb} \\ D_{bf} & D_{bb} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} W \Omega^2 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} H_{ff} & H_{fb} \\ H_{bf} & H_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W \Omega^2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{ff} \\ H_{bf} \end{bmatrix} W \Omega^2 \quad (A9) \end{aligned}$$

여기서

$$\begin{aligned} D_{ff} &= -\Omega^2 M + \Omega^2 G + K + K_f + j \Omega C_f \\ D_{bb} &= -\Omega^2 M - \Omega^2 G + K + \Omega K_f + j \Omega C_f \\ D_{fb} &= K_b + j \Omega C_b, \quad D_{bf} = \Omega K_b + j \Omega \Omega C_b \end{aligned} \quad (A10)$$

식 (A9)에서 H_{ff} , H_{bf} , H_{fb} , H_{bb} 가 불균형 응답 함수(unbalance response function)이며 불균형 응답 함수를 구하면 식 (A9)로부터 불균형 응답이나 영향 계수 등을 손쉽게 구할 수 있다.