

# 패드의 탄성변형을 고려한 공기윤활 틸팅패드 저어널 베어링의 윤활해석에 관한 연구

황 평 · 양승한\* · 윤성진\*

영남대학교 기계공학과, 영남대학교 대학원\*

## A Study on the Lubrication Analysis of Air-Lubricated Tilting Pad Journal Bearing with Pad Elasticity Effect

Pyung Hwang, Seung-Han Yang\*, Seong-Jin Yun\*

Department of Mechanical Engineering, Yeungnam University

\*Graduate School of Yeungnam University

**Abstract**—The static and dynamic stability analysis of air-lubricated tilting pad journal bearing which considers tilting effect of each pad and preload but neglects pad inertia were performed. And these characteristic analysis were performed with elasticity effect too. A direct numerical method is used in calculating the static characteristics such as load carrying capacity, friction force and perturbation method is used for calculation of dynamic characteristics. The stability analysis was performed with the variation of bearing number, eccentricity ratio and attitude angle considering pad elasticity effect.

### 1. 서 론

베어링의 속도한계를 정하는 중요한 요인은 자려진동, 불균형진동, 공진시의 진동, 높은 전단응력과 난류천이에 기초로한 소비동력, 발열증대 등이다. 이러한 자려진동을 방지하고 최고 회전속도를 높이기 위해 베어링 형태를 비진원으로 하거나, 베어링을 탄성 지지하여 오일 필름 댐퍼를 달고, 부동부시를 이용하고, 각각 자유롭게 독립적으로 움직일 수 있는 틸팅패드 형식을 이용하는 등의 대책이 제시되었다.

틸팅패드 저어널 베어링에 대해서는 1968년 Chu 등이 공기 윤활 베어링의 축의 안정성을 주파수 응답법과 비선형 궤적법으로 비교하였고, 다시 72년에 정상상태와 안정성에 관해 연구하였다[1-2]. 또, Elwell 등이 69년 층류, 비압축성 윤활제로 윤활되는 정특성을 연구하였다[3]. 84년 난류에서의 유체 관성력, 패드변형, 예압이 주는 영향에 대해 Hashimoto가 연구하였고, 88년에는 Knight등이 열전달 효과를 고려한 해석을 수행하였다[4-6]. 황 등[7]은 공기로 윤활되는

틸팅패드 저어널 베어링을 모델로 하여 패드에 작용하는 유막압력을 유량의 연속성을 이용한 직접해법[8]을 이용하여 얻은 후, 정적하중용량, 마찰력등의 정특성과, 교란지배방정식에 의하여 강성계수, 감쇠계수등의 동특성을 계산하였다.

본 논문에서는 이를 더욱 발전시켜, 4차 편미분 방정식으로 구성된 처짐방정식을 도입하여 패드의 처짐 다시 말해서, 하중에 의한 각각 패드의 탄성변형을 고려하여 본 베어링의 정적 및 동적 특성들에 대한 윤활 해석을 수행함과 동시에 이들에 대한 안정성을 검토하고자 한다.

### 2. 이론적 고찰

#### 2-1. 틸팅패드 저어널 베어링의 모델링

공기윤활 틸팅패드 저어널 베어링을 Fig. 1에 나타내었다. 여기서 네 개의 패드는 각각  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $\theta_3$ ,  $\theta_4$ , 각도에서 라인 피복 지지되어 있고, 각 패드는  $\theta_c$ 에서  $\theta_c$  만큼의 각도로 되어있다. 또한,  $C_b$ 는 베어

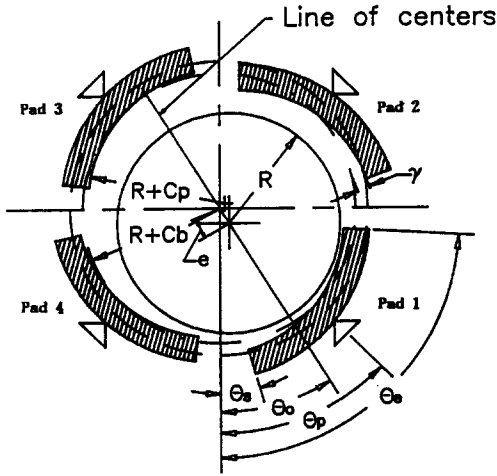


Fig. 1. Geometry of tilting pad journal bearing.

링 틸새를,  $C_p$ 는 패드 틸새를 가지며 각도  $\gamma$ 로 기울어져 있다.

그러므로, 베어링 틸새 및 패드틸새, 패드의 회전각 등을 고려하여 베어링의 유막두께는 다음의 식 (1)로 나타낼 수 있다[1,2,6].

$$h = C_p - e \cos(\theta - \theta_p) - (C_p C_b) \cos(\theta - \theta_p) - \gamma R \sin(\theta - \theta_p) \quad (1)$$

### 2-2. 지배방정식의 유도

공기역학 베어링의 유막압력분포의 해석을 위하여 유도된 레이놀즈 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial}{\partial x} [ph^3 \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} [ph_3 \frac{\partial p}{\partial z}]] = 6\eta U \frac{\partial(ph)}{\partial x} + 12 \frac{\partial(ph)}{\partial t} \quad (2)$$

윗 식을 무차원화 하기 위해 무차원 변수를 다음과 같이 둔다.

$$P = \frac{p}{P_a}, H = \frac{h}{C_p}, \theta = \frac{x}{R}, \phi = \omega t$$

여기서,  $P_a$ 는 대기압,  $R$ 은 베어링반경,  $L$ 은 베어링의 길이이다.

결국 다음과 같은 무차원화 된 레이놀즈 방정식이 유도된다.

$$\frac{\partial}{\partial \theta} [PH^3 \frac{\partial P}{\partial \theta}] + (\frac{R}{L})^2 \frac{\partial}{\partial Z} [PH^3 \frac{\partial P}{\partial Z}]$$

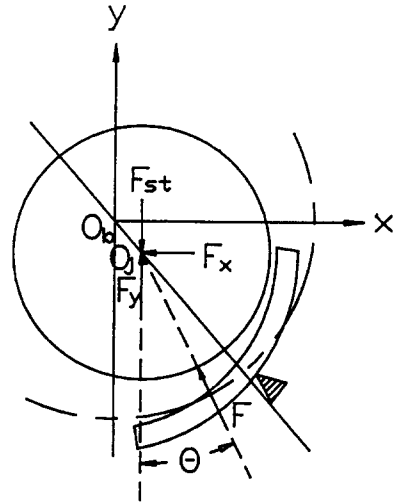


Fig. 2. Coordinate system for static forces.

$$= \Lambda \frac{\partial(PH)}{\partial \theta} + 2\Lambda \frac{\partial(PH)}{\partial \phi} \quad (3)$$

여기서,  $\Lambda = \frac{6\eta RU}{P_a C_p^2}$ 이며, 압축성계수(compressibility number)이다. 또, 유막두께의 식 (1)도 무차원화 하면

$$H = 1 - \epsilon_p \cos(\theta - \theta_0) - m \cos(\theta - \theta_p) - \bar{\gamma} \sin(\theta - \theta_p) \quad (4)$$

여기서,  $m = \frac{(C_p - C_b)}{C_p}$ 로써 패드에 가하는 예압을 나타낸다.

그러나, 위에서 유도된 공기에 대한 레이놀즈 방정식은 압력에 대해서 비선형 방정식이므로 일반적으로 잘 풀리지 않는다. 그러므로 압력분포를 구하기위해 유체의 연속성을 이용하는 직접해법의 과정을 따른다.

## 3. 윤행 해석

### 3-1. 정특성 해석

Fig. 2와 같은 좌표계에서 무차원화된  $F_x$ 와  $F_y$ 는 다음과 같으며,

$$\bar{F}_x = \frac{F_x}{P_a RL} = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (P - 1) \sin \theta dz d\theta$$

$$\bar{F}_y = \frac{F_y}{P_a RL} = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (P - 1) \cos \theta dz d\theta \quad (5)$$

무차원화된 마찰력은 아래와 같다.

$$\bar{F}_R = \frac{F_R C_p}{RLU \eta} = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left( \frac{1}{\Lambda} + \frac{3}{\Lambda} H \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) d\theta dz \quad (6)$$

정적 평형 상태에서는 무차원 정하중  $\bar{F}$ 는  $X$ 방향으로만 작용하고, 자세각  $\theta_0$ 는 0이다. 또한 패드의 지지점에서 모우멘트는 평형을 이루어야 한다.

### 3-2. 패드의 탄성 변형

패드의 처짐을 고려하기 위하여 처짐 방정식을 나타내면 아래와 같으며, 패드의 기본적인 형상은 판으로 가정한다[9-10].

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{D} \quad (7)$$

여기서,

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}, \quad E = \text{Young 계수},$$

$\nu = \text{Poisson 비}, \quad t = \text{패드의 두께}$

위의 식 (7)를 무차원화하기 위해서 아래와 같은 무차원 변수군을 도입한다.

$$W = \frac{w}{C_p}, \quad X = \frac{x}{B}, \quad Y = \frac{y}{L}, \quad P = \frac{p}{P_a}$$

여기서  $C_p$ 는 패드의 틈새이며,  $L$ 은 베어링의 길이이고  $B$ 는 각각 패드의 폭을 의미하고 여기서는  $L$ 과  $B$ 가 같다고 본다. 그러면 아래의 무차원화 되어진 식으로 나타낼 수 있다.

$$\frac{\partial^4 W}{\partial X^4} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial X^2 \partial Y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial Y^4} = CP \quad (8)$$

여기서,  $C = \frac{12(1-\nu^2)L^4 P_a}{Et^3 C_p}$

기본적으로 패드에서의 처짐에 대한 경계조건은 피벗위치에서의 처짐은 0으로, 그리고 네곳의 가장자리는 자유단으로 모멘트와 transverse force( $m_x, v_x, m_y, v_y$ )는 0이라고 본다.

피벗은 라인 피벗으로 fixed된 경우에 대하여 해석을 하였다.

Fig. 3은 패드의 탄성변형에 관한 좌표계를 나타내고 있다. 피벗된 지점의 형태는 고정단으로 본다.

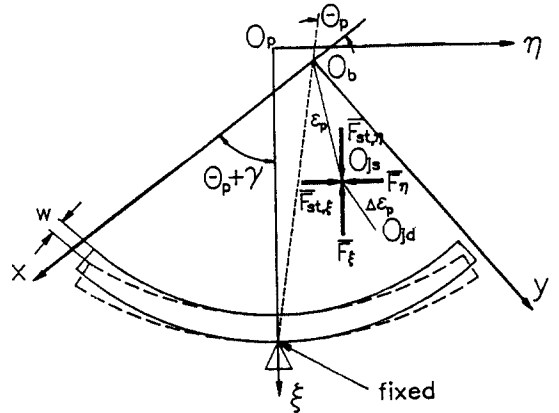


Fig. 3. Coordinate system for deflected pad.

### 3-3. 동특성 해석

유막의 동적작용에 의한 전체 유막에 의한 힘은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \bar{F}_\xi &= \bar{F}_{\sigma, \xi} = \gamma_{\xi\xi} \xi + \gamma_{\xi\eta} \eta + \beta_{\xi\xi} \xi' + \beta_{\xi\eta} \eta' \\ \bar{F}_\eta &= \bar{F}_{\sigma, \eta} + \gamma_{\eta\xi} \xi + \gamma_{\eta\eta} \eta + \beta_{\eta\xi} \xi' + \beta_{\eta\eta} \eta' \end{aligned} \quad (9)$$

유막두께의 교란과 미소변위에 의한 교란압력  $P$ 를 복소형식으로 나타내면, 다음과 같다.

$$H = H_0 + H_\xi \xi + H_\eta \eta \quad (10)$$

$$P = P_0 + P_\xi \xi + P_\eta \eta \quad (11)$$

와 같이 된다.

계수  $\gamma_{ij}$ 와  $\beta_{ij}$ 는 복소압력분포  $P_\xi$ 와  $P_\eta$ 를 각각 폭과 각 변위에 따라  $x, y$ 성분을 적분하여 구할 수 있으며, 아래와 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \gamma_{\xi\xi} &= \int_0^\theta \int_0^1 \text{Re}(P_\xi) \cos(\theta - \theta_p - \gamma) dz d\theta \\ \gamma_{\eta\xi} &= \int_0^\theta \int_0^1 \text{Re}(P_\xi) \sin(\theta - \theta_p - \gamma) dz d\theta \\ \beta_{\xi\xi} &= \int_0^\theta \int_0^1 \text{Im}(P_\eta) \cos(\theta - \theta_p - \gamma) dz d\theta \\ \beta_{\eta\xi} &= \int_0^\theta \int_0^1 \text{Im}(P_\eta) \sin(\theta - \theta_p - \gamma) dz d\theta \end{aligned} \quad (12)$$

위의 계수  $\gamma_{ij}$ 와  $\beta_{ij}$ 는 전체 베어링 좌표계  $x, y$ 에 대하여 나타내어져야 한다.

### 4. 해석결과와 고찰

본 연구에서 고찰한 공기윤활 틸팅패드 저어널베어링의 해석 알고리즘은 다음과 같다. 먼저 주어진 편심율, 패드 클리어런스, 압축성계수( $\epsilon_p$ ,  $\Lambda$ ,  $C_p$ )에 대해 패드 틸팅각을 가정한 후 직접해법을 이용하여 압력 계산을 한다. 이 때 피벗지점에서의 모멘트값이 0이 되도록 패드 틸팅각을 조절한다. 모멘트합이 0이 된 후, 여기서 구한 압력분포에 의한 패드의 탄성변형량을 계산하여 이를 유막두께와 함께 고려한다. 함께 고려한 탄성변형량이 수렴한도내에 들도록 한 후, 하중 지지능력, 마찰력 등의 정특성을 계산하며, 교란 유막 두께와 교란 압력에 의한 강성계수와 감쇠계수의 동 특성을 계산한다.

Fig. 4은 공기윤활 틸팅패드 저어널베어링의 압력 분포를 보여준다. 그림에서 보이듯이 좌우 하단(패드 1, 패드 4)의 압력분포가 좌우상단(패드 2, 패드 3)의 압력분포보다 크므로 축계를 지지하게 되며, 일반 저어널베어링과는 다른 좌우대칭형의 압력분포가 생기므로 안정성이 뛰어나다는 것을 알 수 있다.

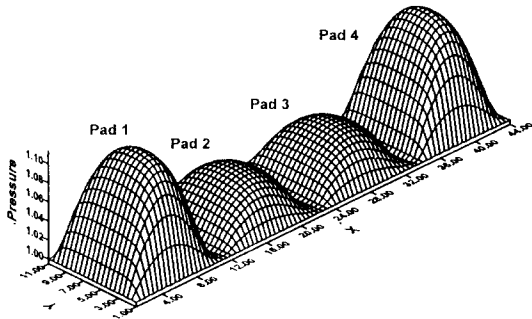


Fig. 4. Pressure distribution in tilting pad journal bearing ( $\Lambda=20$ ,  $\epsilon_p=0.1$ ,  $m=0.2$ ).

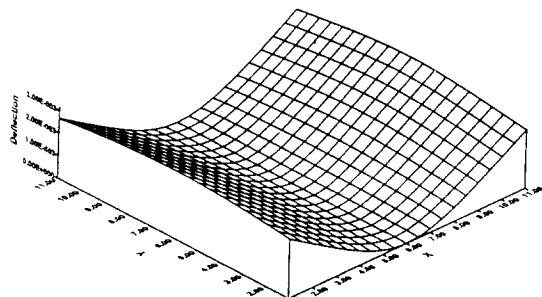


Fig. 5. Deflection of pad 1 ( $\Lambda=20$ ,  $\epsilon_p=0.1$ ,  $m=0.2$ ).

Fig. 5~Fig. 6은 주어진 압력분포에 의한 각 패드의 정적 처짐량을 나타낸다. 이 처짐량은 실제 처짐량을 패드의 클리어런스로 나눈 무차원량이다. 라인피벗된 지점에서의 처짐량은 0이며 패드의 폭방향으로 볼록한 형태로 나타낸다. 이는 패드의 압력분포가 Fig. 4에서 보이듯이 폭방향으로 대칭인 볼록한 형태로 나타나는 것으로부터 이해할 수 있다. 또한 패드 1의 압력 분포가 패드 2의 압력분포보다 큰 값을 나타내므로, 패드 1의 처짐량이 패드 2의 처짐량보다 상대적으로 큰 값을 나타낸다. 패드 1과 패드 4, 패드 2와 패드 3은 거의 똑같은 압력분포와 처짐량 분포를 나타낸다.

Fig. 7~Fig. 8는 편심율  $\epsilon_p$ 와 압축성계수에 대한 무차원 지지능력  $\bar{F}$ 의 변화를 나타낸다. 편심율이 커짐에 따라 무차원 지지능력은 급격히 증가한다. 또한 압축성계수가 증가함에 따라 무차원 지지능력의 값도

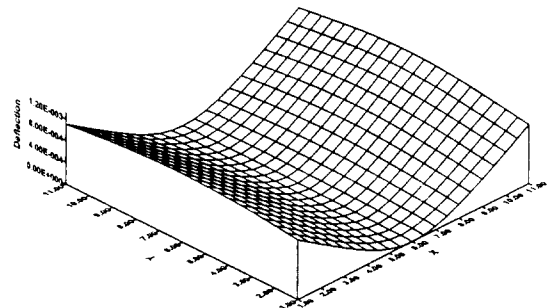


Fig. 6. Deflection of pad 2 ( $\Lambda=20$ ,  $\epsilon_p=0.1$ ,  $m=0.2$ ).

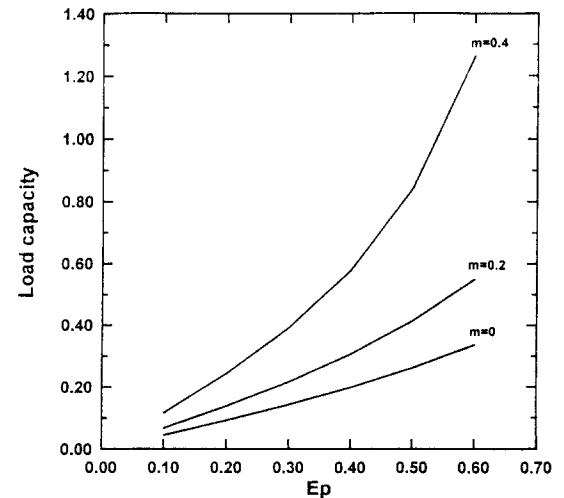


Fig. 7. Dimensionless load capacity versus eccentricity ratio ( $\Lambda=20$ ).

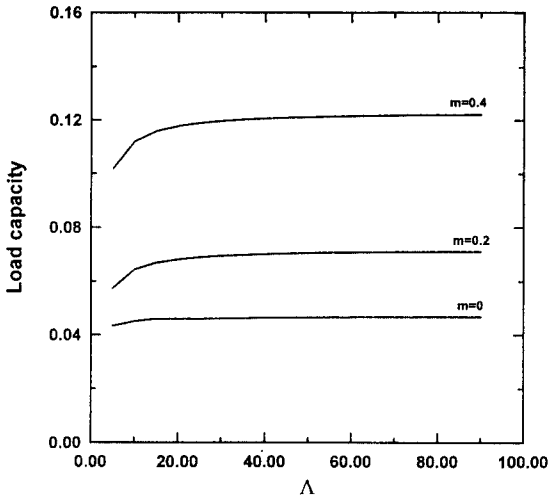


Fig. 8. Dimensionless load capacity versus compressibility number ( $\epsilon_p=0.1$ ).

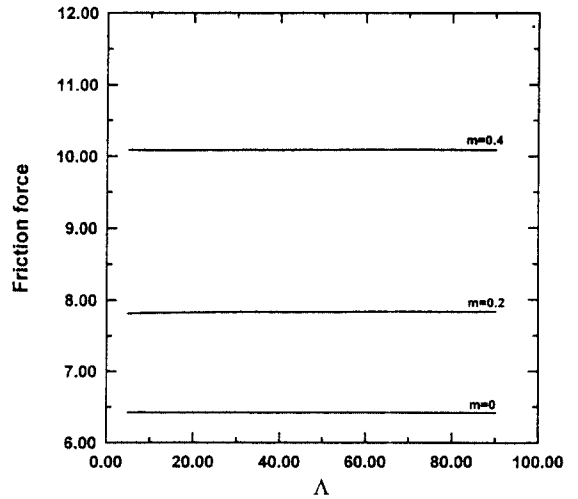


Fig. 10. Dimensionless friction force versus compressibility number ( $\epsilon_p = 0.1$ ).

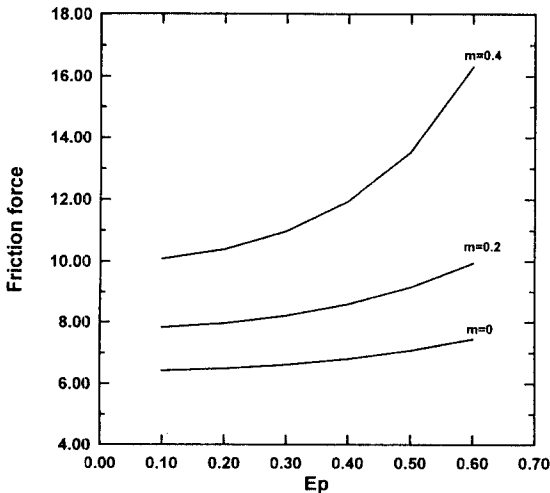


Fig. 9. Dimensionless friction force versus eccentricity ratio ( $\Lambda = 20$ ).

증가하나 어느 정도이상에서는 무차원 지지능력의 증가가 거의 없게 된다. 또한 예압이 증가함에 따라 무차원 지지능력 또한 증가하게 된다.

Fig. 9~Fig. 10은 편심율  $\epsilon_p$ 와 압축성계수에 대한 무차원 마찰력  $\bar{F}_R$ 의 변화를 나타낸다. 무차원 마찰력은 편심율이 커짐에 따라 무차원 지지능력의 증가능력과 비슷한 양상으로 증가하나, 압축성계수의 변화에 대해서는 거의 변화가 없다. 또한 예압이 증가함에 따라 무차원 마찰력 또한 증가하게 된다.

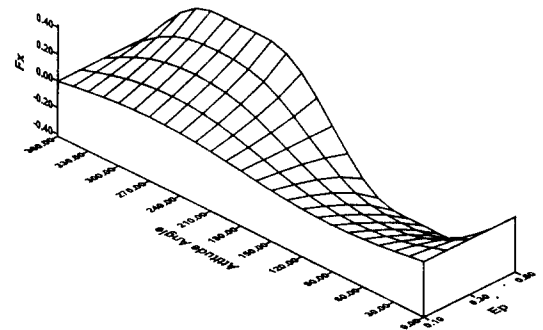


Fig. 11. Static force  $\bar{F}_x$  versus eccentricity ratio & attitude angle

Fig. 11~Fig. 16은 편심율  $\epsilon_p$ 와 자세각에 따른 정특성, 동특성값들의 변화를 보여주는 것으로 공기운환 틸팅패드베어링의 안정성해석을 위한 바탕자료들이다.

Fig. 11~Fig. 12은 무차원 하중지지능력  $\bar{F}$ 의 x, y방향의 분력을 나타낸다.  $\bar{F}_x$ 와  $\bar{F}_y$ 는  $2\pi$ 의 주기성을 가지고 있으며, 이들 각각은  $\frac{\pi}{2}$ 의 위상차를 가지고 있는 것을 알 수 있다. 또한 편심율이 증가함에 따라 절대값이 증가한다는 것을 알 수 있다( $\Lambda=20, m=0.2$ ).

Fig. 13~Fig. 16는 패드의 관성을 무시할 경우 ( $\Lambda=20, m=0.2$ ) 강성계수와 감쇠계수의 변화를 보여준다. 여기서  $\gamma_{xx}$ 와  $\gamma_{yy}$ ,  $\gamma_y$ 와  $\gamma_{yx}$ ,  $\beta_{xx}$ 와  $\beta_{yy}$ ,  $\beta_y$ 와  $\beta_x$

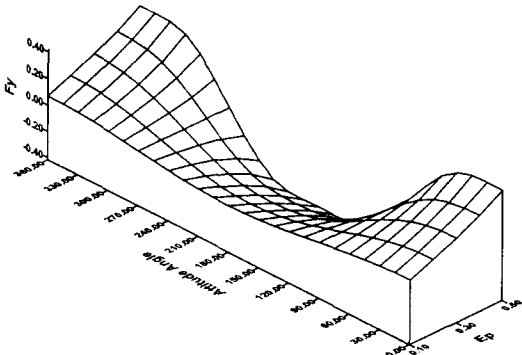


Fig. 12. Static force  $\bar{F}_y$  versus eccentricity ratio & attitude angle.

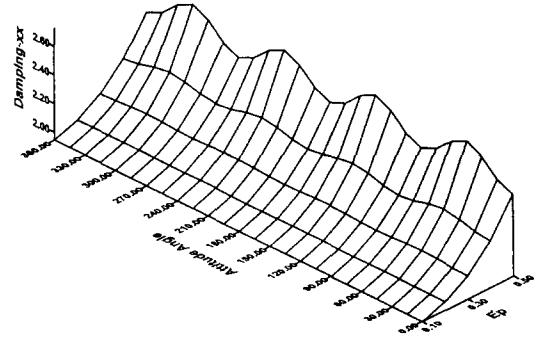


Fig. 15. Damping coefficient  $\beta_x$  versus eccentricity ratio & attitude angle.

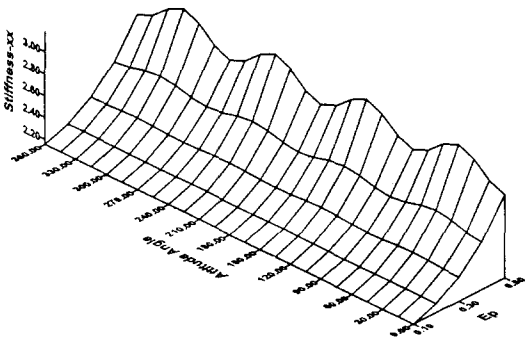


Fig. 13. Stiffness coefficient  $\gamma_x$  versus eccentricity ratio & attitude angle.

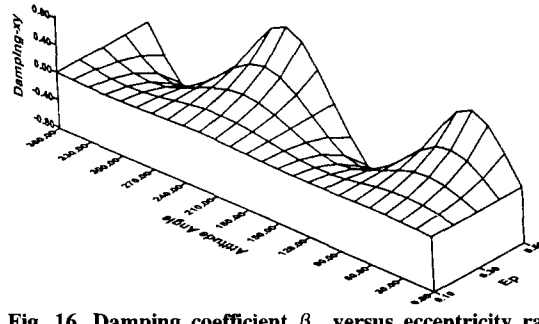


Fig. 16. Damping coefficient  $\beta_y$  versus eccentricity ratio & attitude angle.

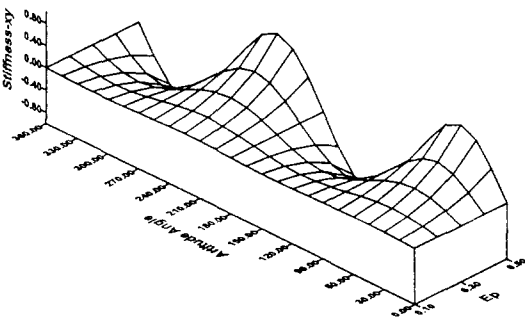


Fig. 14. Stiffness coefficient  $\gamma_y$  versus eccentricity ratio & attitude angle.

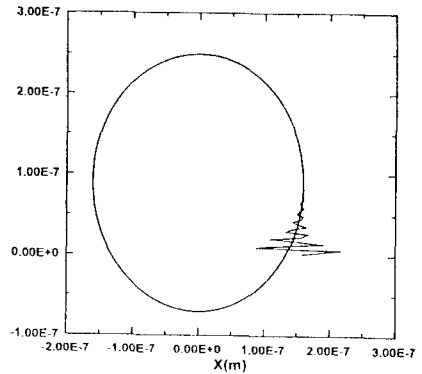


Fig. 17. Orbit of the journal center ( $\lambda = 20$ ,  $\varepsilon_p = 0.1$ ,  $m = 0.2$ ).

는 똑같은 경향을 나타낸다. 이들  $\gamma_x$ ,  $\gamma_y$ ,  $\beta_x$ ,  $\beta_y$ 는  $\frac{\pi}{x}$ 의 주기성을 보이며 각 패드의 피벗지점에서 최대값을 나타내며,  $\gamma_y$ ,  $\gamma_x$ ,  $\beta_y$ ,  $\beta_x$ 는  $\pi$ 의 주기성을 보이며 패드 1과 패드 3의 피벗지점에서 최대값을, 패드 2와 패드 4의 피벗지점에서 최소값을 나타낸다.

Fig. 17은 탄성로터의 2차 미분방정식에 대해 패드의 관성을 고려하여서 구한 강성계수와 감쇠계수를 대입하여 Runge-Kutta 4차법으로 구한 축중심의 실제 궤적을 표시한 것이다. 이 그림으로부터 공기윤활 텀팅패드 저어널 베어링의 안정성을 다시 한번 확인할

수 있다.

### 5. 결 론

공기윤활 틸팅패드 저어널베어링은 일반 저어널베어링의 압력분포와는 다른 좌우대칭형의 압력분포를 나타내므로 안정하며, 편심율과 자세각에 대한 정특성, 동특성값으로부터 계산된 베어링 중심의 궤적에서 보듯이 안정된 상태를 나타내는 것을 확인할 수 있다.

하중 지지력을 크게하기 위해서는 압축성계수, 편심율과 예압이 큰 영역에서 운전하면 된다. 반면 마찰력은 편심율, 예압의 변화에 대해서는 하중 지지력과 비슷한 양상을 보이거나, 압축성계수의 변화에 대해서는 거의 일정하다는 사실에 주목하여야 한다. 따라서 실제 운전상태에서는 이러한 양상을 잘 이해하여 응용하여야 한다.

패드의 처짐은 극히 작으므로 실용상으로 무시해도 별 차이가 없을 것으로 사료되며, 패드의 관성을 고려하지 않는다면 연성항인  $\gamma_y$ ,  $\gamma_x$ 와  $\beta_y$ ,  $\beta_x$ 는 무시할 수 있다.

본 논문은 공기윤활 틸팅패드 저어널베어링의 안정성해석과 설계를 위한 기본적인 자료를 제공하였으며 다른 형태의 공기베어링의 해석과 설계를 위한 기본적인 알고리즘을 제공할 것으로 사료된다.

### 후 기

이 논문은 1994년도 교육부 지원 한국학술진흥재단의 자유공모( 지방대 육성 )과제 학술연구조성비에 의해서 연구되었으며, 이에 감사드립니다.

### 참 고 문 헌

1. T. Y. Chu, J. T. McCabe, H. G. Elrod, "Stability Considerations for a Gas-Lubricated Tilting-Pad Journal Bearing; Part 1: Analytical Methods", J. of Lub. Tech., Trans. ASME, pp.162-172, 1968.
2. J. T. McCabe, T. Y. Chu, H. G. Elrod, "Stability Considerations for a Gas-Lubricated Tilting Pad Bearing;

- Part 2: Analytical Refinements and Stability Data", J. of Lub. Tech., Trans. ASME, pp.223-233, 1972.
3. R. C. Elwell, J. A. Findlay, "Design of Pivoted-Pad Journal Bearings", J. of Lub. Tech., Trans. ASME, pp.87-103, 1969.
4. Hiromu Hashimoto, Sanae Wada, Shinji Yamamoto, "亂流域におけるティルティングソパッドジャーナル軸受の動特性に及ぼす流體慣性力の影響", 日本機械學會論文(C編), pp.1709-1714, 1984.
5. Hiromu Hashimoto, Sanae Wada, Takashi Marukawa, "大形ティルティングパッドジャーナル軸受の潤滑特性", 日本機械學會論文(C編), pp.2383-2391, 1984.
6. J. D. Knight, L. E. Barrett, "Analysis of Tilting Pad Journal Bearings with Heat Transfer Effects", J. of Lub. Tech., Trans. ASME, pp.128-133, 1988.
7. 황 평, 김인식, "직접해법에 의한 공기윤활 틸팅패드 저어널 베어링의 정특성 및 동특성에 관한 연구", 한국윤활학회지, 제10권 제1호, pp.46-55, 1994.
8. 박상신, 장인배, 황 평, 한동철, "극소 공기막을 갖는 공기베어링의 직접수치해법을 이용한 정적해석", 대한기계학회 논문집 제15권 제1호, pp.120-126, 1991.
9. Timoshenko, S. P., "Theory of Plate and Shells", McGRAW-HILL, 1970.
10. Szilard, R., "Theory and Analysis of Plate, Classical and Numerical Methods", PRENTICE-HALL, 1974.
11. 황 평, "공기역학 탄성 베어링의 정특성 및 동특성에 관한 연구", 박사학위논문, 서울대학교, 1989.
12. 황 평, 김인식, "직접해법에 의한 공기 윤활 틸팅 패드 저어널 베어링의 윤활 해석에 관한 연구", 한국정밀공학회 춘계학술대회논문집, pp. 121-126, 1993.
13. Hwang, P, Yun, S. J., "Dynamic Characteristics of Air-Lubricated Tilting Pad Journal Bearing with Pad Elasticity Effect", JSSUME '94, pp.101-109, 1994.
14. 황 평, 윤성진, "패드와 탄성변형을 고려한 공기윤활 틸팅패드 저어널 베어링의 윤활해석에 관한 연구", 대한기계학회 춘계학술대회논문집(1), pp.510-515.
15. Pyung Hwang, Seung-Jin Yun, "Dynamic Characteristics Analysis of Air-Lubricated Tilting Pad Journal Bearing using Direct Numerical Method", Proceedings of the IASTED, pp.43-46, 1995.