

변분법을 이용한 확률론적 유한요소법에 관한 연구

배 동 명 · 김 경 열

부경대학교

(1996년 7월 31일 접수)

A Study on the Stochastic Finite Element Method based on Variational Approach

Dong - Myung Bae and Kyung - Yull Kim

Pukyong National University

(Received July, 31, 1996)

Abstract

A stochastic Hamilton variational principle(SHVP) is formulated for dynamic problems of linear continuum. The SHVP allows incorporation of probabilistic distributions into the finite element analysis. The formulation is simplified by transformation of correlated random variables to a set of uncorrelated random variables through a standard eigenproblem. A procedure based on the Fourier analysis and synthesis is presented for eliminating secularities from the perturbation approach. In addition to, a method to analyse stochastic design sensitivity for structural dynamics is present. A combination of the adjoint variable approach and the second order perturbation method is used in the finite element codes. An alternative form of the constraint functional that holds for all times is introduced to consider the time response of dynamic sensitivity. The algorithms developed can readily be adapted to existing deterministic finite element codes. The numerical results for stochastic analysis by proceeding approach of cantilever, 2D - frame and 3D - frame illustrates in this paper.

서 론

유한요소법은 구조매개변수들의 불확실성때문에 그들의 변분을 취급하기에는 미흡했었다. 불확실성이 무시될 수 없는 많은 경우에 대해서 불확실한 매개변수 계를 처리할 해석방법인 확률유한요소법(SFEM)을 제안하고, 이는 평균중심2차섭동법에 기초를 두고 있다.²⁾⁻⁴⁾ 이 비통계적인 방법은 Monte Carlo Simulation과 같은 통계적인 방법보다 계산수행 면에 있어 훨씬 더 효율적이다.⁵⁾

확률유한요소법의 주요 장점은 통계적인 방법에서 요구되는 많은 수의 표본이나 다중변수의 분포함수가 아닌 단지 1차의 두 모멘트만 필요로 한다는 것이다. 그러나 문제들이 직접강성률법의 범위내에서 정식화 되므로 다른 형태의 확률성을 갖는 문제들을 어떤 일관성을 가지고 취급하기는 문제점이 있다.

구조물의 정적 문제에 있어서 자연스럽게 간결한 방법으로 많은 종류의 불확실성을 구체화 하기 위해서, 최소 포텐셜 에너지 원리⁶⁾와 Hu - Washizu

원리⁷⁾를 사용하여 변분을 정식화 하였다. 결과적으로 확률 특성들은 변분 형태의 절점력들로 거의 변환되었다.

확률과 섭동법을 표준적인 유한요소법에 적용하면, 수치적으로 아주 비경제적이다. 확률유한요소법의 효율적인 수치해법을 고려함에 있어서 다자유도계의 세속성 제거를 위한 방법론을 도입하였다.

본 논문에서는 선형 동적 문제에 적용된 확률 해밀턴 변분원리(SHVP)를 정식화하고 운동방정식의 확률유한요소 변위모델을 제시하였다. 또, 상관 확률 변수 계를 무상관 확률 변수의 계로 변환하였으며, 확률유한요소 방정식을 풀고 변위, 응력 및 변형률의 확률분포를 평가하기 위해서 이중모드 중첩법을 제안한다. 세속항의 제거를 위해서 참고 문헌 8에서 제시한 방법론에 근거한 기법을 검토하였다.

또, 본 논문의 해밀턴 변분 원리에 의한 구조물의 동적문제에 대해 확률 설계 민감도를 해석하기 위한 방법을 검토한다. 구조물의 설계 민감도 해석 목적은 설계 변수의 구조물 상태 범함수 의존도를 파악하는 것으로서, 구조매개변수의 변분에 대한 구조물의 응답변화를 평가하는 데 있다. 또, 본 논문에서 정식화하여 구성한 확률유한요소 프로그램을 이용한 외팔보, 2차원 및 3차원 프레임 구조물의 확률론적 구조해석을 통해 본 논문에서 의도했던 구조해석의 확률론적 특성을 검토해 보았다.

이론해석

1. 확률 해밀턴 변분원리

경계 $\partial\Omega$ 를 갖는 영역 Ω 에서 선형 연속체의 동적 문제에 해밀턴 변분 원리(Hamilton variational principle)을 적용하면 다음과 같다.

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - J) dt = 0 \quad (1)$$

여기서, 계의 운동 에너지와 포텐셜 에너지는 각각 다음 (2), (3)식과 같이 정의된다.

$$T = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \dot{u}_i \dot{u}_i d\Omega \quad (2)$$

$$J = U - \int_{\Omega} \rho f_i u_i d\Omega - \int_{\partial\Omega} t_i u_i d(\partial\Omega) \quad (3)$$

그리고, 선형 탄성체의 변형률 에너지 U 는 다음 식으로 된다.

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} C_{ijkl} u_{i,j} u_{k,l} d\Omega \quad (4)$$

허용가능한 변위 u_i 는 공간변수 x , $x \in \Omega$ 와 시간 변수 τ , $\tau \in [0, \infty]$ 의 함수로 정의된다. ρ , C_{ijkl} , $u_{i,j}$, f_i 와 t_i 는 각각 질량 밀도, 강성률의 텐서 성분, 변위 텐서, 물체력 벡터와 경계 표면력 벡터이다. 변분 $\delta(\cdot)$ 는 u_i 에 대해서 취하고, δu_i 는 운동학 조건을 만족하는 경계 부분에 $\delta u_i = 0$ 를 만족하는 임의 시험 함수이다. 물체력과 경계 표면력은 u_i 에 대해서 독립으로 가정한다. 즉, 물체력과 경계 표면력의 변분은 0이 된다. 쾨마와 도트는 공간과 시간에 대한 미분을 의미하며, 반복 인덱스는 합을 뜻한다. (1)식의 변분을 양성적(陽性的; explicitly)으로 수행하고, 시간에 대한 부분 적분을 행하며 감쇠의 영향을 고려하여 정리하면, 다음 (5)식과 같이 된다.

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \delta u_i \rho \ddot{u}_i d\Omega + \int_{\Omega} \delta u_i d_{,k} \ddot{u}_{k,i} d\Omega + \int_{\Omega} \delta u_{i,j} C_{ijkl} u_{k,l} d\Omega \\ & = \int_{\Omega} \delta u_i \rho f_i d\Omega + \int_{\partial\Omega} \delta u_i t_i d(\partial\Omega) \end{aligned} \quad (5)$$

해밀턴 변분원리(HVP)와 2차 섭동법을 결합한 확률해밀턴 변분원리(SHVP)는 변분표현의 1차의 두 모멘트를 구하기 위한 재료적, 기하학적 성질과 하중에 대한 1차의 두 모멘트에 영향이 미치도록 확률 분포를 고려한다. 확률 해밀턴 변분원리(SHVP)에서 2차 모멘트 해석의 기본개념은 Taylor급수에 의하여 평균 확률장 $\{b(x)\} = \{b^r(x)\}$, $r=1, \dots, R$ 에 대하여 모든 확률함수를 확장하고 2차항까지 고려하는 것이다. 이 정식화에서 확률변수 b^r 은 질량 밀도, 탄성 계수, 감쇠 계수, 단면적, 구조부재의 두께 및 불규칙 하중 등의 불확실성을 의미한다. 주어진 연속함수 $f(x)$, 하나의 결합확률밀도함수(joint probability density function) $g[b(x)]$ 와 하나의 미소 매개변수 θ 에 대하여 다음과 같이 가정한다.

$$b'_0 = E(b^r) = \int_{-\infty}^{+\infty} b^r g(b^r) db^r \quad (6)$$

$$f^r(x) = f(x, b^r_0), f^r = \frac{\partial f}{\partial b^r}, f^{r,s} = \frac{\partial^2 f}{\partial b^r \partial b^s} \quad (7)$$

$$db^r = \theta \Delta b^r = \theta(b^r - b_0^r) \quad (8)$$

$$Cov(b^r, b^s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta b^r \Delta b^s g(b^r, b^s) db^r db^s \quad (9)$$

확률함수 $u_i, \rho, d_{ij}, C_{ijkl}, f_i$ 와 t_i 의 확장은 주어진 미소 파라미터 θ 에 대하여 평균 b_0^r 에 대한 2차 섭동법에 의하여 행하여진다.

$$u_i[b(x), x] = u_i^0 + \theta u_i^r \Delta b^r + \frac{1}{2} \theta^2 u_i^{rs} \Delta b^r \Delta b^s \quad (10)$$

$$\rho[b(x), x] = \rho^0 + \theta \rho^r \Delta b^r + \frac{1}{2} \theta^2 \rho^{rs} \Delta b^r \Delta b^s \quad (11)$$

$$d_{ij}[b(x), x] = d_{ij}^0 + \theta u_{ij}^r \Delta b^r + \frac{1}{2} \theta^2 d_{ij}^{rs} \Delta b^r \Delta b^s \quad (12)$$

$$C_{ijkl}[b(x), x] = C_{ijkl}^0 + \theta C_{ijkl}^r \Delta b^r + \frac{1}{2} \theta^2 C_{ijkl}^{rs} \Delta b^r \Delta b^s \quad (13)$$

$$f_i[b(x), x] = f_i^0 + \theta f_i^r \Delta b^r + \frac{1}{2} \theta^2 f_i^{rs} \Delta b^r \Delta b^s \quad (14)$$

$$t_i[b(x), x] = t_i^0 + \theta t_i^r \Delta b^r + \frac{1}{2} \theta^2 t_i^{rs} \Delta b^r \Delta b^s \quad (15)$$

(5)식에 확장된 함수들을 대입하고, θ 의 제곱계수를 같게 하면, 확률 해밀턴 변분원리(SHVP)의 0차, 1차 및 2차방정식은 아래와 같다.

- 0차 ;

$$\int_{\Omega} \delta u_i \rho^0 \ddot{u}_i^0 d\Omega + \int_{\Omega} \delta u_i d_{ik}^0 \dot{u}_k^0 d\Omega + \int_{\Omega} \delta u_{ij} C_{ijkl}^0 u_{k,l}^0 d\Omega = \int_{\Omega} \delta u_i \rho^0 f_i^0 d\Omega + \int_{\partial\Omega} \delta u_i t_i^0 d(\partial\Omega) \quad (16)$$

- 1차($r=1, \dots, R$) ;

$$\int_{\Omega} \delta u_i \rho^0 \ddot{u}_i^r d\Omega + \int_{\Omega} \delta u_i d_{ik}^0 \dot{u}_k^r d\Omega + \int_{\Omega} \delta u_{ij} C_{ijkl}^0 u_{k,l}^r d\Omega = \int_{\Omega} \delta u_i \rho^0 f_i^r d\Omega + \int_{\partial\Omega} \delta u_i t_i^r d(\partial\Omega) - \int_{\Omega} \delta u_i \rho^r \ddot{u}_i^0 d\Omega - \int_{\Omega} \delta u_i d_{ik}^r \dot{u}_k^0 d\Omega - \int_{\Omega} \delta u_{ij} C_{ijkl}^r u_{k,l}^0 d\Omega \quad (17)$$

- 2차 ;

$$\left[\int_{\Omega} \delta u_i \rho^0 \ddot{u}_i^{rs} d\Omega + \int_{\Omega} \delta u_i d_{ik}^0 \dot{u}_k^{rs} d\Omega + \int_{\Omega} \delta u_{ij} C_{ijkl}^0 u_{k,l}^{rs} d\Omega \right] Cov(b^r, b^s) = \left[\int_{\Omega} \delta u_i (\rho f_i^{rs} + 2\rho^r f_i^s + \rho^{rs} f_i^r) d\Omega + \int_{\partial\Omega} \delta u_i t_i^{rs} d(\partial\Omega) - 2 \int_{\Omega} \delta u_i \rho^r \ddot{u}_i^s d\Omega - 2 \int_{\Omega} \delta u_i d_{ik}^r \dot{u}_k^s d\Omega - 2 \int_{\Omega} \delta u_{ij} C_{ijkl}^r u_{k,l}^{rs} d\Omega - \int_{\Omega} \delta u_i \rho^{rs} \ddot{u}_i^0 d\Omega - \int_{\Omega} \delta u_i d_{ik}^{rs} \dot{u}_k^0 d\Omega - \int_{\Omega} \delta u_{ij} C_{ijkl}^{rs} u_{k,l}^0 d\Omega \right] Cov(b^r, b^s) \quad (18)$$

여기서, 2차식은 결합확률밀도함수에 2차항을 곱하고 확률장 $\{b(x)\}$ 의 영역에 대해서 적분하여 얻어진다.

2. 운동방정식의 확률 유한요소 모델

(16) - (18)식에서 뒀첨자 '0'를 갖는 모든 함수들은 결정론적 함수, 즉 평균 b_0^r 에서 계산된다. 즉, (16)식은 표준의 결정론적 변분 표현이고 대개의 유한요소법에 직접적으로 사용될 수 있다. 뒀첨자 r, s 와 rs 를 갖는 함수들은 확률장 $\{b(x)\}$ 에 의해 특징지워진 확률 함수들이다. 일반적으로 확률함수 $\rho^r, d_{ij}^r, C_{ijkl}^r, f_i^r, t_i^r$ 과 $\rho^{rs}, d_{ij}^{rs}, C_{ijkl}^{rs}, f_i^{rs}, t_i^{rs}$ 는 공간적인 기대치와 자기상관함수에 의해서 주어지고 정의된다.

$$Cov(b^r, b^s) = R(b^r, b^s) \sqrt{[Var(b^r)Var(b^s)]}$$

$$R(b^r, b^s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} b^r b^s g(b^r, b^s) db^r db^s$$

$$Var(b^r) = \alpha^2 E^2(b^r) \quad (19)$$

여기서, α 는 변분의 계수를 나타낸다. 정식화에 공간적인 기대치와 공분산 함수를 반영하고 유한요소법에 일치되게 하기 위하여 확률장 $\{b\}$ 는 R 개의 형상 함수들로 이산화된다. 이산화된 확률장으로서 적합성을 유지하기 위하여, 확률함수 $\rho, d_{ij}, C_{ijkl}, f_i, t_i$ 들도 동일한 R 개의 형상함수에 의해 보간된다. 예를 들면, 질량밀도는 다음 (20)식과 같이 근사된다.

$$\rho[b(x), x] = \Psi^q(\rho_q^0 + \theta \rho_q^r \Delta b^r + \frac{1}{2} \theta^2 \rho_q^{rs} \Delta b^r \Delta b^s) \quad (20)$$

여기서, ρ_q^0, ρ_q^r 그리고 $\rho_q^{rs}(q, r, s=1, \dots, R)$ 는 각각 질량밀도의 0차 절점량과 b^r 과 b^s 에 대한 1차 및 2차 도함수를 나타낸다. 이들 양은 b_0^r, b_0^s 의 평균값으로부터 구해지고, 편미분, 유한차분법 또는 최소자승법에 의해 직접적으로 계산될 수 있다.¹²⁾ 변위장과 하중함수들은 N 개의 형상함수에 의해 이산화된다.¹⁸⁾ 예를 들면, 변위장에 대하여,

$$u_i[b(x), x] = \Phi^q(u_q^0 + \theta u_q^r \Delta b^r + \frac{1}{2} \theta^2 u_q^{rs} \Delta b^r \Delta b^s), \quad (21)$$

$$r, s = 1 \dots R ; q = 1 \dots N$$

0차, 1차 및 2차의 변분표현((16) - (18)식)에 위의 근사식을 대입하면, 유한요소모델은 다음 (22) - (24)식과 같이 된다.

- 0 차식의 1계

$$M_{pq}^0 \ddot{q}_q^0 + D_{pq}^0 \dot{q}_q^0 + K_{pq}^0 q_q^0 = F_p^0 ; \quad (22)$$

- 1 차식의 R계($r=1 \cdots R$)

$$M_{pq}^0 \ddot{q}_q^r + D_{pq}^0 \dot{q}_q^r + K_{pq}^0 q_q^r = F_p^r - (M_{pq}^r \ddot{q}_q^0 + D_{pq}^r \dot{q}_q^0 + K_{pq}^r q_q^0) ; \quad (23)$$

- 2차식의 1계

$$M_{pq}^0 \ddot{q}_q^{(2)} + D_{pq}^0 \dot{q}_q^{(2)} + K_{pq}^0 q_q^{(2)} = [\frac{1}{2} F_p^{rs} - (M_{pq}^r \ddot{q}_q^s + D_{pq}^r \dot{q}_q^s + K_{pq}^r q_q^s)] - \frac{1}{2} (M_{pq}^{rs} \ddot{q}_q^0 + D_{pq}^{rs} \dot{q}_q^0 + K_{pq}^{rs} q_q^0) Cov(b^r, b^s) \quad (24)$$

여기서,

$$q_q^{(2)} = \frac{1}{2} q_q^{rs} Cov(b^r, b^s) \quad (25)$$

$$r, s = 1, \dots, R ; p, q = 1, \dots, N.$$

$q_q^0, \dot{q}_q^0, \ddot{q}_q^0$ 가 (22)식에 의해 풀어지면, 확률 함수 $q_q^r, \dot{q}_q^r, \ddot{q}_q^r$ 과 $q_q^{(2)}, \dot{q}_q^{(2)}, \ddot{q}_q^{(2)}$ 는 (23)식과 (24)식에 의해 결정된다. 이것은 선형 상미분 방정식의 $R+2$ 개의 계가 풀어질 수 있다는 것이다. 사실 해법의 과정은 $q_q^0, \dot{q}_q^r, \ddot{q}_q^{(2)}$ 에 대하여 동시에 계산될 수 있다. 왜냐하면 (22)-(24)식의 왼쪽에 포함된 질량, 감쇠 및 강성의 전체행렬은 단지 한번만 형성되어야 하고 오른쪽을 계산하기 위하여 요구된 거의 모든 연산이 벡터곱에 의해 그리고 요소수준에서 수행될 수 있기 때문이다. $q_q^0, \dot{q}_q^0, \ddot{q}_q^0 ; q_q^r, \dot{q}_q^r, \ddot{q}_q^r$ 그리고 $q_q^{(2)}, \dot{q}_q^{(2)}, \ddot{q}_q^{(2)}$ 를 계산하면 변위, 속도, 가속도, 변형을 및 응력에 대한 확률 분포를 구할 수 있다. 절점 변위에 대한 평균과 공분산은(그리고 속도와 가속도에 대하여도 마찬가지로) 다음 식과 같이 정의된다.

$$E(q_q) = \int_{-\infty}^{+\infty} q_q g(b^r) db^r \quad (26)$$

$$Cov(b^r, b^s) = \int_{-\infty}^{+\infty} (q_p - q_q^0)(q_p - q_q^0) g(b^r, b^s) db^r db^s \quad (27)$$

(26)식안에 (10)식을 대입하고 (25)식을 이용하고, 정의에 의해 1차 변분을 포함하는 항을 소거하면, 변위의 정확한 2차 평균이 (28)식과 같이 유도된다.

$$E(q_q) = q_q^0 + \frac{1}{2} q_q^{rs} Cov(b^r, b^s) = q_q^0 + q_q^{(2)} \quad (28)$$

정확한 2차 공분산은 (27)식에서 (10)식을 이용하여 얻어진다.

$$Cov(q_p, q_q) = q_p^r q_q^s Cov(b^r, b^s) + q_p^r q_q^{st} E(b^r b^s b^t) + \frac{1}{4} q_p^{rs} q_q^{tu} [E(b^r b^s b^t b^u) - R(b^r, b^s) R(b^t, b^u)] \quad (29)$$

만약 공분산의 1차항 산정에 관심을 갖는다면 (29)식은 다음 (30)식과 같이 된다.

$$Cov(q_p, q_q) = q_p^r q_q^s Cov(b^r, b^s) \quad (30)$$

e번째 유한요소에 대한 변형을 텐서는 (31)식과 같이 쓸 수 있다.

$$\epsilon_{ij}^e [b(x), x] = \Phi_{(e)}^{i\alpha j} (q_{q(e)}^0 + \alpha q_{q(e)}^r) \Delta b^r + \frac{1}{2} \theta^2 q_{q(e)}^{rs} \Delta b^r \Delta b^s \quad (31)$$

형상함수 $\Phi_{(e)}^{i\alpha j} = \Phi_{(e)}^{i\alpha j}(x)$ 는 결정론적 함수이기 때문에, (26)식과 (27)식에 (31)식을 대입하면 변형률에 대한 2차의 정확한 기대치와 변형률 텐서성분의 정확한 1차 공분산은 각각 다음 (32), (33)식과 같이 된다.

$$E(\epsilon_{ij}^e) = \Phi_{(e)}^{i\alpha j} (q_{q(e)}^0 + q_{q(e)}^{(2)}) \quad (32)$$

$$Cov(\epsilon_{ij}^e, \epsilon_{kl}^e) = \Phi_{(e)}^{i\alpha j} \Phi_{(e)}^{k\beta l} q_{p(e)}^r q_{q(e)}^s Cov(b^r, b^s) \quad (33)$$

(31)식으로부터 e번째 요소에 대한 응력 텐서는 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$\sigma_{ij}^e [b(x), x] C_{ijkl}^{(e)} \Phi_{(e)}^{k\alpha l} (q_{q(e)}^0 + \alpha q_{q(e)}^r) \Delta b^r + \frac{1}{2} \theta^2 q_{q(e)}^{rs} \Delta b^r \Delta b^s \quad (34)$$

응력에 대해서도 마찬가지로 (26)식과 (27)식에 (13)식과 (34)식을 사용하면 응력 텐서 성분들의 정확한 2차 기대치와 1차 공분산은 각각 다음 (35), (36)식과 같이 된다.

$$E(\sigma_{ij}^e) = C_{ijkl}^{(e)} \Phi_{(e)}^{k\alpha l} q_{q(e)}^0 + [\frac{1}{2} C_{ijkl}^{(e)} \Phi_{(e)}^{k\alpha l} q_{q(e)}^{rs} + C_{ijkl}^{(e)} \Phi_{(e)}^{k\alpha l} q_{q(e)}^s + \frac{1}{2} C_{ijkl}^{(e)} \Phi_{(e)}^{k\alpha l} q_{q(e)}^0] Cov(b^r, b^s)$$

$$= C_{ijkl}^{0(e)} E(\varepsilon_{kl}^{(e)}) + [C_{ijkl}^{r(e)} \Phi_{(e)}^{kq,l} q_{q(e)}^s + \frac{1}{2} C_{ijkl}^{r(e)} \Phi_{(e)}^{kq,l} q_{q(e)}^0] Cov(b^r, b^s) \quad (35)$$

$$Cov(\sigma_{ij}^e, \sigma_{kl}^e) = [C_{ijmn}^{0(e)} C_{klgh}^{0(f)} \Phi_{(e)}^{mp,n} \Phi_{(f)}^{sq,h} q_{p(e)}^r q_{q(f)}^s + C_{ijmn}^{r(e)} C_{klgh}^{s(f)} \Phi_{(e)}^{mp,n} \Phi_{(f)}^{sq,h} q_{p(e)}^0 q_{q(f)}^0 + C_{ijmn}^{r(e)} C_{klgh}^{0(f)} \Phi_{(e)}^{mp,n} \Phi_{(f)}^{sq,h} q_{p(e)}^s q_{q(f)}^0 + C_{ijmn}^{0(e)} C_{klgh}^{r(f)} \Phi_{(e)}^{mp,n} \Phi_{(f)}^{sq,h} q_{p(e)}^0 q_{q(f)}^s] Cov(b^r, b^s) \quad (36)$$

3. 운동방정식의 변환과 이중 중첩법

앞에서 보았듯이, 전체 해는 변위, 변형률과 응력의 확률 분포의 계산과 미분방정식들의 $R+2$ 개의 계를 적분해야 한다. 행렬 연산의 수가 이중합에 의해 $R(R+1)/2$ 개에 비례하므로, 계산량은 상당히 많아진다. 행렬곱의 수가 R 에 비례하도록 이중합을 단일합으로 줄이기 위하여, 일련의 상관 확률 변수 b^r 을 무상관 확률변수 c^r , $r=1, \dots, R$ 으로의 변환이 적용될 수 있고,⁴⁾ 표준화 고유치 문제의 해와 관련된다.

$$Cov(b^r, b^s) = U Cov(c^r, c^s) \delta_{rs} \quad (37)$$

$$= U Var(c^v), r, s, v=1, \dots, R$$

여기서 U 는 직교 $R \times R$ 의 기본 행렬이다. 가장 낮은 고유치가 사용되는 구조물의 모드 해석에 비해서, $Var(c^v)$ 의 가장 높은 값 V 는 많은 확률 분포들의 주요한 특징을 시뮬레이션하기 위하여 필요하다. 즉, 만약 확률벡터 b 가 불규칙 하중, 기하학 및 재료적 무상관확률 변수로 구성되어 있다면, $Cov(b^r, b^s)$ 의 3부분의 각각에 대한 가장 높은 모드가 $Var(c^v)$ 를 계산하기 위하여 조합된다.

$$c^v = U_r b^r, E(c^v) = U_r \alpha \cdot \gamma / \partial c^v = U^v \alpha \cdot \gamma / \partial b^r \quad r=1, \dots, R, v=1, \dots, V, V \ll R \quad (38)$$

(22) - (23)식에서 (37)과 (38)식을 사용하면 1에서 R 까지 이중합은 1에서 V 까지의 단일 합으로 변환 되고, 혼합된 편도함수는 2차 도함수로 감소된다. 따라서, 무상관 확률 변수 c^v 의 사용에 의해 (22) - (23)식은 다음 (39) - (41)식과 같이 된다.

$$\text{- 변환된 0차식의 1계} \\ M_{pq}^0 \ddot{q}_q^0 + D_{pq}^0 \dot{q}_q^0 + K_{pq}^0 q_q^0 = R_p^0 \quad (39)$$

- 변환된 1차식의 V계

$$M_{pq}^0 \ddot{q}_q^v + D_{pq}^0 \dot{q}_q^v + K_{pq}^0 q_q^v = R_p^v - (M_{pq}^v \ddot{q}_q^0 + D_{pq}^v \dot{q}_q^0 + K_{pq}^v q_q^0) \quad (40)$$

- 변환된 2차식의 1계

$$M_{pq}^0 \ddot{q}_q^{(2)} + D_{pq}^0 \dot{q}_q^{(2)} + K_{pq}^0 q_q^{(2)} = \sum_{v=1}^V [\frac{1}{2} R_p^{vv} - (M_{pq}^v \ddot{q}_q^v + D_{pq}^v \dot{q}_q^v + K_{pq}^v q_q^v) - \frac{1}{2} (M_{pq}^{vv} \ddot{q}_q^0 + D_{pq}^{vv} \dot{q}_q^0 + K_{pq}^{vv} q_q^0)] Var(c^v) \quad (41)$$

여기서,

$$q_q^{(2)} = \frac{1}{2} \sum_{v=1}^V q_q^{vv} Var(c^v) \quad (42)$$

$$p, q=1, \dots, N$$

그리고, $q_q^v, q_q^{iv}, M_{pq}^v, M_{pq}^{vv}, D_{pq}^v, K_{pq}^v, K_{pq}^{iv}$ 는 각각 변환된 확률변수 c^v 에 대하여 $q_q, M_{pq}, D_{pq}, K_{pq}$ 의 1차와 2차 도함수를 나타낸다. (39) - (41)식의 해는 미분방정식의 $N \times N$ 계의 $V+2(V \ll R)$ 개의 해들을 요구한다. 상관확률변수의 경우와 같은 방법으로, 확률 분포는 다음과 같이 된다.

변위에 대하여

$$E(q_q) = q_q^0 + q_q^{(2)} \quad (43)$$

$$Cov(q_p, q_q) = \sum_{v=1}^V q_p^v q_q^v Var(c^v); \quad (44)$$

변형률에 대하여

$$E(\varepsilon_{ij}^e) = \Phi_{(e)}^{ij} (q_{q(e)}^0 + q_{q(e)}^{(2)}) \quad (45)$$

$$Cov(\varepsilon_{ij}^e, \varepsilon_{kl}^e) = \sum_{v=1}^V \Phi_{(e)}^{ip,j} \Phi_{(e)}^{kq,l} q_{p(e)}^r q_{q(f)}^s Var(c^v) \quad (46)$$

응력에 대하여

$$E(\sigma_{ij}^e) = C_{ijkl}^{e(e)} E(\varepsilon_{kl}^{(e)}) + \sum_{v=1}^V [C_{ijkl}^{r(e)} \Phi_{(e)}^{kq,l} q_{q(e)}^r + \frac{1}{2} C_{ijkl}^{v(e)} \Phi_{(e)}^{kq,l} q_{q(e)}^0] Var(c^v) \quad (47)$$

$$Cov(\sigma_{ij}^e, \sigma_{kl}^e) = \sum_{v=1}^V [C_{ijmn}^{0(e)} C_{klgh}^{0(f)} \Phi_{(e)}^{mp,n} \Phi_{(f)}^{sq,h} q_{p(e)}^v q_{q(f)}^v + C_{ijmn}^{r(e)} C_{klgh}^{s(f)} \Phi_{(e)}^{mp,n} \Phi_{(f)}^{sq,h} q_{p(e)}^0 q_{q(f)}^0 + C_{ijmn}^{r(e)} C_{klgh}^{0(f)} \Phi_{(e)}^{mp,n} \Phi_{(f)}^{sq,h} q_{p(e)}^s q_{q(f)}^0 + C_{ijmn}^{0(e)} C_{klgh}^{r(f)} \Phi_{(e)}^{mp,n} \Phi_{(f)}^{sq,h} q_{p(e)}^0 q_{q(f)}^s] Var(C^v) \quad (48)$$

(39) - (47)식에서 일반화 좌표 $q_q^0, q_q^v, q_q^{(2)}, p=1, \dots, N$ 으로부터 정규좌표 $z_a^0, z_a^v, z_a^{(2)}, a=1, \dots, A \ll N$

로 변환을 사용하면, 정규화된 모드 형상 Q_{aq} 와 진동수 ω_a 를 통하여

$$\begin{aligned} z_a^0 &= Q_{aq}q_a^0 \\ z_a^v &= Q_{aq}q_a^v, \quad v=1, \dots, V \\ z_a^{(2)} &= Q_{aq}q_a^{(2)} \end{aligned} \quad (49)$$

$A(V+2)$ 개의 비연성방정식을 유도한다(a 에서 함이 아니다).

$$\ddot{z}_a^0 + 2\xi_a \omega_a \dot{z}_a^0 + \omega_a^2 z_a^0 = Q_{aq}p_q^0 = x_a^0(\tau) \quad (50)$$

$$\begin{aligned} \ddot{z}_a^v + 2\xi_a \omega_a \dot{z}_a^v + \omega_a^2 z_a^v &= Q_{aq}p_q^{(1)} \\ &= x_a^{(1)}(\tau), \quad v=1, \dots, V \end{aligned} \quad (51)$$

$$\ddot{z}_a^{(2)} + 2\xi_a \omega_a \dot{z}_a^{(2)} + \omega_a^2 z_a^{(2)} = Q_{aq}p_q^{(2)} = x_a^{(2)}(\tau), \quad (52)$$

$$a=1, \dots, A, \quad q=1, \dots, N$$

여기서, 기호 ξ_a 는 Rayleigh 형태의 모드 감쇠 인자를 나타내고, $P_q^0, P_q^{(1)}, P_q^{(2)}$ 는 각각 (39) - (41)식의 정규화된 오른쪽을 나타낸다.

4. 세속성(Secularity)의 제거

확률 함수의 2차진개는 시간에 따라 명확하지않게 증가하는 세속항이 나타나므로 무용해로 될수 있다. 이러한 불구속된 해가 보존체처럼 하나의 구속된 해를 갖는다고 알려진 계에서조차도 발생하지 모른다. 따라서, 단지 진폭이 변하는 것만에 의한 2차 섭동법의 단순한 적용은 항상 만족하는 것은 아니다. 세속항의 형성을 피하기 위한 수정은 진동의 진폭과 주기를 바꾸어야 한다. 이러한 세속항 제거에 관한 이론적인 방법론들은 제시되어 왔지만,^{19) - 22)} 세속성을 수치적으로 제거하는 연구는 별로 없었다. 효율적인 방법이 문헌¹⁾에서 제안되고 있으며, 이것은 sine과 cosine의 변환쌍이 사용된다. 여기에 제시한 수치적 알고리즘은 위의 것에 약간 수정된 형태이다. 즉, 고려하는 하중함수는 절반 길이의 복소수로 취급한다. 그리고, 고속 Fourier 해석(FFT)과 합성은 복소수함수로 수행된다.

0차, 1차 및 2차 방정식에 대하여 고유진동수는 같다. 이것은 변환되거나, 또는 비연성된 방정식인 경우이다. 단, 0차방정식은 공진이 발생하지않도록 외력이 가해진다. 그러나, 1차와 2차 하중함수는 0차해의 과도항 부분이 사라질때까지 공진 가

진을 지속하는 0차 응답함수들이다. 하중함수로부터 공진부분을 제거하기 위하여 고속 Fourier 변환에 있어서 그들 하중함수의 이산 Fourier 스펙트럼(Discrete Fourier spectra) $Y(\omega)$ 의 계산은 시계열에 대해서 수행된다.

$$\begin{aligned} Y_j &= Y(\omega_j) = \frac{T}{L} y(\tau_k) \exp(-i\omega_j \tau_k) \\ &= \frac{T}{L} y_k \exp(-i2\pi jk/L) \end{aligned} \quad (53)$$

$$\omega = j\Delta\omega = 2\pi j/T, \quad 0 \leq \omega_j \leq \Omega_{nyq}, \quad \Omega_{nyq} = 2\pi L/T \quad (54)$$

$$y_k = x^{(1)}(\tau_{2k}) + ix^{(1)}(\tau_{2k+1}) : 1\text{차식} \quad (55)$$

$$y_k = x^{(2)}(\tau_{2k}) + ix^{(2)}(\tau_{2k+1}) : 2\text{차식} \quad (56)$$

$$\tau_0 = 0, \quad \tau_{2L} = T, \quad j, k = 0, 1, \dots, L \quad (57)$$

여기서, T 는 시간 영역, Ω_{nyq} 는 Nyquist 진동수, $\Delta\omega$ 는 진동수 증분, L 은 변환의 Fourier deg.의 수이고, (51), (52)식에서 모드 하중함수는 이미 비연성으로 되었기 때문에, 단지 대응하는 j 번째 고유진동수만 세속항을 만들 것이다. 경상(specular)의 항을 제거하기 위하여, 모우드 계의 특정 범위에 있는 진동수 급수의 계수 Y_j 는 제거되거나, 또는 가중된다. 그에 의해서 Fourier 스펙트럼으로부터 공진부분이 제거 된다. 다시 말하면, j 번째 고유진동수에 매우 가까운 계수들은 거의 완전히 제거되는 반면, 이 진동수로부터 떨어진 계수들은 영향을 받지 않는다. 그러므로 Fourier 해석을 함에 있어서 진동수들은 다음의 조건에서 세속성이 존재할 것이다.

$$(\omega_a - r) \leq \omega_j \leq (\omega_a + r) \quad (58)$$

여기서, r 은 특정범위이다. 적용가능한 진동수가중함수는 아래에 주어진다.^{13,19)}

삼각형

$$\begin{aligned} Y_j &= Y_j(\omega_j - \omega_a)/r \quad \text{if } \omega_a \leq \omega_j \leq (\omega_a + r) \\ Y_j &= Y_j(\omega_a - \omega_j)/r \quad \text{if } (\omega_a - r) \leq \omega_j \leq \omega_a \end{aligned} \quad (59)$$

cosine형

$$Y_j = Y_j \{1 - \cos[\pi(\omega_a - \omega_j)/2r]\}; \quad (60)$$

cosine제곱형

$$Y_j = 0.5Y_j \{1 - \cos[\pi(\omega_a - \omega_j)/r]\} \quad (61)$$

일단, 진동수 계열이 가중되면, 시계열-하중함수가 공진이 일어나지 않는 가진상태에 대해서 Fourier 역변환이 수행된다.

$$y_k = y(\tau_k) = \frac{1}{T} Y(\omega_j) \exp(i\omega_j \tau_k) = \frac{1}{T} Y_j \exp(i2\pi jk/L) \quad (62)$$

결론적으로 1차와 2차 하중함수로 되어진다. 예를 들면, 첫번째 하중함수에 대하여는 다음과 같이 된다.

$$x_{2k}^{(2)} = Re y_k, x_{2k+1}^{(2)} = Im y_k, k, j=0 \cdots L \quad (63)$$

5. 확률 구조의 민감도

아래의 적분 범함수에 N개의 자유도를 갖는 선형 탄성계의 구조 응답을 고려한다.

$$\phi = \int_0^T G[q(h, b, t), h] d\tau \quad (64)$$

계는 운동방정식을 만족하므로 다음 (65)식과 같이 된다.

$$M_{ij}(h, b) \ddot{q}_j(h, b, t) + D_{ij}(h, b) \dot{q}_j(h, b, t) + K_{ij}(h, b) q_j(h, b, t) = f_i(h, d, t) \\ q_j(h, b, 0) = 0, \\ \dot{q}_j(h, b, 0) = 0, i, j=1, \dots, N \quad (65)$$

여기서 $h = \{h^e\}$, $e=1, \dots, E$, $b = \{b^r\}$, $r=1, \dots, R$, $t, t \in [0, T]$ 는 각각 설계변수의 벡터, 확률 변수의 벡터, 시간변수 벡터를 나타낸다. 분명하게 벡터 h 와 b 에서의 약간, 또는 모든 성분은 일치할 수 있다. 구조물의 재료적, 기하학적 및 하중의 불확정성을 정식화에 반영하기 위하여 2차 섭동법이 이용된다. 확률함수들 $M_{ij}^e, D_{ij}^e, K_{ij}^e, f_i^e, G_{,v}, q_v, \lambda_v, M_{ij}^e, D_{ij}^e, K_{ij}^e, f_i^e, G^e$ 에 대하여 주어진 작은 매개변수 θ 를 가지며, b_0^r 로 표현되는 확률 변수 b^r 의 공간적 기대치에 대하여 Taylor전개를 행한다. 예를 들면, 설계 변수 h^e 에 대하여 강성의 1차 도함수는 다음과 같다.

$$K_{ij}^{e,r}(h, b) = K_{ij}^{e,r,0} + K_{ij}^{e,r,1} \Delta b^r + \frac{1}{2} \theta^2 K_{ij}^{e,r,2} \Delta b^r \Delta b^r \quad (66) \\ i, j=1, \dots, N, e=1, \dots, E, r, s=1, \dots, R$$

여기서, $\theta \Delta b^r \equiv \delta b^r$ 는 b_0^r 에 대한 b^r 의 1차 변분을 나타내고 $(\cdot)^0, (\cdot)^1$ 와 $(\cdot)^2$ 는 각각 그들의 기대치에서 평가된 확률 변수에 대한 기대치, 1계와 2계(혼합된) 편도함수를 나타낸다. 윗첨자 '0'를 갖는 함수는 결정론적 함수이고, 반면 첨자 'r'과 's'를 갖는 함수는 확률함수라는 것을 나타낸다. 이러한 확률 함수는 확률 변수의 1차의 두 모멘트를 통하여 다음과 같이 표현 가능하다.

$$b_0^r = E(b^r) = \int_{-\infty}^{+\infty} b^r g(b^r) db^r \quad (67) \\ Cov(b^r, b^s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (b^r - b_0^r)(b^s - b_0^s) g(b^r, b^s) db^r db^s$$

$$\text{또는, } Cov(b^r, b^s) = R(b^r, b^s) \sqrt{[Var(b^r)Var(b^s)]} \quad (69)$$

여기서,

$$R(b^r, b^s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} b^r b^s g(b^r, b^s) db^r db^s \quad (70) \\ Var(b^r) = \alpha^2 E^2(b^r) \quad (71)$$

여기서, $E(b^r), Cov(b^r, b^s), R(b^r, b^s), Var(b^r), g(b^r, b^s)$ 그리고 α 는 각각 기대치, 공분산, 상호상관계수, 분산, 결합 확률 밀도함수 그리고 변분 계수를 나타낸다. 확률 변수에 대하여 질량, 감쇠, 강성 및 하중의 편도함수를 포함하는 함수는 편미분, 유한차분법 또는 최소자승법에 의해 계산될 수 있다. $M_{ij}, D_{ij}, K_{ij}, f_i, G_{,v}, q_v, \lambda_v$ 에 대하여 (66)식과 비슷한 확장식을 (65)식에 대입하고 1, θ, θ^2 의 차수항을 모으면, 구조 및 수반계의 0차, 1차 및 2차식은 각각 다음 식들과 같다.

- 0차식의 한 쌍 :

$$M_{ij}^0 \ddot{q}_j^0(t) + D_{ij}^0 \dot{q}_j^0(t) + K_{ij}^0 q_j^0(t) = f_j^0(t) \quad (72)$$

$$M_{ij}^0 \lambda_j^0(\tau) - D_{ij}^0 \dot{\lambda}_j^0(\tau) + K_{ij}^0 \lambda_j^0(\tau) = G_{,v}^0(\tau) \delta(\tau) \quad (73)$$

- 1차식의 R쌍($r=1 \cdots R$) :

$$M_{ij}^0 \ddot{q}_j^r(t) + D_{ij}^0 \dot{q}_j^r(t) + K_{ij}^0 q_j^r(t) = f_j^r(t) - [M_{ij}^r \ddot{q}_j^r(t) + D_{ij}^r \dot{q}_j^r(t) + K_{ij}^r q_j^r(t)] \quad (74)$$

$$M_{ij}^0 \lambda_j^r(\tau) - D_{ij}^0 \dot{\lambda}_j^r(\tau) + K_{ij}^0 \lambda_j^r(\tau) = G_{,v}^r(\tau) \delta(\tau) - [M_{ij}^r \ddot{\lambda}_j^r(\tau) + D_{ij}^r \dot{\lambda}_j^r(\tau) + K_{ij}^r \lambda_j^r(\tau)] \quad (75)$$

- 2차식의 한 쌍 :

$$M_{ij}^0 \ddot{q}_j^{(2)}(t) + D_{ij}^0 \dot{q}_j^{(2)}(t) + K_{ij}^0 q_j^{(2)}(t)$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\frac{1}{2} f_i^{rs}(t) - [M_{ij}^r \dot{q}_j^s(t) + D_{ij}^r \ddot{q}_j^s(t) + M_{ij}^r q_j^s(t)] \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2} [M_{ij}^{rs} \dot{q}_j^0(t) + D_{ij}^{rs} \ddot{q}_j^0(t) + K_{ij}^{rs} q_j^0(t)] \right) \\
 &\quad \text{Cov}(b^r, b^s) \tag{76}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &M_{ij}^0 \lambda_j^{(2)}(\tau) + D_{ij}^0 \dot{\lambda}_j^{(2)}(\tau) + K_{ij}^0 \lambda_j^{(2)}(\tau) \\
 &= \left(-\frac{1}{2} G_i^{rs}(\tau) \delta^r \tau - [M_{ij}^r \lambda_j^s(\tau) - D_{ij}^r \dot{\lambda}_j^s(\tau) + \right. \\
 &\quad \left. K_{ij}^r \lambda_j^s(\tau)] - \frac{1}{2} [M_{ij}^{rs} \lambda_j^0(\tau) - D_{ij}^{rs} \dot{\lambda}_j^0(\tau) + \right. \\
 &\quad \left. K_{ij}^{rs} \lambda_j^0(\tau)] \right) \text{Cov}(b^r, b^s) \tag{77}
 \end{aligned}$$

여기서, $r, s = 1, \dots, R$, $i, j = 1, \dots, N$ 이고

$$q_j^{(2)} = \frac{1}{2} q_j^{rs} \text{Cov}(b^r, b^s) \tag{78}$$

$$\lambda_j^{(2)} = \frac{1}{2} \lambda_j^{rs} \text{Cov}(b^r, b^s) \tag{79}$$

공분산 함수의 정의에 의하여, 2차 방정식은 결합확률밀도함수에 2차항을 곱하고, 확률장 b^r 의 영역에 걸쳐 적분하면 얻어진다.

(77), (78)식 안에 2중합을 단일합으로 환산하기 위하여, 상관 확률 변수 b^r 을 표준 고유치 문제를 통하여 일련의 무상관 확률 변수 c^r 로 변환한다.

$$\text{Cov}(b^r, b^s) U = \text{Var}(c^r) U \tag{80}$$

여기서, 공분산 행렬 $\text{Cov}(b^r, b^s)$, $r, s = 1, \dots, R$ 은 정정치(正定値)이며, U 는 직교 $R \times R$ 차원의 기초행렬이고, $\text{Var}(c^r)$ 는 R -차원 대각행렬이다. 가장 낮은 모드를 사용하는 모드 구조문제와 대조적으로, 단지 V 개($V \ll R$)의 $\text{Var}(c^r)$ 의 가장 높은 값들이 많은 확률 분포의 주요한 특성을 시뮬레이션하기 위하여 요구된다. 만약 확률벡터 b^r 이 하중, 기하학적 및 재료적 불확정량 등의 3개의 무상관 부분으로 구성된다면, $\text{Cov}(b^r, b^s)$ 의 3가지 부분에 대한 가장 높은 모드는 $\text{Var}(c^r)$ 를 얻기 위해 유도된다. 따라서,

$$c^r = U_r b^r, E(c^r) = U_r b^0, \partial \cdot \cdot / \partial c^r = U_r \partial \cdot \cdot / \partial b^r \tag{81}$$

$$r, s = 1, \dots, R, \quad v = 1, \dots, V$$

(72) - (77)식안에 (80) - (81)식을 대입하면 혼합

된 도함수 $(\cdot)^{rs}$ 는 2계 도함수 $(\cdot)^{rr}$ 으로 감소한다. 그리고 $r, s(r, s = 1, \dots, V)$ 에 대한 이중합은 $v, v = 1, \dots, V$ 에 대한 단일합으로 계산된다. 따라서 무상관 확률 변수 c^v 를 사용하면 (72) - (77)식은 다음 식들과 같이 된다.

- 변환된 0차식의 한 쌍 :

$$M_{ij}^0 \dot{q}_j^0(t) + D_{ij}^0 \ddot{q}_j^0(t) + K_{ij}^0 q_j^0(t) = f_i^0(t) \tag{82-1}$$

$$M_{ij}^0 \lambda_j^0(\tau) - D_{ij}^0 \dot{\lambda}_j^0(\tau) + K_{ij}^0 \lambda_j^0(\tau) = g_i^0(\tau) \tag{82-2}$$

- 변환된 1차식의 V쌍($r = 1, \dots, V$) :

$$M_{ij}^0 \dot{q}_j^v(t) + D_{ij}^0 \ddot{q}_j^v(t) + K_{ij}^0 q_j^v(t) = p_i^v(t) \tag{83-1}$$

$$M_{ij}^0 \lambda_j^v(\tau) - D_{ij}^0 \dot{\lambda}_j^v(\tau) + K_{ij}^0 \lambda_j^v(\tau) = g_i^v(\tau) \tag{83-2}$$

- 변환된 2차식의 한 쌍 :

$$M_{ij}^0 \dot{q}_j^{(2)}(t) + D_{ij}^0 \ddot{q}_j^{(2)}(t) + K_{ij}^0 q_j^{(2)}(t) = p_i^{(2)}(t) \tag{84-1}$$

$$M_{ij}^0 \lambda_j^{(2)}(\tau) - D_{ij}^0 \dot{\lambda}_j^{(2)}(\tau) + K_{ij}^0 \lambda_j^{(2)}(\tau) = g_i^{(2)}(\tau) \tag{84-2}$$

위의 식에서 $(\cdot)^v$ 와 $(\cdot)^{vv}$ 는 c^v 에 대한 1차와 2차 도함수를 나타낸다. 그리고 일반화된 좌표 $q_j(t)$ 와 $\lambda_j(\tau)$ 로부터 정규화된 좌표 $\gamma_j(t)$ 와 $\vartheta_j(\tau)$ 로의 변환은 (82-1) - (84-2)식을 비연성화 하기 위해서 사용되어, 다음과 같은 식들이 얻어진다.

- 비연성 0차식의 Z 쌍들 :

$$\ddot{\gamma}_z^0(t) + 2\zeta_z \omega_z \dot{\gamma}_z^0(t) + \omega_z^2 \gamma_z^0(t) = p_z^0(t) \tag{85-1}$$

$$\ddot{\vartheta}_z^0(\tau) - 2\zeta_z \omega_z \dot{\vartheta}_z^0(\tau) + \omega_z^2 \vartheta_z^0(\tau) = g_z^0(\tau) \tag{85-2}$$

- 비연성 1차식의 Z x V 쌍들 :

$$\ddot{\gamma}_z^v(t) + 2\zeta_z \omega_z \dot{\gamma}_z^v(t) + \omega_z^2 \gamma_z^v(t) = p_z^v(t) \tag{86-1}$$

$$\ddot{\vartheta}_z^v(\tau) - 2\zeta_z \omega_z \dot{\vartheta}_z^v(\tau) + \omega_z^2 \vartheta_z^v(\tau) = g_z^v(\tau) \tag{86-2}$$

- 비연성 2차식의 Z 쌍들 :

$$\ddot{\gamma}_z^{(2)}(t) + 2\zeta_z \omega_z \dot{\gamma}_z^{(2)}(t) + \omega_z^2 \gamma_z^{(2)}(t) = p_z^{(2)}(t) \tag{87-1}$$

$$\ddot{\vartheta}_z^{(2)}(\tau) - 2\zeta_z \omega_z \dot{\vartheta}_z^{(2)}(\tau) + \omega_z^2 \vartheta_z^{(2)}(\tau) = g_z^{(2)}(\tau) \tag{87-2}$$

(82-1) - (84-2)식을 풀면, 구조 응답의 민감도에 대한 확률 분포가 계산된다. 민감도의 기대치와 공분산은 아래와 같이 된다.

$$E(\phi^r) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi^r g(b^r) db^r \tag{88}$$

$$\text{Cov}(\phi^r, \phi^s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [\phi^r - E(\phi^r)] [\phi^s - E(\phi^s)] g(b^r, b^s) db^r db^s \tag{89}$$

$q, \lambda, M_{ij}^r, D_{ij}^r, K_{ij}^r, f_i^r, G^r$ 에 대한 전개식을 (88), (89)식에 대입하고, 2계까지 b^r 의 변분을 유지하면, 정의에 의해 1차 변분을 포함한 항이 소거되

고, 시간 $t, t=[0, T]$ 에서 계산된 민감도의 정확한 2차 기대치와 정확한 1차 공분산이 아래와 같이 변환된 확률 변수의 항으로 정의된다.

$$E(\phi^e(t)) = G^{0e}(t) + \frac{1}{2} \sum_{v=1}^V G^{e, vv} \text{Var}(C^v) + \int_0^t [A_i^e(\lambda_i^0 + \lambda_i^{(2)}) - F_i^e \lambda_i^0 + \sum_{v=1}^V (B_i^{ev} \lambda_i^v + C_i^{evv} \lambda_i^0) \text{Var}(C^v)] d\tau \quad (90)$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\phi^e(t), \phi^f(t)) = & \sum_{v=1}^V \{G^{e, v} G^{f, v}(t) \\ & + G^{e, v}(t) \int_0^t [A_i^e(\tau) \lambda_i^v(\tau) + B_i^{fv}(\tau) \lambda_i^0(\tau)] d\tau \\ & + G^{f, v}(t) \int_0^t [A_i^f(\tau) \lambda_i^v(\tau) + B_i^{fv}(\tau) \lambda_i^0(\tau)] d\tau \\ & + \int_0^t \int_0^t \{A_i^e(\tau) A_j^f(v) \lambda_i^v(\tau) \lambda_j^v(v) + B_i^{ev}(\tau) B_j^{fv}(v) \\ & \lambda_i^0(\tau) \lambda_j^0(v) + [A_i^e(\tau) B_j^{fv}(v) + A_j^f(v) B_i^{ev}(\tau)] \\ & \lambda_i^v(\tau) \lambda_j^v(v)\} d\tau dv\} \text{Var}(c^v) \end{aligned} \quad (91)$$

여기서, τ, v 는 적분의 더미(dummy) 변수 $\tau, v \in [0, t], t \in [0, T]$ 이다.

같은 방법으로, 정적인 경우에 대하여도, 0차, 1차, 2차 구조 방정식과 수반 방정식의 계를 얻을 수 있다. 변환된 확률 변수를 사용하면, 민감도의 1차의 두모멘트는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$E(\phi^e) = G^{0e} + \frac{1}{2} \sum_{v=1}^V G^{e, vv} \text{Var}(C^v) + A_i^e(\lambda_i^0 + \lambda_i^{(2)}) - k_{ij}^{0e} q_j^{(2)} \lambda_i^0 + \sum_{v=1}^V (B_i^{ev} \lambda_i^v + C_i^{evv} \lambda_i^0) \text{Var}(c^v) \quad (92)$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\phi^e, \phi^f) = & \sum_{v=1}^V [G^{e, v} A_i^f + G^{f, v} A_i^e] \lambda_i^v \\ & + (G^{e, v} B_i^{fv} + G^{f, v} B_i^{ev}) \lambda_i^0 + A_i^e A_j^f \lambda_i^v \lambda_j^v + \\ & (A_i^e B_j^{fv} + A_i^f B_i^{ev}) \times \lambda_i^v \lambda_j^0 + B_i^{ev} B_j^{fv} \lambda_i^0 \lambda_j^0 \text{Var}(c^v) \end{aligned} \quad (93)$$

수치해석 결과 및 고찰

Fig. 1, Fig. 2 및 Fig. 3과 같이, 시간 의존 집중 하중을 받는 외팔보, 2차원 프레임 및 3차원 프레임의 변위의 시간 응답을 고려한다. 여기서, 요소 단면적 A_r 을 확률 변수로 가정할 때, 구조응답 범함수는 다음과 같다.

$$\phi(\tau) = \frac{[q(\tau)]^2}{[q^{(A)}]^2} - 1 \leq 0$$

여기서, $q(\tau)$ 는 해당 절점에서의 변위이고 $q^{(A)}$ 는 0.012로 잡은 수용 가능한 변위값이다. 단면적에 대한 각각의 기대치, 상관함수와 변분 계수는 다음과 같이 가정한다.

- $E[A_r] = A^0 = 10.0$
- $R(A_r, A_s) = \exp - \frac{|x_r - x_s|}{\lambda}$
- $\alpha = 0.05, \lambda = 0.5$

그리고 결정론적 데이터는 아래와 같이 가정한다.

- 영 계수 $E = 2.0 \times 10^7$
- 포와송 비 $v = 0.2$
- 질량 밀도 $\rho = 0.001$

초기치 문제를 해석하기 위하여, 이중 중첩법은 8개의 가장 낮은 고유치 쌍을 사용하여 상관 확률 변수를 일련의 무상관 변수로 변환시킨다. 식은 ($\Delta t = 0.001$) 1,024개의 표본 간격을 사용하여 시간

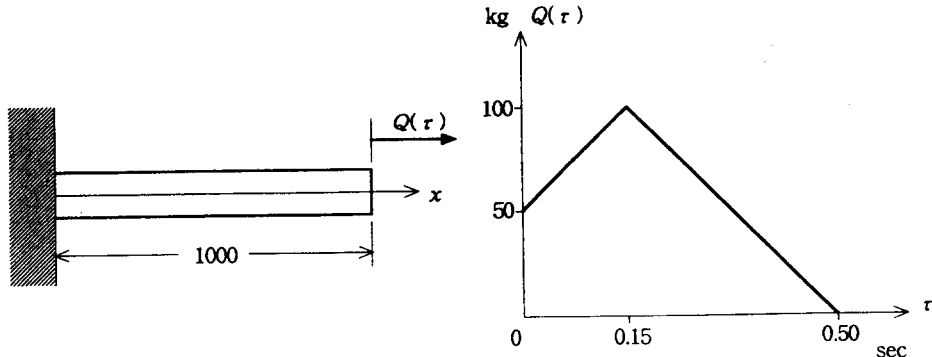


Fig. 1. 32 - elements cantilever and load function

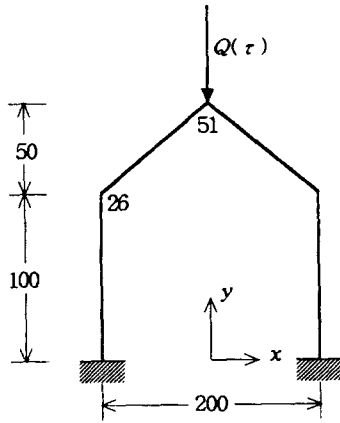


Fig. 2. 100 - elements 2D frame

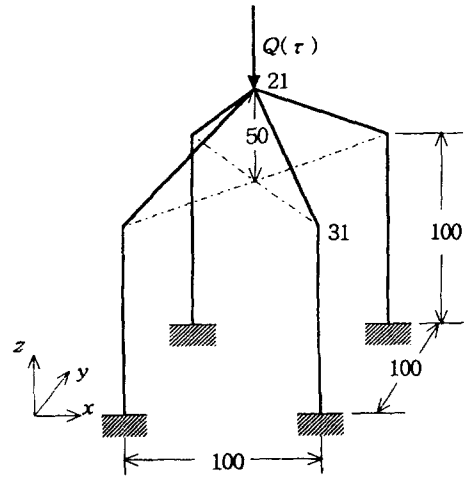


Fig. 3. 80 - elements 3D frame

에 대하여 적분한다. 세속성은 진동수 범위 인자 $r=0.01$ 과 0.3 그리고 $1,024$ 개의 Fourier항을 사용하여 제거한다.

유한요소 프로그램은 정적, 동적 최적화 및 설계 민감도에 대한 구조해석의 가능성을 제시하며, 확률해석(stochastic analysis)의 새로운 영역으로 확장되어 왔다. 앞에서 논의한 확장된 방법론으로서의 계산과정 적용은 재료, 기하학 및 하중의 불확실성을 갖는 트러스, 보와 같은 대규모 선형계의 정적 및 동적 해석의 새로운 도구일 수 있다. 개선된 모든 계산 모듈은 기능적으로 독립이며, 데이터베이스 제어에 의해서 전체 데이터를 상호 효율적으로 작용케 할 수 있다. 동적인 경우에, 구조적 고유치 문제와 상관 확률 변수에 대한 표준 고유치

직교성 문제는 동시에 풀려진다. 각 요소의 단계에서, 확률변수에 대한 질량, 감쇠 강성률 및 하중의 1차 및 2차 도함수를 계산하고 무상관 형식으로 변환하여 전체 좌표계로 조합한다. 확률변수로는 횡단면적, 탄성계수, 질량밀도 및 길이를 고려할 수 있다.

진동수 범위 $r(r=0.01, 0.3)$ 과 감쇠 계수 $d(d=0.0, 0.05)$ 의 각 두 경우에 대해서, 단면적을 확률 변수로 하여 계산을 해본 결과는 다음과 같다.

1) 감쇠를 주지 않았을 경우, r 이 0.3 일 때 0.01 일 때보다 외팔보인 경우에 시간이 경과할수록 최고점에서의 변위의 기대치가 상당히 크게 차이가 나며, 2차원 프레임인 경우에는 0.3 초 부근에서부터 약 3% 정도의 차이가 나기 시작하여, 시간

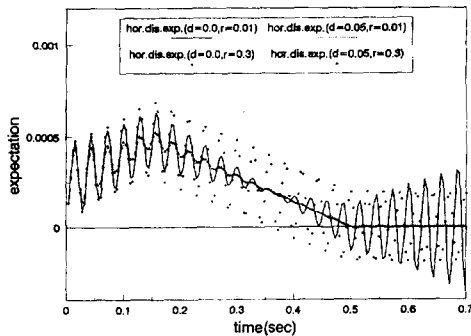


Fig. 4. Displacement expectation at free end node of cantilever

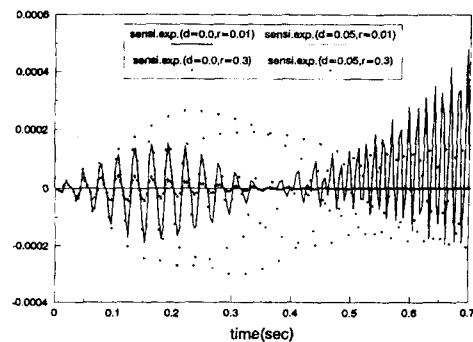


Fig. 5. Sensitivity expectation at free end node of cantilever

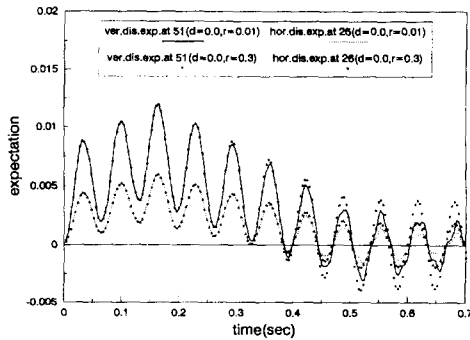


Fig. 6. Displacement expectation at 26, 51 node of 2D frame($d=0.0$)

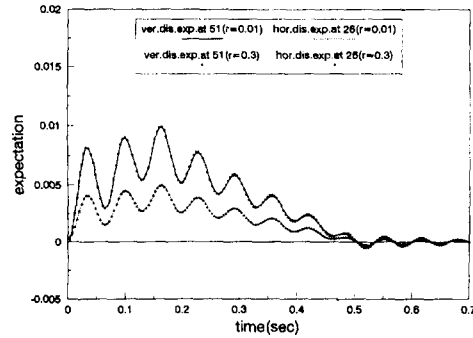


Fig. 7. Displacement expectation at 26, 51 node of 2D frame($d=0.05$)

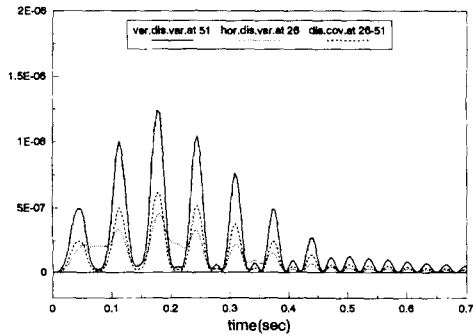


Fig. 8. Variance and covariance of displacement expectation at 26, 51 node of 2D frame($d=0.05$, $r=0.01$)

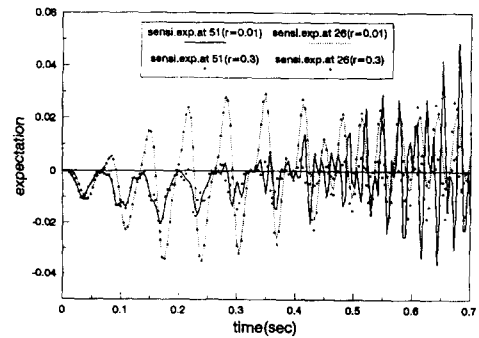


Fig. 9. Sensitivity expectation at 26, 51 node of 2D frame($d=0.0$)

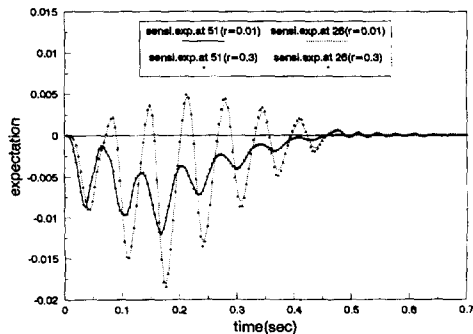


Fig. 10. Sensitivity expectation at 26, 51 node of 2D frame($d=0.05$)

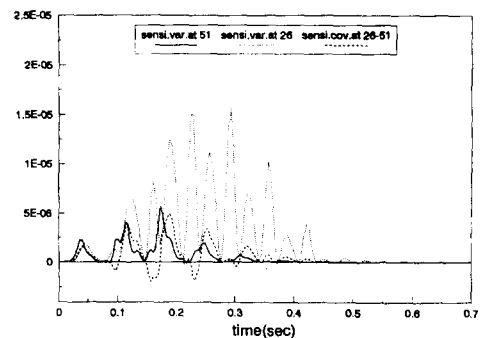


Fig. 11. Variance and covariance of sensitivity expectation at 26, 51 node of 2D frame($d=0.05$, $r=0.01$)

이 경과할수록 차이의 정도가 조금씩 커지는 경향을 보인다. 3차원 프레임인 경우에는 진동수 범위의 변화에도 불구하고 변위의 기대치가 거의 일치함을 보인다.(Fig. 4, Fig. 6, Fig. 12)

2) 감쇠가 주어졌을 때는, 감쇠를 주지 않았을 경우에 비해 외팔보, 2차원 프레임, 3차원 프레임 공히 변위의 기대치가 거의 일치한다.(Fig. 4, Fig. 7, Fig. 13)

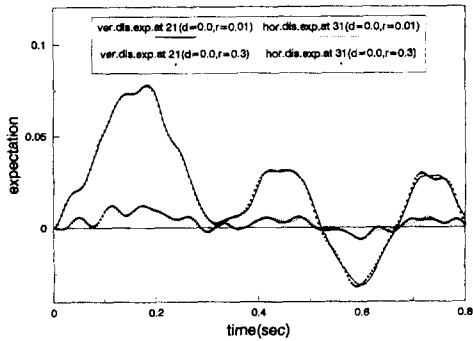


Fig. 12. Displacement expectation at 21, 31 node of 3D frame(d=0.0)

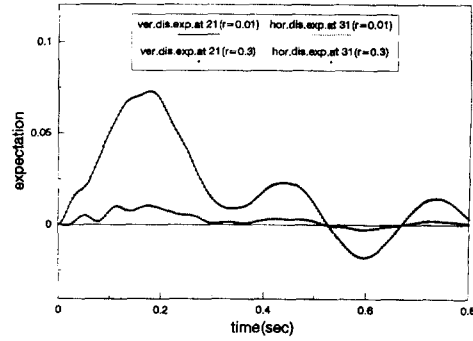


Fig. 13. Displacement expectation at 21, 31 node of 3D frame(d=0.05)

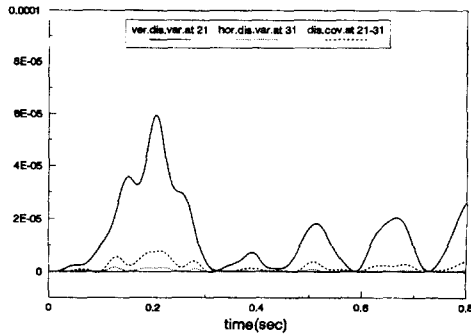


Fig. 14. Variance and covariance of displacement expectation at 21, 31 node of 3D frame(d=0.05, r=0.01)

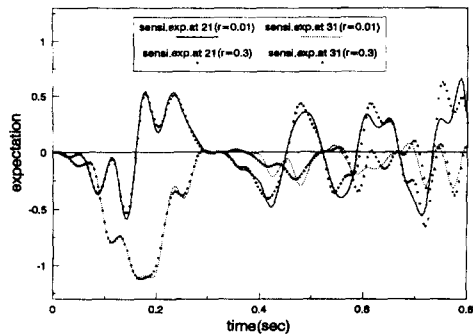


Fig. 15. Sensitivity expectation at 21, 31 node of 3D frame(d=0.0)

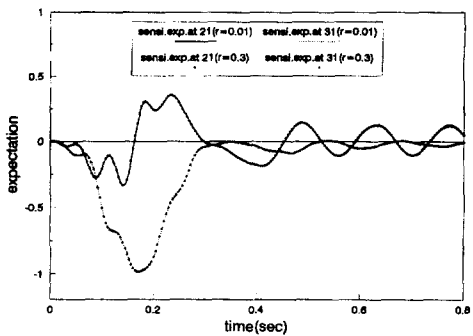


Fig. 16. Sensitivity expectation at 21, 31 node of 3D frame(d=0.05)

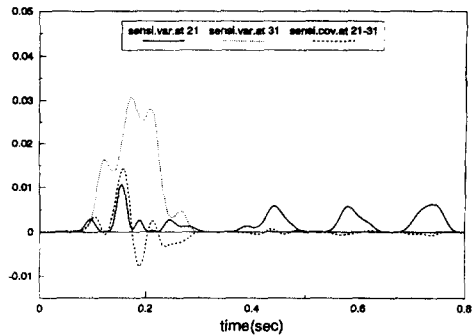


Fig. 17. Variance and covariance of sensitivity expectation at 21, 31 node of 3D frame(d=0.05, r=0.01)

3) 감쇠를 주었을 때 변위의 분산은, 2차원 프레임의 경우, 0.17초 부근에서 최고치를 나타내고 점점 줄어들기 시작하여 0으로 접근하며, 3차원 프레임의 경우, 0.2초 부근에서 최고치를 나타내고,

이후 급격히 줄어들어 0.5초 부근에서부터 다시 조금씩 상승하는 경향을 보인다.(Fig. 8, Fig. 14)

4) 민감도의 기대치에 있어서 감쇠를 주지 않았을 경우, r=0.3일 때가 0.01일 때보다 외팔보에서

는 약 0.08초 부근에서부터 차이가 나기 시작하여 피크치에서의 차이가 점점 증가한다. $r=0.01$ 인 경우는 0.2초 부근에서부터 점점 감소하여, 0.36초 부근에서 거의 0의 값을 보이다가, 다시 급격하게 증가하는 경향을 보이거나, $r=0.3$ 에서, 양의 응답인 경우에는 0.22초 부근에서부터, 음의 응답인 경우에는 0.32초 부근에서부터 점차 피크치의 응답이 완만하게 줄어들다가 0.5초 부근에서부터 거의 일정한 크기를 유지함을 보인다. 감쇠 계수, $d=0.05$ 로 했을 때의 응답 특성은, 진동수 범위 $r=0.01$ 로 했을 때보다 0.3으로 했을 때가 약간 큰 값을 보이거나, 별로 크게 차이가 나지는 않으며, 0.15초 부근까지 점점 커지다가 다시 감소하여 0.4초 부근부터는 두 경우 모두 거의 0에 가깝다.(Fig. 5)

5) 2차원 프레임의 경우 ;

i) 감쇠 계수, $d=0.0$ 일 때, 하중을 가하지 않은 26절점에서는 0.24초 부근에서 음의 극치, 0.35초 부근에서 양의 극치 값을 보이다가 양, 음의 민감도 기대치의 피크치가 완만하게 감소하며, 하중을 가한 51절점에서는 0.27초까지는 음의 기대치를 보이다가, 이후부터는 양, 음의 값으로 교대로 나타남을 보이며, 0.38초까지 진동수 범위 $r=0.01$ 인 경우와 0.3인 경우에 비슷한 경향을 보이다가 이후부터는 $r=0.3$ 인 경우의 응답의 진폭이 훨씬 적게 나타남을 보인다.(Fig. 9)

ii) 감쇠 계수, $d=0.05$ 일 때, 하중을 가한 51절점에서, 0.45초 부근까지 음의 값에서 진동하다가 그 이후는 거의 0에 수렴하며, 하중을 가하지 않은 26절점에서는 51절점에서의 진폭보다 2, 3배 큰 진폭으로 진동하다가 0.5초 이후부터 거의 0에 수렴하며, 진동수 범위 $r=0.01$ 이나 0.3에 관계없이 거의 비슷한 응답 특성을 보인다.(Fig. 10)

6) 3차원 프레임의 경우에는 2차원 프레임의 경우와는 전혀 다른 민감도 기대치의 응답 특성을 보이며,

i) 감쇠 계수, $d=0.0$ 일 때, 하중을 가한 21절점에서는 0.4초 부근에서부터 진동수 범위 $r=0.3$ 인 경우의 피크 부근의 응답치가 $r=0.01$ 인 경우보다 약간 앞으로 이동해 가는 특성을 보이며, 2차원의 경우와는 다르게 양, 음의 응답이 교대로 나타나는 반면, 하중을 가하지 않은 31절점에서는 0.185초

부근에서 음의 극치를 보이며 그 이후는 점점 0에 접근하며, 진동수 범위 $r=0.01$ 과 0.3인 두 경우에 대해서 0.38초까지 거의 비슷한 경향을 보이다가 그 이후부터 약간의 차이를 보일 뿐이다.(Fig. 15)

ii) 감쇠 계수, $d=0.05$ 일 때, $d=0.0$ 일 때와 전체적으로 비슷한 민감도 특성을 보이거나 대체로 피크치가 20% 정도 적게 나타나며, 0.3초 이후부터는 이전의 경우에 비해서 20% 정도의 적은 진폭 범위 내에서 진동하는 특성을 보이며, 진동수 범위 $r=0.01$ 과 0.3에 관계없이 거의 일치하는 경향을 보인다.(Fig. 16)

7) 민감도의 분산에 대해서 감쇠가 주어졌을 때에, 2차원 프레임은 하중이 가해지는 51 절점에서 보다 인접한 26 절점에서 최고치가 더 크며 51 절점에서는 0.17초 부근에서, 26 절점에서는 0.3초 부근에서 최고치를 나타내며, 0.42초 이후부터는 두 절점(51, 26절점)의 분산과 공분산의 응답치가 거의 0에 수렴한다. 3차원 프레임의 경우에도 하중이 가해지는 21 절점에서보다 31 절점에서 최고치가 2.5배 정도 더 크며, 21 절점에서는 0.15초 부근에서, 31 절점에서는 0.17초 부근에서 최고치를 나타낸다.(Fig. 11, Fig. 17)

결 론

‘확률 해밀턴 변분’ 정식화에 의해서, 적합조건, 구조법칙, 평형방정식, 주어진 영역에서의 형상함수, 그리고 경계조건과 초기조건등 큰 규모의 불확실성을 유한요소 모델에 동시에 고려해 넣을 수 있다. 이것은 직접강성률법의 경우가 아니며, 일관된 방법으로 확률분포에 의한 직접강성률법의 해를 구하는 것은 간단하지가 않다. 운동방정식의 비연성이 가능하고 세속성이 효과적으로 소거된다면 2차 모멘트 해석과 이중모드중첩법의 결합은 유한요소법에 의한 확률해석의 가장 효율적인 기법이다. 이 방법은 균일하거나 균일하지 않은 확률분야의 문제로서 선형 구조 동역학 문제에 적용 가능하며, 해밀턴 변분원리의 증분법을 통하여 연성계를 비연성계로 적절히 모사(simulation)함으로써 비선형의 경우로도 쉽게 확장시킬 수도 있다. 또, 불확실성(randomness)이 너무 크지 않아야 한다는

원천적인 제한이 있다. 즉, 변분계수가 받아들일 수 있는 정도의 20%정도라 하더라도, 확률변수들의 분산은 그들 기대치에 비해서 클 수 없다.

세속성 제거는, Fourier 해석과 합성이 길이의 복소치, $L=2^n$ 으로 수행된다면 가장 효과적이며, 필요한 계산시간을 줄일 수 있다. 앞의 수치예제에 의하면, 세속항들은 2^{10} 의 고속 Fourier 변환을 사용하여 소거되어짐으로써 계산시간은 100배 정도 줄어들게 된다. 컴퓨터 수행면에 있어서 개선된 알고리즘은 기존의 유한요소법을 이용할 수 있다. 계산을 위해 사용한 프로그램에 의한 계산 결과는 설계문제에 적용할 수 있다. 일반적으로, 확률유한요소법으로 동적 해석을 하기위한 최신의 S/W는 드물다. 따라서, 본 논문에서 정식화하여 검증한 프로그램은 컴퓨터 계산시간면에 있어서 효과적임을 제시할 수 있다.

확률 유한요소법의 또다른 측면은, 확률 문제에 대한 매개변수 공간의 이산화를 포함하며, 각 요소의 국소평균에 대한 공분산은 선택된 유한요소 매쉬(mesh)의 개수에 의존한다. 계산한 확률 분포의 정도를 검증하기 위해 요소 격자의 밀도에 대한 민감도를 반드시 검토해야한다. 그리고, 구조설계 민감도 문제는 설계변수에 대한 상태변수의 의존성을 고려해야 하며, 불확실성을 설계변수에 고려해 넣기 위해 확률유한요소법으로 정식화할 수 있다. 표면적으로는 아주 다른 두가지의 구조해석 토포의 결합은 방법론적으로나 계산수행면에 있어서 아주 유사하며 앞으로의 연구 목표가 된다.

참고문헌

- 1) E. H. Vanmarcke, 'Random Field : Analysis and Synthesis', the MIT Press, Cambridge, MA, 1984.
- 2) T. Hisada and S. Nakagiri, 'Stochastic finite element method developed for structural safety and reliability', Proc. 3rd Int. Conf. on Safety Reliability, 1981.
- 3) E. H. Vanmarcke et al., stochastic finite element analysis of simple beam. j.eng. Mech. div., ASCE109, 1203 - 1214(1983).
- 4) W. K. Liu, T. Belytschko and A. Mani, 'Random field finite elements', Int. J. num. methods eng., 23, 1831 - 1845, 1986.
- 5) K. D. Tocher, The Art of Simulation, McGraw - Hill, New York(1968).
- 6) W. K. Liu, T. Belytschko and G. H. Besterfield, 'A variational principle for probabilistic mechanics', T. J. R. Hughes and E. Hinton(eds.), Finite Element Method for Plate and Shell Structures, Vol. 2 : Formulations and Algorithms, Pineridge Press, Swansea, U.K., 285 - 311, 1987.
- 7) W. K. Liu, T. Belytschko and G. H. Besterfield, 'Variational approach to probabilistic finite elements', J. Eng. Mech. ASCE, 114, 2115 - 2133, 1988.
- 8) E. J. Haug and J. S. Arora, Applied Optimal Design, Wiley, New York, 1979.
- 9) E. J. Haug, 'A Review of distributed parameter structural optimization literature' in E. j.ugand J. Cea(eds.), Optimization of Distributed Parameter Structures. Sijthoff - Nordhoff. Alphen aan den Rijn, The Netherlands, 1981.
- 10) B. Bousselet, 'Quelques resultats en optimisation de domain', these d'Etat, Univ. de Nice, 1982.
- 11) T. D. Hien and M. Kleiber, 'Computational aspects in structural design sensitivity analysis for statics and dynamics', Comp. Struct., 33, 939 - 950, 1989.
- 12) W. K. Liu, T. Belytschko and A. Mani, 'Probabilistic finite element methods for nonlinear structural dynamics', J. Comp. Methods Appl. Mech. Eng., 56, 61 - 81, 1986.
- 13) W. K. Liu, T. Belytschko and G. H. Besterfield, 'Transient probabilistic systems', J. Comp. Methods Appl. Mech. Eng., 67, 27 - 54, 1988.
- 14) T. D. Hien and M. Kleiber, 'Finite element analysis based on stochastic Hamilton variational principle', Comp. Struct., 37, 893 - 902, 1990.
- 15) T. D. Hien and M. Kleiber, 'Stochastic structural design sensitivity analysis of static Response', Comp. Struct., 38, 659 - 667, 1991.
- 16) Y. K. Lin, Probabilistic Theory of Structural Dynamics, McGraw - hill, New York, 1967.
- 17) L. Meirovitch, Elements of Vibration Analysis, McGraw - Hill, Tokyo, 1975.

- 18) M. Kleiber, Incremental Finite Modelling in Non-linear Solid Mechanics, PWN Warszawa - Ellis Horwood, Chichester, U.K., 1989.
- 19) A. V. Oppenheim and A. S. Willsky, Signals and Systems, Prentice - Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1983.
- 20) A. H. Nayfeh, Perturbation Methods, John Wiley, New York (1973)
- 21) N. M. Bogoliubov, Asymptotic Methods in the Theory of Non-linear Oscillators, Gordon & Breach, New York (1961)
- 22) L. R. Rabiner et al., Theory and Application of Digital Signal Processing, Prentice - Hall, Englewood Cliffs, NJ (1975)