

<논 문> SAE NO. 96370005

# 동적광탄성 실험에 의한 응력이완 노치부근에서의 접촉특이응력해석

## Contact Singular Stress with Relief Notch by Using Dynamic Photoelasticity

이 역 섭\*, 황 시 원\*\*, 나 경 찬\*\*  
O. S. Lee, S. W. Hwang, K. C. Nah

### ABSTRACT

The dynamic photoelastic technique has been utilized to investigate the possibility of relieving the large local singular stresses which are induced in the corner of a right angled indenter. The indenter compresses a semi-infinite body dynamically with an impact load applied on the top of the indenter. the effect of geometric changes to the indenter in terms of the diameter (d) and the location ( $\ell$ ) of the notch on the relieving of the dynamic contact stresses are investigated. A multi-spark-high speed camera with twelve sparks was used to take dynamic photographs. The contact singular stresses were found to be released by introducing the relief notch along the indenter. The optimal location and geometry of the relief notch need further experimental investigation.

주요기술용어 : 동적 광탄성실험, 인덴터, 접촉특이응력(contact singular stress), 동적 광탄성 프린지 양상(pattern), 충격하중, 응력이완노치, 응력집중계수

### 1. 서 론

반무한판을 인덴터로 압축할 때 인덴터의 웨지 모서리에서 특이응력(stress singularity)이 발생한다는 것은 접촉 문제에서 잘 알려져 있는 사실이다. 응력집중의 정도는 웨지각도 및 인덴터와 몸체 사이의 마찰 현상과도 관계가 있다. 이 분야에 대하여는 Bijak-Zochowski 등이 2차원 응

력이완노치의 형상이 응력집중 감소 현상에 미치는 영향에 대하여 연구한바 있다<sup>1)</sup>, 또한 피스톤 핀 위에 열박음하는 엔진 커넥팅로드 헤드부분과, 터빈축 위에 디스크를 열박음 할때 압축을 받는 디스크와 터빈축 부근의 응력집중현상들을 규명하기 위한 연구가 체계적으로 수행된 바 있으며<sup>2)</sup>, 예리한 코너의 응력집중현상에 대하여는 Miniatt등에 의하여 연구 결과가 발표된 바 있다<sup>3)</sup>. 그 외 많은 연구자들이 예리한 에지의 주위에 발생하는 응력이완에 대해서 연구해 왔다<sup>4)~8)</sup>. 정적 하중을 받는 경우에 대하여는 이론적인 해

\* 정회원, 인하대학교 기계공학과

\*\* 인하대학교 대학원

석도 발표된 바 있다<sup>9)-10)</sup>.

본 연구에서는 Fig.1(a)와 같이 반무한판 위에서 접촉하는 인덴터의 가장자리를 따라 여러 가지 형상의 노치를 가공한 시편을 사용하여 인덴터의 웨지 모서리 부분과 가까운 영역에서 발생하는 응력 특이현상(stress singularity)이 변화하는 양상을 실험적으로 연구하려고 한다. 응력집중을 완화하는 장치로서 터어빈축에 열박음하는 원주형 노치를 도입하는 설계방법은 증기터빈엔진<sup>9)</sup>분야 설계에서는 잘 알려진 사실이다. 본 논문에서 제시되는 결과는 자동차 엔진의 커넥팅로드 위쪽 끝부분을 설계하는데 필요한 기술적인 정보를 제공하게 될 것이다.

실험방법으로는 직각형 인덴터에 충격하중이 가해질 때 동적인 응력이 전파하는 양상을 동적 팽탄성 실험방법으로 촬영하였으며, 인덴터 모서리에 가까운 영역에서 발생하는 응력의 동적인 변화를 경감시킬 수 있는 응력특이현상을 실험적으로 구하였다.

2. 이 론

Miniatt등은 Fig.1(b)와 같이 반 무한판 B<sub>1</sub>이 인덴터 B<sub>2</sub>에 의하여 정적 압축하중을 받는 경우에 인덴터 모서리에 발생하는 응력집중에 대하여 연구하였다<sup>3)</sup>. Dundurs 등은 두 접촉면에 마찰이 작용하지 않는 경우에 대한 연구를 수행하였고<sup>4)</sup>. 마찰이 있는 경우는 Theocaris와 Gdoutos<sup>11)</sup>에 의해서 연구 되었다. Comninou<sup>5)</sup>은 더 자세한 해석을 수행하여 이러한 연구의 영역을 확장시켰으며 응력상태는 대수적특이(logarithmic singularity)를 나타낸다는 사실을 규명하였다. Comninou의 해석에 의하면 응력장에서 특이성은 탄성영역의 Mellin transform과 연관되는 Determinent의 실근(real root)과 관계된다.

응력특이를 결정하는 함수 p를 결정하기 위하여 웨지각, 마찰계수, 재료특성등을 고려하여 Determinent D를 다음과 같이 나타낼 수 있다<sup>5)</sup>.

$$D(p: \gamma, \alpha, \beta, \rho) = 8(1+p)\sin(p\pi)F(p: \gamma, \alpha, \beta, \rho) \quad (1)$$

여기서

$$F(p: \gamma, \alpha, \beta, \rho) = (1+\alpha)\cos(p\pi)[\sin^2(p\gamma) - p^2\sin^2\gamma] + 1/2(1-\alpha)\sin(p\pi)(\sin 2p\gamma + p\sin 2\gamma) + \rho\sin(p\pi)[(1-\alpha)p\sin^2\gamma - 2\beta(\sin^2(p\gamma) - p^2\sin^2\gamma)] \quad (2)$$

$$\alpha = \frac{(\frac{\mu_2}{\mu_1})(x_1+1) - (x_2+1)}{(\frac{\mu_2}{\mu_1})(x_1+1) - (x_2+1)} \quad (3)$$

$$\alpha = \frac{(\frac{\mu_2}{\mu_1})(x_1-1) - (x_2-1)}{(\frac{\mu_2}{\mu_1})(x_1+1) - (x_2+1)} \quad (4)$$

여기서  $\gamma$ 는 Fig.1(b)에 나타난 웨지각도이고,  $\alpha, \beta$ 는 두 탄성재료 사이의 상호작용의 특성을

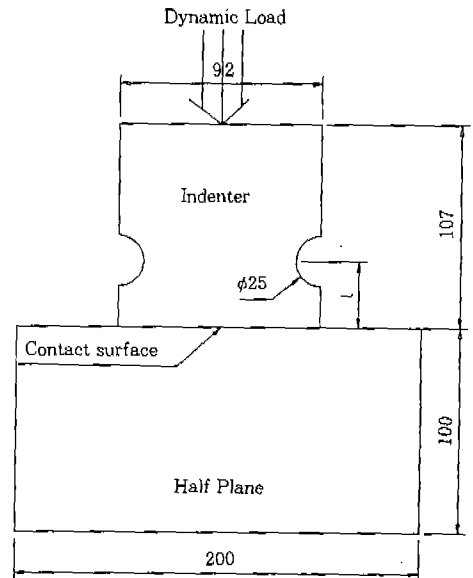


Fig.1. Geometry of specimen (두께 t=12.7mm, unit;mm)

나타내는 파라미터이며,  $\rho$ 는 인덴터와 반 무한판 사이의 마찰계수,  $\mu_1, \mu_2$ 와  $x_1, x_2$ 는 웨지와 반 무한판의 재료특성을 나타낸다.  $p$ 는  $r$ 이 0에 수렴할 때의 응력특이의 강도와 관련되기 때문에 응력성분들은 다음과 같이 나타낼 수 있게 된다.

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= O(r^{p-1}), \quad (0 \leq p \leq 1 \text{인 실수 } p \text{에 대하여}) \\ &= O[r_{\epsilon-1} \cos(\eta \log r)] \\ &\text{또는 } [r_{\epsilon-1} \sin(\eta \log r)] \\ &(0 \leq \zeta \leq 1 \text{인 복소수 } p = \zeta + i\eta \text{에 대하여}) \\ &= O \log r, \quad (5) \\ &(p=1 \text{일때 } \frac{\partial D}{\partial p} = 0 \text{이고, } p=1 \text{인 경우에}) \\ &= O(1), (p=1 \text{일때 } \frac{\partial D}{\partial p} \neq 0 \text{이고,} \\ &\quad 0 \leq \text{Re}(p) \leq 1 \text{에서} \\ &\quad D \text{에 } 0 \text{이 없는 경우에}) \end{aligned}$$

$\sigma_{ij}$ 의 값에 따라 주어진 웨지각에 대하여 함수  $F$ 의 근은  $p$ 와 인덴터와 반무한판의 마찰계수  $\rho$ 와의 관계로 나타낼 수 있다. 같은 방법으로 어느 정도의 마찰이 존재하는 경우에 대하여 함수  $F$ 의 근(+ 또는 -; +는 웨지접촉부의 상세도 Fig.1(b)에서 표시한 +x방향으로 반 무한판의 면에서 웨지의 미끄럼을 표시한다.)은  $p$ 와  $r$ 의 관계를 그래프로 그려서 나타낼 수 있다. 본 연구에서는 마찰이 없는 경우( $\rho=0$ )로 생각하고  $p$ 가 실수이며  $0 \leq p \leq 1$  사이에서 정해지는 특이의 멱수를 갖는 경우를 해석하였다. 이 경우의 일반 응력  $\sigma$ 는 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$\sigma = Ar^{p-1} \quad (6)$$

여기서  $A$ 는  $\theta$ 의 함수이며  $\theta$ 는 인덴터의 접촉면에서의 웨지각을 나타낸다. 양변을 대수값으로 취하면  $\ln(\sigma)$ 와  $\ln(r)$ 사이엔 선형적 관계가 이루어지며 직선의 경사각은 응력특이의 강도와 관련이 된다. 위의 이론식에서 제시된 결과식(6)에서  $p$ 는  $\ln(\text{fringe order})$ 와  $\ln(r/r_0)$ 의 관계에서 그 기울기로 응력 특이 현상을 알 수 있다.

### 3. 실험 장치 및 방법

#### 3.1 실험장치

동적광탄성 실험을 하기 위하여 두께가 12.7 mm인 폴리카보네이트를 사용하여 Fig.1(a)와 같은 모양으로 시편을 가공하였다. 인덴터와 접촉하는 반 무한판의 규격은 폭과 길이를 각각 100 mm, 200mm로 하였다. 인덴터 웨지부근의 응력이

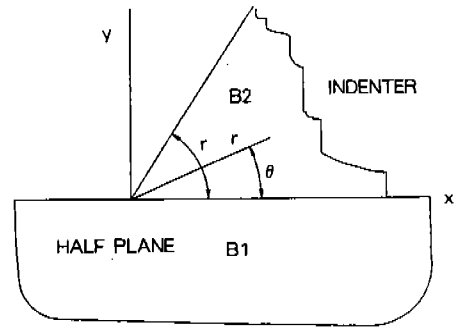
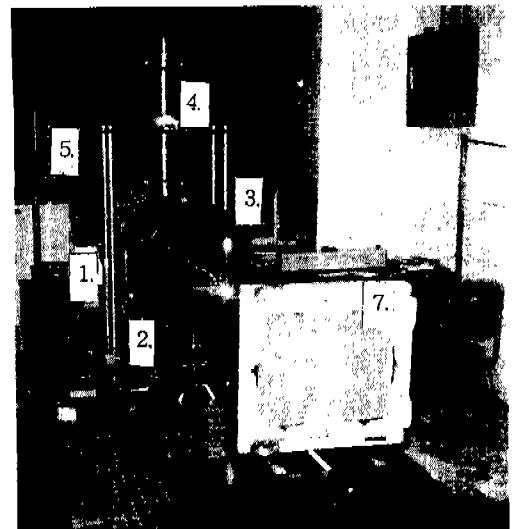


Fig.1(b) Wedge in contact with half space



- 1. Polarizer 2. Analyser
- 3. Field lens 4. Loading apparatus
- 5. Multi-spark high speed light source
- 6. Trigger controller 7. Camera

Fig.2 General view of experimental set up

완 현상을 체계적으로 규명하기 위하여 인덴터에 지름 25mm의 원주형 노치를 여러가지 무차원길이  $\eta(l/d)$ 로 가공하였다. 여기에서  $l$ 은 웨지 코너에서 노치중심까지의 길이이며  $d$ 는 노치의 지름을 나타낸다.

실험장치의 사진은 Fig.2와 같으며 고속 멀티스파크 카메라세트, 하중장치, 필드렌즈(field lens)와 원형 편광장치, 콘트롤러로 구성되어 있다. 고속 멀티스파크 카메라는 12개의 스파크가 설치되어 있고 이것들은 세팅된 시간차에 따라 순차적으로 점화가 일어난다. 고속 멀티스파크 카메라 세트의 블럭다이어그램을 Fig.3에 나타내었다. 점화 시간의 조정은 콘트롤러에서 스타트 딜레이(start delay)와 수평·수직 딜레이를 사용하여  $1\mu\text{sec}$ 에서  $1\text{sec}$ 의 범위로 할 수 있다. 본 연구에서는 하중햄머가 시편에 접촉할 때 트리거 시그널이 발생될 수 있도록 딜레이 타임을  $1\mu\text{sec}$ 로 세팅하고 각 프레임의 지연 시간은  $75\mu\text{sec}$ 에서  $100\mu\text{sec}$ 로 세팅하여 동적광탄성 사진을 촬영하였다.

하중장치는 Fig.4에서와 같이 29.4N의 추를 수직 자유낙하 시켜 시편에 대칭하중이 작용하도록 설계 제작하였다. 실제로 발생하기 쉬운 편심 하중을 제거하기 위하여 하중햄머유도용 파이프를 2중으로 설치하여 추가 일정한 지점에 낙하하도록 제작하여 사용하였다. 시편의 기하학적 형상이나, 크기에 따라 하중을 조정할 수 있게 설계·제작하였으며 9.8N씩 증가시킬 수 있도록 추를 제작했다. 선명한 프린지를 얻기 위하여 29.4N의 추를 40mm 높이에서 자유낙하를 시키면서 하중 작용점의 최적 조건을 조사하였다.

해석에 사용된 소프트웨어로는 브이텍이 개발한 화상해석전용 Scorpion Board와 ITB(Image Tool Box)를 사용하였으며 프린지치수를 화상 해석하고 실험결과를 디지털화 하였으며, CCD 카메라와 하드카피를 이용하여 프린지해석 결과를 Fig.5와 같이 출력하여 해석하였다.

3.2 실험방법

인덴터와 반무한판 사이의 접촉면에는 마찰을 감소시키기 위하여 유압작용유를 얇게 칠하였으

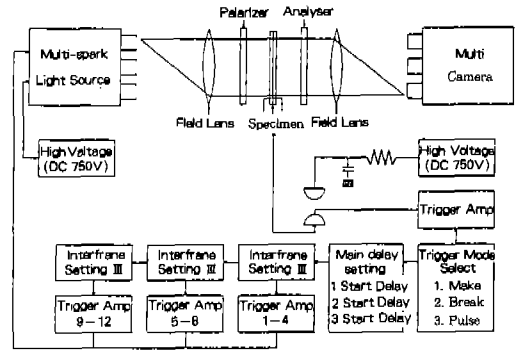


Fig.3. Block diagram of the multi-spark high speed camera set

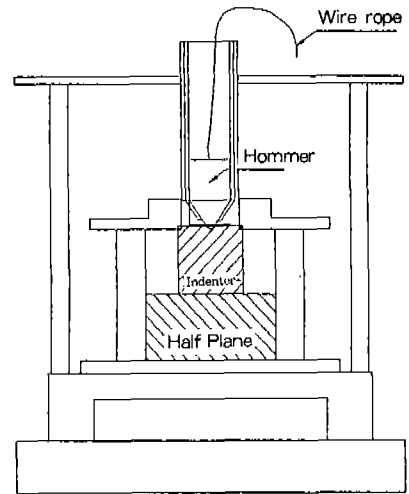


Fig.4 Schematic diagram of the loading apparatus



Fig.5 Dynamic isochromatic fringe pattern obtained by ITB system with  $\eta=2.72$  and  $d=25\text{mm}$

며, 응력분포의 변화는 무시할 수 있게 하였다 (유막이나 그리스는 동점성계수와 관련되어 압력 분포를 변경시키기도 한다).

Fig.1(a)에서 나타낸 바와 같이 노치를 갖는 인덴터의 접촉면과 반무한판 접촉면은 정밀밀링 작업을 하고(가공정밀도가  $\pm 0.01$  mm), 샌드 페이퍼(1800번)를 사용하여 매끈하게 하였다. 인덴터와 반무한판의 접촉 상태는 접촉면 부근에서 광탄성 프린지 패턴을 조사하여 균일한 접촉상태를 확인할 수 있었다. 지름  $d$ 가 25mm인 원주형 노치의 위치와 인덴터 코너 사이의 거리  $\ell$ 을 변화시켜 가면서 7가지 형상의 인덴터를 가공하였다. 무차원량  $\eta = \ell/d$ 의 범위를 1.10에서 2.72(1.10, 1.25, 1.38, 1.75, 1.88, 2.19, 2.72)까

지로 하여 응력집중 현상을 규명하였다. 또한 인덴터에 작용하는 압력이 일정한 것을 동적광탄성 무늬로 확인하였다.

#### 4. 실험의 해석

Fig.6은  $\eta=2.72$ 인 시편의 동적압축 충격실험의 결과이며, 응력이 전파되는 현상이 프린지차수의 변화로 나타나는것을 동적광탄성 사진을 통하여 관찰할 수 있다. 각 프레임당 시간 간격은 Fig.6에 나타내었다. 프레임당 시간의 펄스는 옵티컬디텍터를 사용하여 검증하였다.

Fig.7은  $d=25$ mm인 시편에서의 동적광탄성 프린지 패턴을 확대하여 나타낸 사진이다. 동적광탄성 무늬는 좌우대칭을 잘 이루고 있으며,  $\eta (= \ell/d)$ 가 1.75인 경우에는 코너에서의 응력집중보다 노치의 원주에서 응력집중현상이 더 크게 나타나는 것으로 보아 코너의 응력집중이 이완되는 현상을 관찰할 수 있었다. 최대 응력집중은 충격후 약  $1,200\mu\text{sec}$ 에서 나타났다.  $1,100\mu\text{sec}$

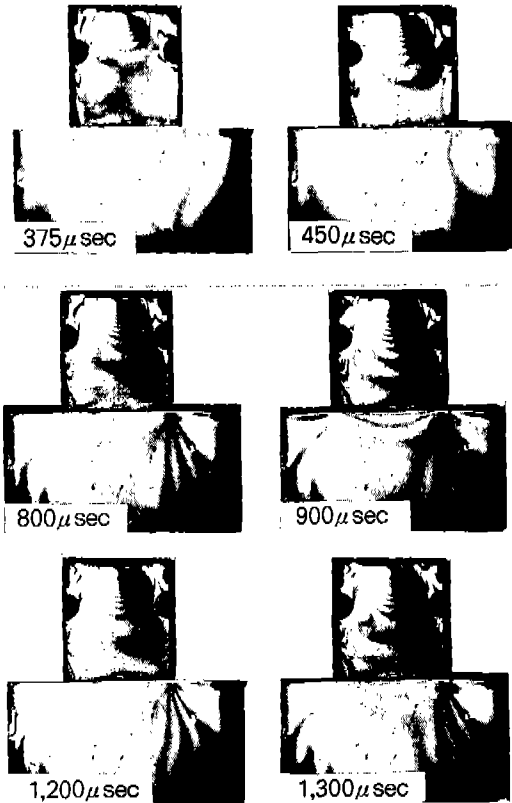


Fig.6 Isochromatic dynamic fringe pattern for the range 0 to 1900  $\mu\text{sec}$  produced by the multi-spark high speed camera set



Fig.7 Enlarged dynamic isochromatic fringe pattern for the specimen of  $\eta=2.72$

에서 하중이 일시적으로 감소하다가 다시 증가하는 현상이 관찰 되었는데 이 현상은 반사응력과 의 영향으로 사료되나 좀 더 정밀한 해석이 필요하다. 이러한 현상은 다른 시편에서도 시간의 차이는 있으나 똑같이 확인 되었다.

노치를 갖는 인덴터에 대한 동적광탄성 실험으로 얻은 프린지 차수와 코너에서 거리와의 관계를 Figs.8~11에 나타내었으며 여기서 나타난 각 데이터 점은 각각의 실험에 대하여 인덴터의 2개의 모서리에 대한 평균값들이다. 응력집중현상을 체계적으로 관찰하기 위하여 Fig.8에서와 같이 노치의 형상계수  $\eta$  값에 따라  $\ln(\text{프린지 차수})$ 를  $\ln(r)$ 로 표시하였으며 응력특이성은 모든  $\eta$ 에 대해서 직선으로 근사화할 수 있음을 알았다.  $r_0=1\text{mm}$ 로서  $r_0$ 는 무차원수로 나타내기 위하여 인덴터의 모서리에서 프린지오더가 위치한 곳까지의 길이를 나타낸다. 최소 반지름에서는 응력의 특이 현상이 있어서 1mm 정도 떨어진곳의 프린지를 측정할 수 있었다. 노치가 없는 경우에 대하여 Dundurs의 해석방법에 의하여 인덴터 코너에 발생하는 응력변화를 거리 함수로 표시하는 다음식을 이용하여 접촉특이응력의 양상을 해석하였다.

$$\sigma = A \cdot r^p \tag{7}$$

여기서,  $\sigma$  : 일반응력(여기서 광탄성 프린지로 나타나는 최대 전단응력이라고 생각한다).

$r$  : 인덴터 모서리에서의 거리

$p$  : 실험으로 결정되는 특이응력 차수

$A$  : 상수.

일반적인 경우에는 응력과 거리의 관계는 매우 작은  $r$ 에 대하여는 비선형(non linear)이고, 특히 코너 정점에 가까이 가면 갈수록 즉 매우 작은  $r$ 에 대하여는 비선형의 정도(degree)가 클 것이다. 특이성의 멱수  $p$  값은 식 (1)의 양변에  $\ln$ 를 취한 아래 방정식에 따라 실험 데이터를 curve fitting하여 산정할 수 있으며 본 연구에서는  $-0.045$ 와  $-0.08$  범위의 값을 얻을 수 있다.

$$\ln(\sigma) = \ln(\text{fringe order}) = \ln(A) + p \ln r \tag{8}$$

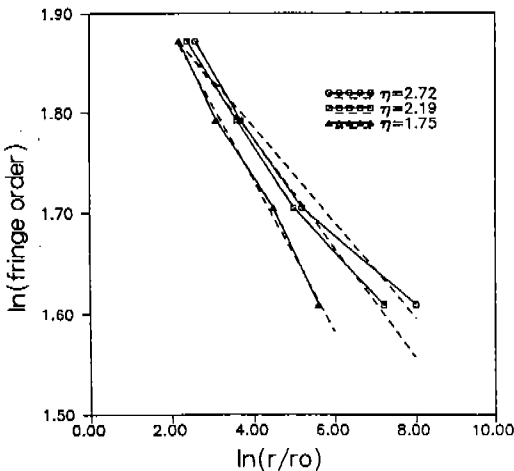


Fig.8 Variation of  $\ln(\text{fringe order})$  as function of  $\ln(r/r_0)$  for the different  $\eta$  in denter

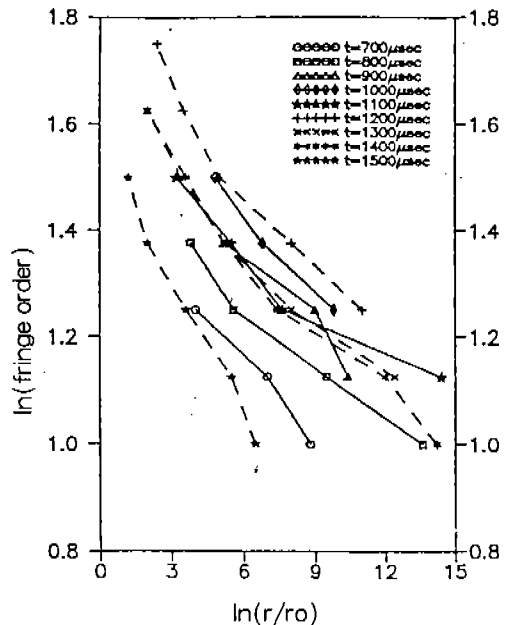


Fig.9 Variation of  $\ln(\text{fringe order})$  as function of  $\ln(r/r_0)$  for the different time ( $\eta=2.72$ ).

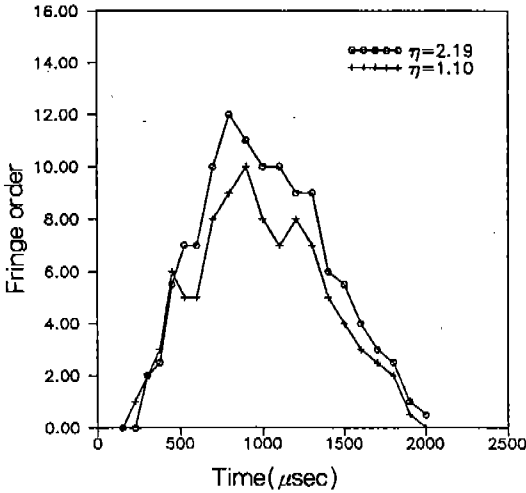


Fig.10 Variation of fringe order with time for two  $\eta=2.19$  and  $1.10$ .

Fig.9에는  $\ln(\text{fringe order})$ 의 변화 양상을  $\ln(r/r_0)$ 의 변화에 따라  $\eta=2.72$ 에 대하여 나타냈다. 여기서는  $1,000\mu\text{sec}$ 에서  $1,100\mu\text{sec}$ 에서  $\ln(\text{fringe order})$ 가 약간 감소하다가 다시  $1,200\mu\text{sec}$ 에서 최고 값이 나타나고 있으며,  $l/d$ 의 값에 따라 약간의 차이는 있으나 직선적으로 변화하는 경향은 Fig.8과 유사하였다. 노치가 코너쪽으로 접근할 때는 반드시 선형적이라고 할 수는 없다. 그 원인은  $\ln(\text{fringe order})$ 와  $\ln(r)$ 의 사이의 관계가 1보다 작은  $r$ 값에 대하여 선형적인 계도를 벗어나기 때문이다.

Fig.10은 반무한판에서의 응력의 변화현상을 조사한것으로  $\eta(=l/d)$ 가 2.19와 1.10일때의 응력집중현상을 비교한것이다.  $\eta(=l/d)=2.19$ 에서 응력집중이 두드러지게 나타나는것을 알 수 있다. 특히  $600\mu\text{sec}$ 에서 응력의 감소는 접촉면에서 마찰로 인하여 발생하는 현상으로 사료되고,  $1,200\sim 1,300\mu\text{sec}$ 에서의 감소는 반사파의 영향으로 간주되나 더 정밀한 해석이 필요하다.

Fig.11은 응력집중현상을  $\eta$ 의 변화 양상과 관련시킨 것으로 별표로 나타낸 Bjiak-Zochowski의 정적인 결과와  $\eta$ 값이 작은 경우에는 대체로 유사한 변화 양상을 나타내고 있는 것을 알 수 있다. 그러나, 동적인 하중이 작용할 시에는 응

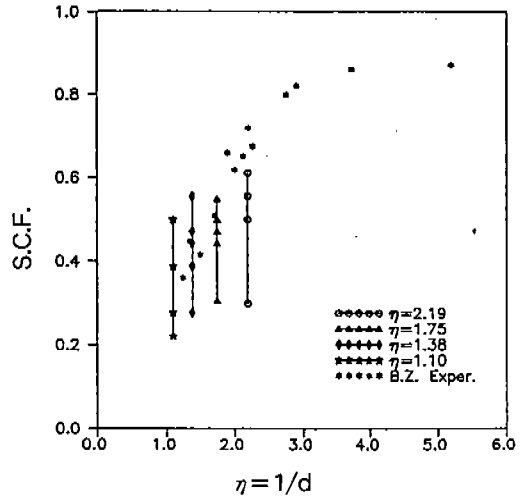


Fig.11 Stress Concentration factor in presence of notch relief Notch in indenter

력집중이 동일한  $\eta$ 값에서도 많은 변화를 나타내고 있음을 알 수 있다. 이 그래프에서  $\eta$ 값이 작은 경우에 데이터의 산포현상은 동적인 상태를 나타내므로서 응력집중계수가  $\mu\text{sec}$ 단위로 변화하는 양상을 나타낸 것이므로 산포의 범위가 넓어진것이다.  $\eta$ 값이 2.19 일때 응력집중이 최대가 되고  $\eta$ 값이 1.1에 근접할수록 응력집중이 감소되는 경향을 나타낸다.

## 5. 결 론

동적광탄성 실험으로 인텐터로 동적압축하중을 받는 반무한판의 직각코너에서의 응력집중현상을 규명하였다. 인텐터의 가장자리를 따라 원주형노치의 위치를 바꾸어서 제작한 시편으로 얻은 결과는 노치의 기하학적 형상과 위치를 적절히 설계하면 동적접촉 특이응력을 감소시킬 수 있다는 가능성을 보여준다. 어떤 경우에는 노치 선단에서 응력집중이 상대적으로 높은 값에 도달하는 경우도 있으므로 더 많은 실험 데이터가 요구된다. 본 연구의 한정된 실험적 결과로서 다음과 같은 제안을 할 수 있다.

- 1) 인텐터로 충격압축하중을 받는 반무한판의 직각 코너에서 발생하는 응력의 특이성은

인텐터의 가장자리를 따라 원주형 노치를 주면 감소시킬 수 있다.

- 2)  $\eta=1.10$ 일때 보다  $\eta(=l/d)=2.19$ 인경우 응력집중현상이 두드러짐을 알 수 있다.
- 3) 충격하중 작용후  $600\mu\text{sec}$ 에서 프린지 차수의 감소 현상은 접촉면에서 마찰로 인하여 발생하는 현상으로 사료되며,  $1,200\sim 1,300\mu\text{sec}$ 에서의 감소는 반사파의 영향으로 간주되는데 더 정밀한 해석이 필요하다고 생각된다.
- 4) 특이성의 멱수  $p$  값은 실험 데이터를 curve fitting하여 산정할 수 있으며 본 연구에서는  $-0.045$ 와  $-0.08$  범위의 값을 얻을 수 있다. 반지름만 알면 이 기울기를 통하여 전단응력을 알 수 있다.

### 참 고 문 헌

1. Bijak-Zochowski, M. and Waas, A. M., "Reduction of Contact Stress By Use of Relief Notches," *Experimental Mechanics*, pp 271~275 1991,.
2. Bijak-Zochowski, M., Marek, P. and Tracz, M., "On Stress Singularities in some axisymmetric problems of elastic contact," Recent Advanced in *Experimental Mechanics*, pp. 131~136, 1994.
3. Miniatt, E. C., Waas, A. M. and Anderson, W. J., "An Experimental Study of Stress Singularities at a Sharp Corner in a Contact Problem," *Experimental Mechanics*, 30(3), pp. 281~285, 1990.
4. Dundurs, J. and Lee, M. S., "Stress Concentration at a Sharp Edge in Contact Problems," *J. Elasticity*, 2, p.109, 1972.
5. Comninou, M., "Stress Singularity at a Sharp Edge in Contact Problems with Friction," *J. Appl. Math. and Phys. (ZAMP)*, 27, p. 493, 1976.
6. Williams, M. S., "Stress Singularities from Various Boundary Conditions in Angular Corners of Plates in Extension," *J. Appl. Mech.*, 19, p. 526, 1971.
7. Bogy, D.B., "Two Edge-bonded Elastic Wedges of Different Materials and Wedge Angles Under Surfaces Fractions," *J. Appl. Mech.*, 38, p.377, 1971.
8. Peterson, R. E., Stress Concentration Factors, John Wiley and Sons, 1974.
9. Van Hulle, D., "Finite Element Analysis of Planar and Axisymmetric Rod-pin Contact Problem," Dept. of Aero. Eng. Rep. SM-91.3, Univ. of Michigan, 1991.
10. Miniatt, E. C., "An Experimental and Numerical Study of Stress Relief at a Sharp Coner in a Contact Problem," Dept. of Aero. Eng. Rep. SM-90-3, Univ. of Michigan, 1990.
11. Gdoutous, E. and Theocaris, P. S., "Stress Concentration at the Apex of a Plane Indenter Acting on an Elastic Half Plane," *J. Appl. Mech.*, Vol. 36, p650, 1975.