

〈논 문〉 SAE NO. 96370058

# 수정된 Extended k-ε 난류모델을 사용한 90° 곡관 내의 난류유동에 관한 수치해석적 연구

## Numerical Computations of Turbulent Flow in a 90° Curved Duct Using a Modified Extended k-ε Turbulence Model

정 수 진,\* 김 태 훈,\*\* 조 진 호\*\*\*  
S. J. Jeong, T. H. Kim, J. H. Cho

### ABSTRACT

An extended k-ε turbulence model modified by considering the streamline curvature effect and standard k-ε turbulence model have been applied for three dimensional analysis of turbulence flow in a 90° curved duct.

By comparison of the results with the experimental data, the modified extended k-ε model gave closer agreement with experimental data than the results from standard k-ε model owing to an extra time scale of the production rate and parameter describing effects of streamline curvature included in the dissipation rate equation.

주요기술용어 : Extended k-ε Turbulence Model(확장 k-ε 난류모델), Time Scale(시간 스케일), Computational Fluid Dynamics(전산 유체 역학), Streamline Curvature Effect(유선 곡률효과)

### 1. 서 론

최근들어 컴퓨터 성능이 급속히 향상되고 수치 해석 기법이 발달하게 됨에 따라 전산 유체역학(Computational Fluid Dynamics) 기법이 산업계에 널리 쓰여지고 있다. 이러한 전산 유체역학 기법으로 해결해야 할 실제적인 공학문제들은 대

부분 3차원 난류유동이며 이의 정확한 유동특성 해석을 위해서 고려해야 할 적절한 격자구성, 정확한 대류항의 이산화법등 많은 문제 중 어떠한 난류모형을 선택하느냐가 해석의 정확성에 가장 큰 영향을 미친다고 해도 과언이 아니며 따라서 여러 가지 난류모델에 대한 집중적인 연구가 수행되어 오고 있다.

현재까지 가장 널리 사용되어 오고있는 난류모형은 등방성 2방정식인 표준 k-ε 난류모델이며, 이러한 등방성 외점성 난류모델에 있어서 유동장 내의 난류 길이 척도(Turbulence length scale)

\* 정회원, 쌍용자동차 기술연구소  
\*\* 정회원, 마산전문대학교  
\*\*\* 정회원, 현양대학교

및 속도척도(Velocity Scale)의 타당성있는 표현은 정확한 난류 유동장 해석을 위한 주요인자이다.

표준  $k-\epsilon$  난류모델은 여러분야의 난류유동장 해석에 적용되어지고 있으며, 일반적으로 정성적으로 타당성 있는 결과를 예측하여 주고 있다. 그러나 제트류 주위와 같은 난류 운동에너지의 급격한 생성과 소산이 수반되는 유동에는 정확한 결과를 내어주고 있지 못하며, 또한 유선곡률(Streamline Curvature)이 있는 유동해석에 적용할 경우 와점성 개념을 기초로한 레이놀즈 응력의 등방성으로 인하여 유선곡률의 변화에 따른 예측 정확도가 저하되므로 이에 대한 수정이 필요하다<sup>2),3)</sup>.

이러한 표준  $k-\epsilon$ 모델의 부정확성은 대부분 소산을 방정식의 불완전성에서 기인하며 따라서 이의 향상을 위해서 많은 연구<sup>2),4),5)</sup>가 소산을 방정식의 변형에 의하여 진행되어 왔다. Chen & Kim<sup>5)</sup>이 개발한 확장  $k-\epsilon$  모델 역시 소산을 방정식에 여분의 생성항을 첨가시킴으로써 예측성능을 향상시켰으며 이는 후향계단 및 제트류 등의 난류유동에 적용하여 입증된 바 있다<sup>5),10)</sup>. 그러나 터보기계등의 유로나 급격한 곡률을 갖는 관유동과 같은 복잡한 난류유동에는 적용된 바가 없었다.

따라서 본 논문에서는 Chen & Kim의 확장  $k-\epsilon$ 모델에 유선곡률에 의한 변형을 효과를 첨가시켜 난류운동에너지의 소산율에 대한 예측성능 개선을 꾀하였으며, 본 난류모델을 직사각형 단면의 90° 곡관의 3차원 난류특성을 해석에 적용하여 그 결과를 Howard<sup>6)</sup>의 실험결과 및 표준  $k-\epsilon$ 모델의 결과와 비교하여 본 연구의 난류모델의 타당성을 검증하였다.

## 2. 이론 해석

### 2.1 계산 모델

Fig.1은 본 해석에 사용된 90° 곡관의 유로형상을 나타낸다. 공기는 1.22m 폭과 2.52m 높이를 가진 직사각형 단면을 통과하며 관은 2.52m의 곡률반경을 지닌다. 입구는 곡물 끝단에서 1.

22m 떨어진 하류부분에 위치하며 출구는 대기중으로 자유롭게 유출된다.

### 2.2 지배 방정식

정상상태 비압축성 유동에 대한 지배방정식을 시간평균하여 텐서형태로 나타내면 다음과 같다. 연속 방정식 :

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \tag{1}$$

운동량 방정식 :

$$u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \overline{u_i u_j} \right) \tag{2}$$

위의 방정식을 계산하기 위해서 레이놀즈 응력  $\overline{u_i u_j}$ 를 아래와 같은 Boussinesq와점성 모델을 사용한다.

$$\overline{u_i u_j} = \nu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} k \tag{3}$$

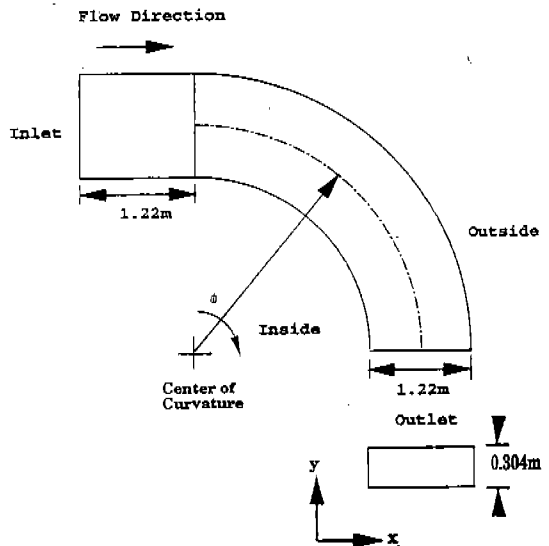


Fig.1 Schematic Diagram of Geometry considered

### 2.3 난류 모델

난류와점성 계수,  $\nu_t$ 는 아래와 같은 관계로 부터 얻어진다.

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \quad (4)$$

여기서  $C_\mu$ 는 0.09이며,  $k$ 와  $\epsilon$ 는 각각 난류 운동에너지와 소산율을 나타내며 난류 운동에너지의 이송방정식은 아래와 같다.

$$u_i \frac{\partial k}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_i} \right) + G_k - \epsilon \quad (5)$$

여기서, Boussinesq 가정에 의하여 난류생성률,  $G_k$ 는 속도장의 평균 변형률과 관련되어 있으므로,

$$G_k = \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (6)$$

Chen & Kim<sup>5)</sup>이 제안한 확장 k-ε모델의 소산율 이송방정식은 다음과 같다.

$$u_i \frac{\partial \epsilon}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_i} \right) + C_1 \frac{\epsilon}{k} G_k - C_2 \frac{\epsilon^2}{k} + C_3 \frac{G_k^2}{k} \quad (7)$$

여기서,  $C_1, C_2, C_3, \sigma_k, \sigma_\epsilon$ 는 실험적으로 보정된 상수이며<sup>5)</sup> 아래 표 1에 표준 k-ε모델과 확장 k-ε모델에서 사용된 상수값들을 표시하였다.

Table 1

	$\sigma_k$	$\sigma_\epsilon$	$C_1$	$C_2$	$C_3$
표준 k-ε 모델	1.0	1.3	1.44	1.92	0
확장 k-ε 모델	0.75	1.15	1.15	1.9	0.25

식 (7)에서 보듯이, 확장 k-ε모델은 소산율 시간스케일 (Dissipation rate time scale),  $\frac{k}{\epsilon}$  와 생성률 시간스케일 (Production rate time scale),  $\frac{k}{G_k}$ 의 2개의 시간 스케일이 사용되므로 표준 k-

ε모델보다 효과적으로 평균 변형률에 대해 소산율을 표현할 수 있다. 식 (7)의 마지막 항에 나타난 부가적 생성항,  $C_3 \frac{G_k^2}{k}$ 은 2개의 시간 스케일에 의해서 제어되는 큰 와(large eddy)에서 작은 와(small eddy)로의 에너지전송을 나타낸다.

또한 본 연구에서는 곡관과 같이 곡률이 존재하는 난류유동장의 해석에 있어서 난류구조가 유선곡률에 의해 변하므로 이에 대한 수정을 위하여 Launder<sup>2)</sup>등은 난류소산률 방정식의 주감쇄항(primary decay term)에 포함되어 있는 상수  $C_2$ 를 Richardson수에 아래식과 같이 종속 시킴으로써 곡관에 의한 변형률 효과를 나타내었다.

$$C_2 = C_2(1 - \eta R_{it}) \quad (8)$$

여기서,  $\eta = 0.2$ 이며  $R_{it}$ 는 Richardson 수이고 유선곡률 좌표계(s-n 좌표계)에서는 아래와 같이 표현된다.

$$R_{it} = 2 \left( \frac{k}{\epsilon} \right)^2 \frac{U_s}{R} \left( \frac{\partial U_s}{\partial m} + \frac{U_s}{R} \right) \quad (9)$$

여기서, s 및 n은 각각 유선방향 및 유선에 수직한 방향이며, R은 곡률 반경이다.

변형률 효과를 나타내는 변수  $R_{it}$ 를 3차원으로 확장하기 위하여 명<sup>7)</sup>등이 곡률효과와 이차적인 변형률 효과가 평균 변형률과 평균 와도의 상대적인 크기에 의해서 결정되어 진다는 가정 아래 제시한 아래와 같은 변수를 사용하였다.

$$R_{it} = M_{it} = \frac{k^2}{\epsilon^2} (\Omega_{ij}^2 - S_{ij}^2) \quad (10)$$

이때,  $S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ ,  $\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ 이다.

### 2.4 수치해석

본 연구에서는 지배방정식을 이산화하기 위하여 유한체적법을 사용하였으며 직관부와 곡관부

에서 직교좌표계 (x, y, z)와 원통좌표계 (r, θ, z)를 각각 사용하였다. 해석방법으로는 대류항의 계산에는 수치적 안정성이 뛰어난 선형 상류차분법 (linear upwind scheme)을 사용하였고, 압력장을 계산하기 위하여 SIMPLE 알고리즘<sup>8)</sup>을 이용하였다.

격자구조의 유효성을 규명하기 위하여 3가지의 비균일 격자구조에 대한  $\phi=42.3^\circ$ 에서의 무차원 평균속도를 비교하여 Fig.2에 나타내었다.

먼저  $27 \times 25 \times 24$ 의 경우는  $40 \times 35 \times 75$ 의 경우에 비하여 최고 속도는 약 1.47%의 차이를 보이고 있으나  $31 \times 29 \times 64$ 의 경우는 약 0.15%의 오차를 보이고 있음을 알 수 있다. 그러므로 본 연구에 사용된 격자수는 주유동방향으로 입구 직관부는 15개, 곡관부는 등간격으로 50개의 격자선을 생성하였으며 주유동에 수직인 단면에는  $31 \times 29(x \times y)$ 개의 격자선을 설정하였다. 벽부근의 유동특성 해석을 위하여 벽부근에 격자를 밀집 시켰으며, 해석에 사용한 격자계를 Fig.3에 나타내었다.

해의 수렴판정 조건은 각 격자점의 운동량의 잔류량 (Residual)의 합과 연속방정식의 잔류량의 합을 압구면에서의 유속으로 나눈 값이  $10^{-3}$ 보다 작을 경우로 설정하였다.

수력직경을 특성길이로 한 입구면에서의 레이놀즈수는  $7.06 \times 10^5$ 이며 입구면의 경계조건에 주어진 난류강도는 실험<sup>6)</sup>으로부터 구한

$U'_s/U_s=0.005$ 를 사용하였다. 여기서  $U_s$ 는 주유동방향 속도이며, '은 요동성분을 나타낸다. 난류 에너지 소산을  $\epsilon$ 은  $\epsilon=C_{\epsilon}^{0.75}k^{1.5}/l$ 의 관계식으로부터 구하였다. 출구의 경계조건은 자유유출조건으로 영구배 조건 (Zero gradient condition)을 주었다.

$$\text{즉, } \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 (\phi = \text{Velocity, } k, \epsilon, \overline{u_i u_j})$$

벽면에서는 점착 (no-slip) 조건을 사용하였으며 이 부근의 속도 및 난류사태량 분포를 구하기 위해서 벽함수 (wall function)을 사용하였다.

### 3. 결과 및 고찰

Fig.4는 표준 k-ε모델과 확장 k-ε모델을 사용하여 구한 무차원화 ( $U_s/Q$ )된 주유동방향 속도를  $\phi=11.25^\circ, 22.5^\circ, 33.75^\circ, 41.25^\circ, 56.25^\circ$ 에 대하여  $y=10\text{mm}$ 의 경우에 대하여 각각 나타낸 것이다. 여기서 Q는 관 단면 중심에서의 평균속도량 ( $\sqrt{u^2+v^2+w^2}$ )이며, ζ는  $x/(\text{duct width})$ 이다. 전체적인 경우에 대해서 확장 k-ε 난류모형이 표준 k-ε모델에 비하여 보다 개선된 속도분포를 나타내어주고 있음을 알 수 있다. 특히  $\phi=41.25^\circ$  이상의 곡관 하단부에서 확장 k-ε 난류모델의 계산결과가 표준 k-ε모델에 비하여 비교적 개선되어 있음을 알 수 있다. 이는 확장 k-ε모델의 에너지 전달 메카니즘의 효율성에 기

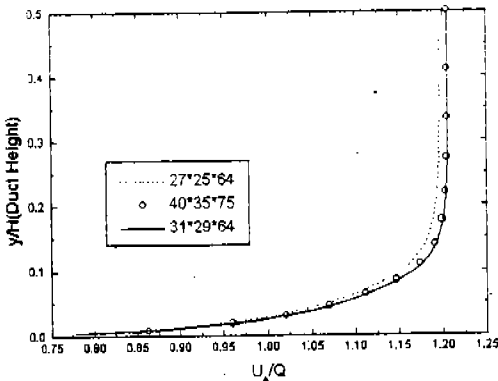


Fig.2 Grid Dependence Check for  $U_s/Q$

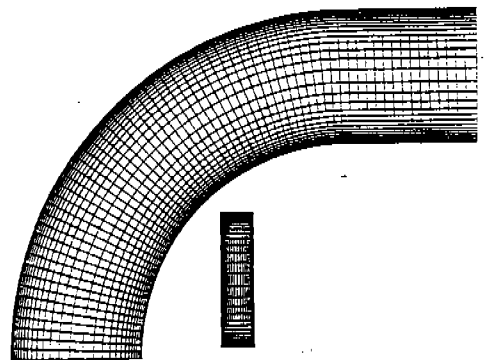
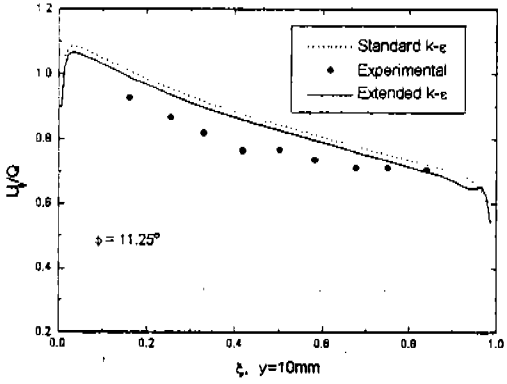
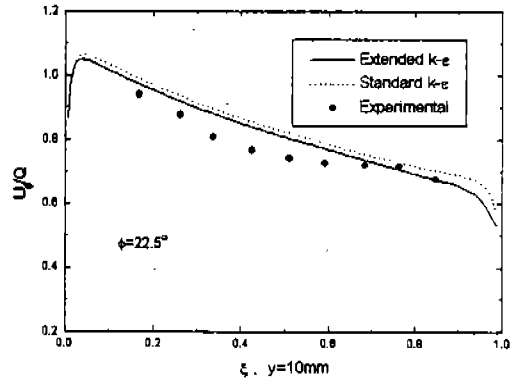


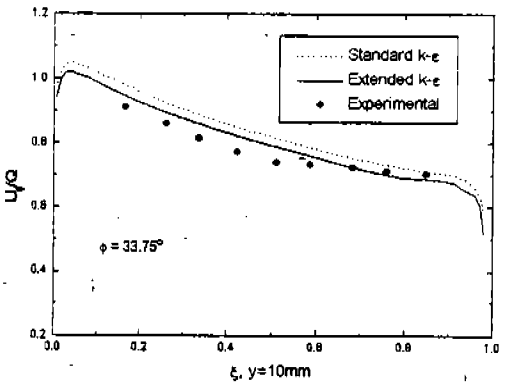
Fig.3 Computational Grid System of Curved Duct



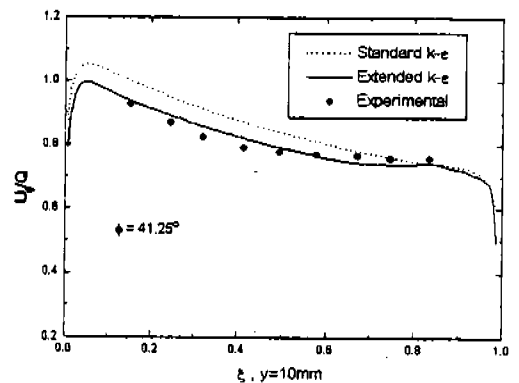
(a)  $\phi = 11.25^\circ$



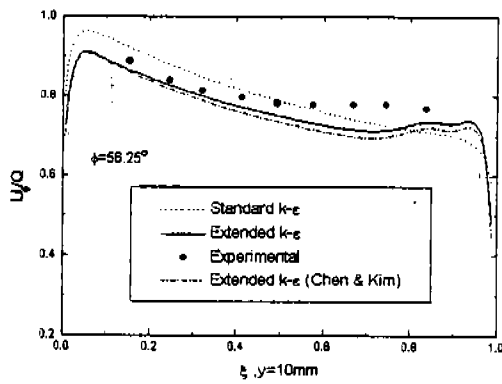
(b)  $\phi = 22.5^\circ$



(c)  $\phi = 33.75^\circ$



(d)  $\phi = 41.25^\circ$



(e)  $\phi = 56.25^\circ$

Fig.4 Comparison of longitudinal Velocity along the Duct,  $y=10\text{mm}$

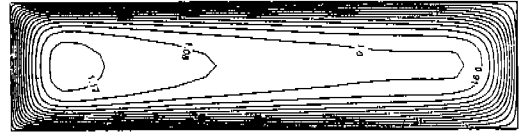
인한다고 생각되어지며, 주로 확장 k-ε모델의 소산을 방정식에 포함되어진 생성률 시간 스케일이 평균 변형률에 상응하는 에너지 이송을 보다 효율적으로 할 수 있도록 하여주고 있고, 유선곡률에 의한 난류 운동에너지의 생성률과 소멸률 사이의 비평형 효과를 고려한 결과이다. 특히  $\phi = 56.25^\circ$ 와 같은 곡관 후류부분은 곡률 원심력에 의한 난류구조의 급격한 변동으로 Fig.4의 (e)에서 보여주듯이 두 모델의 결과 차이가 두드러지며 Chen & Kim<sup>5)</sup>의 확장 k-ε모델 보다 본 연구에서 사용된 확장 k-ε모델이 실험값에 근접하는 개선된 결과를 나타내어 주고 있음을 알 수 있다.

Fig.5에  $\phi = 11.22^\circ, 45^\circ, 75^\circ, 85^\circ$ 의 주유동 방향에 수직인 단면에서 형성되어지는 무차원 주유동속도( $U_x/Q$ )의 등속선을 확장 k-ε모델로 계산하여 나타내었다.  $\phi = 11.22^\circ$ 에서 주유동 속도 분포는 내벽면 쪽에서 높은 속도분포를 나타내며 외벽면 쪽으로 갈수록 낮은 속도분포를 나타낸다.  $\phi = 45^\circ$  이후의 곡관 후반부로 갈수록 내, 외벽 사이의 압력차로 인하여 최대속도를 나타내는 등속도선이 외벽쪽으로 이동하는 것을 볼 수 있다.

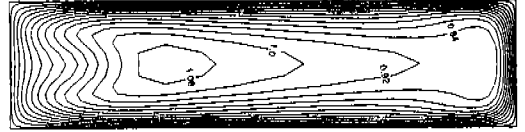
$\phi = 45^\circ$ 에서 나타나는 내벽의 상하 모퉁이 부분으로 등속도선이 기울어지는 현상은 2차 유동이 이부분에서 회전하기 때문으로 생각되어지며,  $\phi = 75^\circ$ 에서 최고 등속도선이 유로내부로 이동하며 고립되는 현상은 2차유동으로 인한 와류의 발생때문으로 생각되어진다.

Fig.6에는 곡관의 내벽과 외벽의 압력계수( $C_p$ ) 값을 나타낸 것이다. 본 연구에서  $C_p$ 는  $C_p = (p - p_0) / \frac{1}{2} \rho Q^2$ 으로 정의되며, 이때 하첨자 0는  $\phi = 0^\circ$ 인 단면 중심에서의 값을 나타낸다. 그림에서 보듯이 내벽면쪽에는 상대적으로 빠른 유속으로 인하여 급격한 압력강하가 존재하며 외벽면에서는  $\phi = 20^\circ$ 까지 극부적으로 압력이 상승함을 볼 수 있다. 이러한 내외벽면간의 압력차이는 곡관 내에서 2차유동을 형성시킨다.

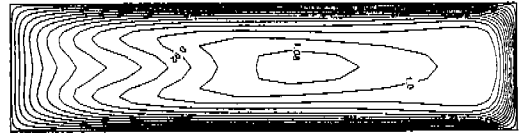
Fig.7에서는 관의 중심유동선을 따라 압력계수값을 각각의 난류모델에 대하여 계산하여 실험치<sup>6)</sup>와 비교한 것이다. 계산 결과 확장 k-ε모델이 정량적으로 상당히 개선된 결과를 보여주고



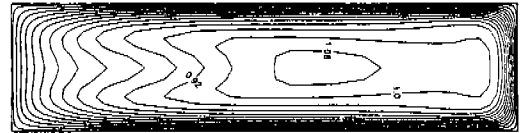
(a)  $\phi = 11.25^\circ$



(b)  $\phi = 45^\circ$



(c)  $\phi = 75^\circ$



(d)  $\phi = 85^\circ$

Fig.5 Contours of  $U_x/Q$

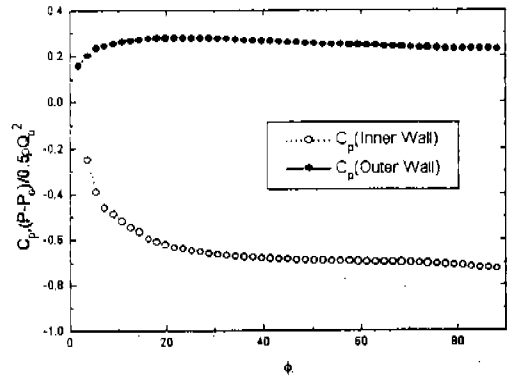


Fig.6 Distribution of computed Pressure Coefficients

있음을 알 수 있고 이에 비해 표준 k-ε 모델은 압력계수값을 과소평가하고 있음을 알 수 있다.

Fig.8, 9에 곡관 표면의 압력분포를 확장 k-ε 모델을 사용한 계산결과와 실험치를 비교하여 나타내었다. 그림에서 보듯이 직관부에서 곡관부로의 입구부분인  $\phi=0^\circ \sim 22.5^\circ$ 의 범위에서는 유동이 관의 내벽면에서의 급속한 가속 및 외벽면에서의 감속으로 인하여 내벽면으로부터 외벽면으로의 거리와  $\phi$ 에 따른 압력변동이 존재하나  $\phi=33.75^\circ$  이하의 하류에서는 반경방향의 압력변동이 크지 않음을 볼 수 있다. 여기서 하첨자 c1은 중앙선을 의미한다.

$y=152\text{mm}$ 의 곡관의 중앙단면에서의 무차원

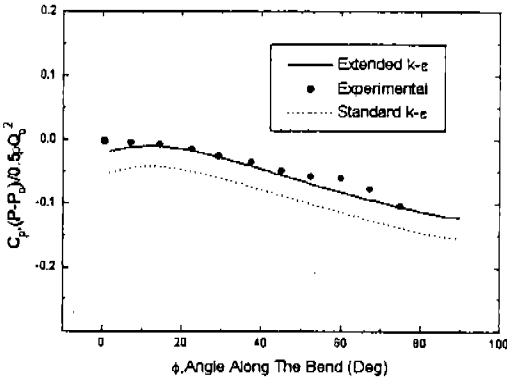


Fig.7 Comparison of computed Pressure coefficients along centerline of duct

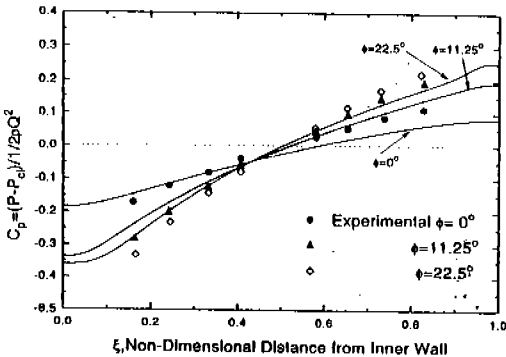


Fig.8 Comparison of Calculated & Experimental Static Pressure Distribution on Inner wall

난류운동에너지 ( $K.E = \frac{\sqrt{K \times 100}}{U_m}$ )의 분포경향을 Fig.10에 나타내었다. 난류운동에너지의 분포경향은 일반적으로 외, 내벽곡률부분에 유동의 불안정으로 인하여 강한 난류운동에너지가 분포되어 있다.

같은 단면에서의 무차원 주유동방향속도 ( $U/U_m$ )의 등속도선도를 Fig.11에 표시하였다. 곡관부의 유입부분에서 내벽에서 급격한 가속이 존재하며 외벽쪽은 감속됨을 볼 수 있고 최고 속도는  $\phi$ 가 증가할수록 점차 내벽쪽에서 외벽쪽으로 이동하고 있다.

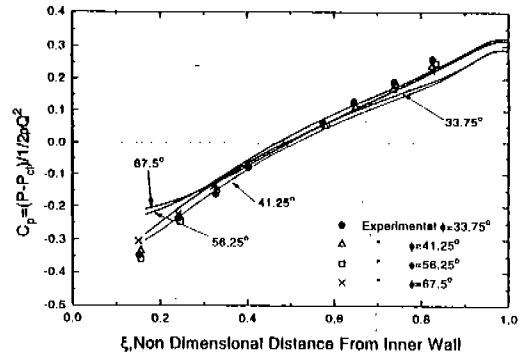


Fig.9 Comparison of Experimental & Calculated Static Pressure Distribution on Inner wall

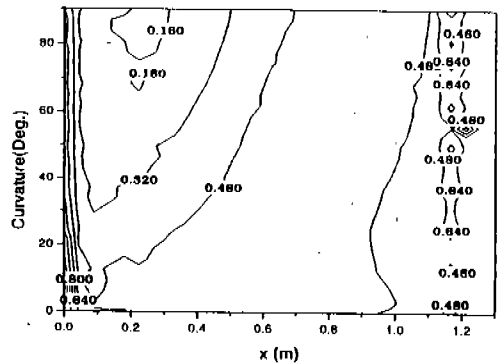


Fig.10 Turbulent K.E Contours ( $y=152\text{mm}$ )

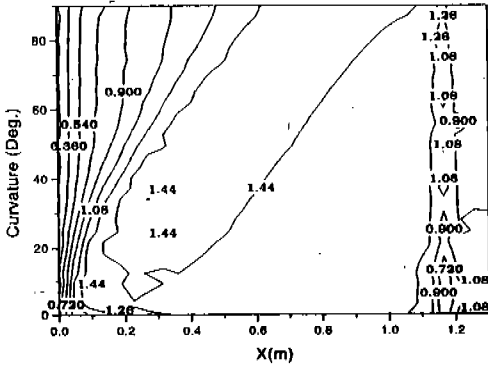


Fig.11 Velocity( $U_v/U_m$ ) Contours( $y=152\text{mm}$ )

#### 4. 결 론

Chen & Kim이 개발한 확장  $k-\epsilon$ 모델에 곡률에 의한 변형을 효과를 고려한 수정된 확장  $k-\epsilon$ 모델을  $90^\circ$  곡관 내의 난류유동장 해석에 적용하여 계산결과를 표준  $k-\epsilon$ 모델 및 실험값과 비교한 결과 기존  $k-\epsilon$ 모델에 비하여 주유동방향 속도분포 및 압력계수값에 대해서 정량적, 정성적으로 개선된 결과를 얻을 수 있었다. 이러한 개선된 결과는 수정된 확장  $k-\epsilon$ 모델의 에너지 소산률 방정식이 유선곡률에 의한 난류 운동에너지의 생성률과 소멸률 사이의 비평형 효과를 효과적으로 표현하여주고, 소산률 방정식에 포함된 2개의 시간 스케일에 의해서 표준  $k-\epsilon$ 모델보다 효율적인 에너지 폭포(Energy cascade)현상을 표현할 수 있기 때문이다. 그러므로 평균 전단응력이 강한 유동에서 두드러지게 나타나는 표준  $k-\epsilon$ 모델의 난류에너지 소산률에 대한 생성률을 실제보다 과소평가 함에 기인하는 난류 운동에너지의 과대평가(overshoot)를 억제할 수 있는 능력을 지니고 있다.

향후 본 논문에서 사용된 확장  $k-\epsilon$ 모델을 급격한 곡률을 지니는 복잡한 유동해석에 적용한다면 보다 개선된 유동해석 결과를 얻을 수 있을 것이다.

#### 참 고 문 헌

ematical Models of Turbulence”, Academic Press, London, 1972.

2. B. E. Launder, C. H. Priddin, B. I. Sharma “The Calculation of Turbulent Boundary Layers on Spinning and Curved Surfaces”, Trans. ASME, J. Fluids Eng., Vol. 99, pp. 231~239, 1977.
3. Leschziner, M. A. and Rodi, W. “Calculation of Annular and Twin Parallel Jets Using various Discretization Schemes and Turbulence Model Variation”, Trans. ASME, J. Fluids Eng., Vol. 109, pp. 352~360, 1981.
4. Hanjalic, K., Launder, B. E. “Sensitizing of Dissipation Equation to Irrotational Strains”, Trans. ASME, Vol. 102, pp. 34~40, 1980.
5. Chen, Y. S., Kim, S. W., “Computation of Turbulent Flows Using an Extended  $k-\epsilon$  Turbulence Closer Model”, NASA CR-179204, 1987.
6. J. H. G. Howard, U. S. Prapat, D. B. Spalding, “Measurement of the turbulent Flow in a Rectangular Curved Duct”, Imperial College Mechanical Engineering Department, Report HTS/75/18, 1975.
7. 명현국, 한화택, 백인철, “수정난류모델에 의한 후향계단 유동예측”, 대한기계학회 논문집, 제18권, 11호, pp. 3039~3045, 1994.
8. Patankar, S. V., “Numerical Heat Transfer and Fluid Flow”, Hemisphere, Washington, DC, pp. 126~129, 1980.
9. V. S. Prapat, D. B. Spalding, “Numerical Computations of the Flow in Curved Ducts”, The Aeronautical Quarterly, Vol. 26, pp. 219~228, 1975.
10. P. Tekriwal, “Heat Transfer Predictions with Extended  $k-\epsilon$  Turbulence Model in Radial Cooling Ducts Rotating in Orthogonal Mode”, Journal of Heat Transfer, Vol. 116, pp. 369~380, 1994.