

단일 신호에 대한 창 함수의 잡음 제거 성능 평가

백문열*, 김병삼**

Performance Estimation of the Noise Reduction by Window Function on a Single Tone

Moon-Yeol Baek *, Byoung-Sam Kim**

ABSTRACT

Windowing routines have as their purpose the reduction of the sidelobes of a spectral output of the FFT or DFT routines. Windowing routines accomplish this by forcing the beginning and end of any sequence to approach each other in value. Since they must work with any sequence they force the beginning and ending samples near zero. To make up for this reduction in power, windowing routines give extra weight to the values near the middle of the sequence. The difference between windows is the way in which they transition from the low weights near the edges to the higher weights near the middle of the sequence. Signal-to-noise ratio(SNR) can be determined by the ratio of the output noisy signal variance to the input noisy signal variance of a window. Standard deviation of noise is reduced by windowing. Thus, the windowing operation improved the SNR of the noisy signal. This paper shows a performance estimation of windowing on a single tone with added Gaussian noise and uniform noise.

Key Words : Gaussian Noise(가우스 잡음), Signal Processing(신호처리), Signal-to-Noise Ratio(신호대 잡음비), Standard Deviation(표준편차), Uniform Noise(균일 잡음), Variance(분산), Window Function(창 함수)

기호설명		
N	표본의 총수	$x_1(t)$ 시계열 신호와 가우스 잡음의 합성 신호
n	표본의 번호	$x_2(t)$ 시계열 신호와 균일 잡음의 합성 신호
$n_1(t)$	가우스 잡음의 시계열 신호	σ^2 분산
$n_2(t)$	균일 잡음의 시계열 신호	σ 표준편차
\bar{x}	신호 x 의 평균값	σ_s^2 순음의 분산
x_i	신호의 i 번째 시계열 신호	σ_s 순음의 표준편차
$x(t)$	순음의 시계열 신호	σ_n^2 잡음의 분산
		σ_n 잡음의 표준편차

* 순천공업전문대학 자동차과
 ** 순천공업전문대학 환경공업과

1. 서 론

신호 처리를 위한 기본적인 전처리 가운데 하나는 신호에 섞여 있는 잡음의 효과적인 제거이다. 신호 속의 잡음을 제거하기 위해 사용되는 필터는 크게 유한 임펄스응답(finite impulse response : FIR) 필터와 무한 임펄스응답(infinite impulse response : IIR) 필터로 분류할 수 있다. 이 가운데 유한 임펄스응답 필터는 푸리에급수(Fourier series)의 수렴에 따라 통과대역과 저지대역의 경계에서 기브스현상(Gibbs' phenomenon)으로 인한 불연속적인 맥동이 발생하는 단점을 갖고 있다. 유한 임펄스응답 필터의 일종인 창함수 기법은 푸리에급수 전개법으로 설계된 필터의 임펄스응답을 미리 조정하여 기브스 진동을 억제하는 역할을 하며, 방법상으로 계산이 용이하고 시간적으로 경제적인 점 등으로 인해 많이 채용되고 있다.⁽¹⁾

기존의 연구 결과로서 신호의 잡음 제거를 위해 사용할 수 있는 많은 종류의 창함수가 존재한다. 개별 개발자에 의해 삼각 창함수(triangular window function)를 필두로 십 수종 이상의 창함수가 실용화되어 있으며, 주파수 분석기등의 일부 계측기에 선택 항목으로 설정되어 있다.

이러한 모든 창함수의 목적은 고속 푸리에 변환(fast Fourier transformation)이나 이산 푸리에 변환(discrete Fourier transformation)에 의한 스펙트럼 출력의 측봉(sidelobe)을 줄이는 것이다. 각 창함수의 차이점은 신호 수열(sequence)의 양 끝에 가까운 낮은 가중치로부터 중앙 근처의 높은 가중치로 천이해 가는 방식에 있다.⁽⁴⁾

여러 개발자들에 의해 독자적으로 만들어진 창함수들로 인해 시간 영역의 신호를 주파수 영역으로 변환하기 위해 선택할 수 있는 창함수의 폭은 넓어졌다. 하지만, 어떤 창함수가 주어진 신호에 가장 적절한 창함수인지의 여부는 반복 시행착오법에 의해 결정되어 왔다. 창함수의 성능은 측봉의 최대치, 주봉(mainlobe)의 폭과 등가잡음폭(equivalent noise band width) 등에 의해서 평가되어 왔다.⁽³⁾ 그러나, 각 창함수는 평가 항목에 있어서 장단점을 가지고 있어서, 개별 신호에 어떤 창함수를 쓰는 것이 타당하며, 효과적이지에 대해서는 알려진 바가 없다. 일반적으로 진동과 소음 신호에는 해닝 창함수(Hanning window function)와 해밍 창함수(Hamming window function)를 사용하여 왔으며, 이들 두 창함수는 평가항

목 전부에 걸쳐 고른 성능을 나타내는 특성을 지니고 있을 뿐 특별하게 선정 이유에 대한 선행 연구가 없었던 것이 사실이다.

따라서, 본 연구에서는 신호처리기법을 통해서, 신호를 각각의 창함수를 통과시켜 어떤 창함수를 선택하는 것이 관심 신호의 신호대 잡음비(signal-to-noise ratio : SNR)를 개선할 수 있는지의 여부를 평가하고, 이를 창함수를 선택하는 해석적 방법으로 제시하고자 한다.

2. 창함수와 신호대 잡음비에 관한 이론적 배경

본 연구에서는 성능 평가의 대상으로 삼각, 해닝, 해밍, 블랙만 창함수(Blackman window function) 그리고 블랙만-해리스 창함수(Blackman-Harris window function)를 선정하였다. 해닝과 해밍 창함수는 소음 및 진동 신호의 처리에 가장 많이 이용되는 창함수 기법이며, 블랙만-해리스 창함수는 현재까지 알려져 있는 창함수 중 주봉과 측봉의 차이가 최대인 창함수 기법이다.

시간 영역의 창함수를 Table 1에 나타내었다.

Table 1 Common Data Window Formulas Time Domain Representation

Type	Window Function $w(n)$	Range of n
Triangular or Bartlett	$1 - \frac{ n }{M}$	$-M \leq n \leq M$ ($n = 2M + 1$ point)
Hanning	$w(n) = \frac{1}{2} (1 - \cos \frac{2\pi n}{N})$	$-\frac{N-1}{2} \leq n \leq \frac{N-1}{2}$
Hamming	$w(n) = 0.54 - 0.46 \cos \frac{2\pi n}{N}$	$-\frac{N-1}{2} \leq n \leq \frac{N-1}{2}$
Blackman	$w(n) = 0.42 - 0.5 \cos \frac{2\pi n}{N} + 0.08 \cos \frac{4\pi n}{N}$	$-\frac{N-1}{2} \leq n \leq \frac{N-1}{2}$
Blackman-Harris	$w(n) = 0.35857 - 0.48829 \cos \frac{2\pi n}{N} + 0.14128 \cos \frac{4\pi n}{N} - 0.01168 \cos \frac{6\pi n}{N}$	$-\frac{N-1}{2} \leq n \leq \frac{N-1}{2}$

Table 1에 나타난 창함수를 주파수 영역으로 변환하면 Table 2와 같다.

Table 2 Common Data Window Formulas Transform Domain Representation

Type	Window Function $W(e^{j\omega})$
Triangular or Bartlett	$S^2(\omega)$
Hanning	$0.5S(\omega) + 0.25S(\omega - \frac{2\pi}{N}) + 0.25S(\omega + \frac{2\pi}{N})$
Hamming	$0.54S(\omega) + 0.23S(\omega - \frac{2\pi}{N}) + 0.23S(\omega + \frac{2\pi}{N})$
Blackman	$0.42S(\omega) + 0.25S(\omega - \frac{2\pi}{N}) + 0.25S(\omega + \frac{2\pi}{N}) + 0.045S(\omega - \frac{4\pi}{N}) + 0.045S(\omega + \frac{4\pi}{N})$
Blackman-Harris	$0.35857S(\omega) + 0.244455S(\omega - \frac{2\pi}{N}) + 0.244455S(\omega + \frac{2\pi}{N}) + 0.070645S(\omega - \frac{4\pi}{N}) + 0.070645S(\omega + \frac{4\pi}{N}) - 0.05945S(\omega - \frac{6\pi}{N}) + 0.05945S(\omega + \frac{6\pi}{N})$

각각의 창함수에 대한 성능 지표는 아래와 같이 알려져 있다^(3,4).

Table 3 Windows and Figures of Merit

Merit	Highest Side-lobe Level (dB)	Side-lobe falloff (dB/octave)	Equivalent noise band width (bins)
Weighting			
Triangle	-27	-12	1.33
Hanning	-23	-12	1.23
Hanning	-43	-6	1.36
Blackman	-58	-18	1.73
Blackman-Harris	-92	-6	2.00

한편, 신호 $x(n)$ 의 기대치 $E[x(n)]$ 는

$$E[x(n)] = \bar{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n). \quad (1)$$

이며, 신호 $x(n)$ 의 분산(variance) σ^2 은 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \text{Var}\{x(n)\} \\ &= E[(x(n) - E[x(n)])^2]. \end{aligned} \quad (2)$$

식 (1)에 의해 식 (2)를 다시 쓰면

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} \{x(n) - \bar{x}(n)\}^2}{N}. \quad (3)$$

이고, 분산은 신호에 대한 평균제곱치(mean square value)이며 편차제곱의 평균으로 산포도를 나타내는 통계량이다.

식 (3)에 의해 표준편차(standard deviation) σ 를 구하면

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^{N-1} \{x(n) - \bar{x}(n)\}^2}{N}}. \quad (4)$$

이고, 표준편차는 신호에 대한 실효치(root mean square : RMS)이다.

신호에 대한 표준편차와 분산을 σ_s 와 σ_s^2 이라 하고, 잡음의 표준편차와 분산을 σ_n 과 σ_n^2 이라고 하면, 선형 신호대 잡음비는 신호와 잡음의 표준편차에 의해 식 (5)와 같이 나타낼 수 있다. 이 식 (5)를 신호와 잡음의 분산에 의해 대수 형식으로 바꾸어 쓴 것이 식 (6)이다.

$$\text{SNR} = \frac{\sigma_s}{\sigma_n}. \quad (5)$$

$$\text{SNR} = 10 \log_{10} \frac{\sigma_s^2}{\sigma_n^2}. \quad (6)$$

3. 창함수의 잡음제거 성능 평가를 위한 시뮬레이션

모의실험을 위해 사용된 신호는 주파수 성분 50Hz를 갖는 시간영역의 신호이다. 이 모의 실험 신호에 창함수의 성능을 알아보기 위하여 가우스 잡음과 균일 잡음을 부가하였다. 모의 실험의 신호는 아래의 수식과 같으며, 여기서 $n_1(t)$ 는 가우스 잡음(Gaussian noise), $n_2(t)$ 는 균일 잡음(uniform noise)이다.

$$x(t) = \sin(2\pi \times 50t), \quad (7)$$

$$x_1(t) = \sin(2\pi \times 50t) + n_1(t), \quad (8)$$

$$x_2(t) = \sin(2\pi \times 50t) + n_2(t). \quad (9)$$

신호와 각 잡음은 나이퀴스트 표본화 정리에 준하여 데이터 256개, 표본화 시간 0.005초, 최대주파수 100Hz로 하였다. 신호와 잡음을 발생시키고 이 둘을 합성하여 표본화 정리에 대해 검토한 순서도가 Fig. 1이다. 또한 전체 모의 실험을 위한 블록 선도를 Fig. 2에 나타내었다.

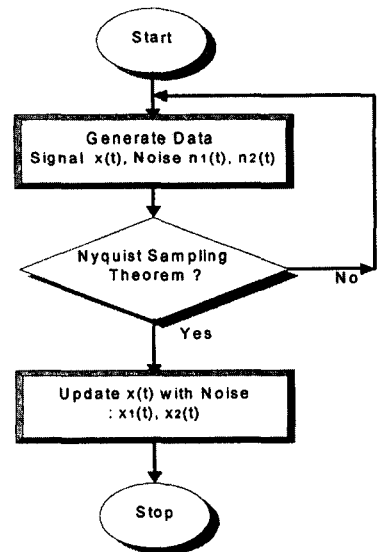


Fig. 1 Flowchart of the Signal Generation Process

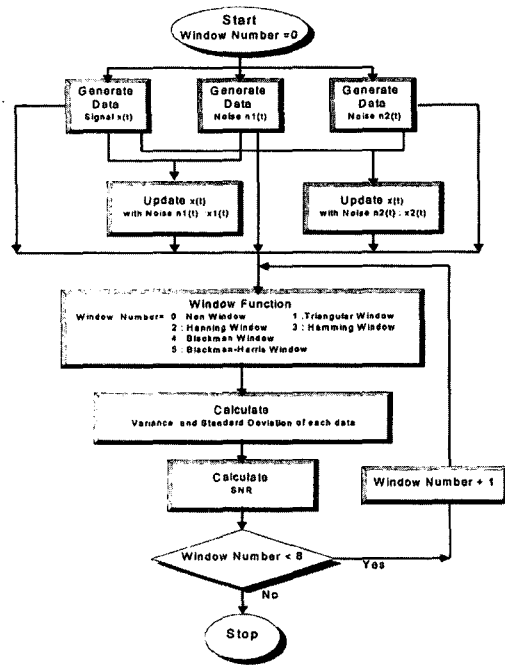


Fig. 2 Flowchart for SNR Calculation at each Window Function

본 연구에서는 신호대 잡음비 값을 확인하여 각 창함수의 잡음 제거 성능을 평가하고자 하는 목적으로 원래의 신호에 합성할 각 잡음 신호를 만들기 위해서 컴퓨터의 난수 발생기능을 이용하였으며, 발생된 난수에 0.2를 곱하여 잡음 신호를 생성하였다. Table 3에서 보는 바와 같이 가우스 잡음의 경우 0.2에 근접하는 표준편차를 보이고 있어서 잡음의 생성이 잘되었음을 확인할 수 있었다.

4. 결과 및 고찰

원래의 신호 $x(t)$, 가우스 잡음 $n_1(t)$ 그리고 균일 잡음 $n_2(t)$ 를 Fig. 3에 나타내었다.

신호와 가우스 잡음 그리고 균일 잡음에 대한 표준편차와 분산의 값을 창함수 통과 전후에 대하여 Table 4에 나타내었다.

창함수를 통과시키지 않은 원래 신호의 표준편차와 분산은 0.70849와 0.50196이다. 이 값이 본 연구에서 대상 창함수로 선정된 삼각, 해닝, 해밍, 블랙만, 블랙만-해리스 창함수를 통과하고 난 후 계속적으로 줄어들음을 알 수 있다. 각각의 경우를 Fig. 3에 나타내었다.

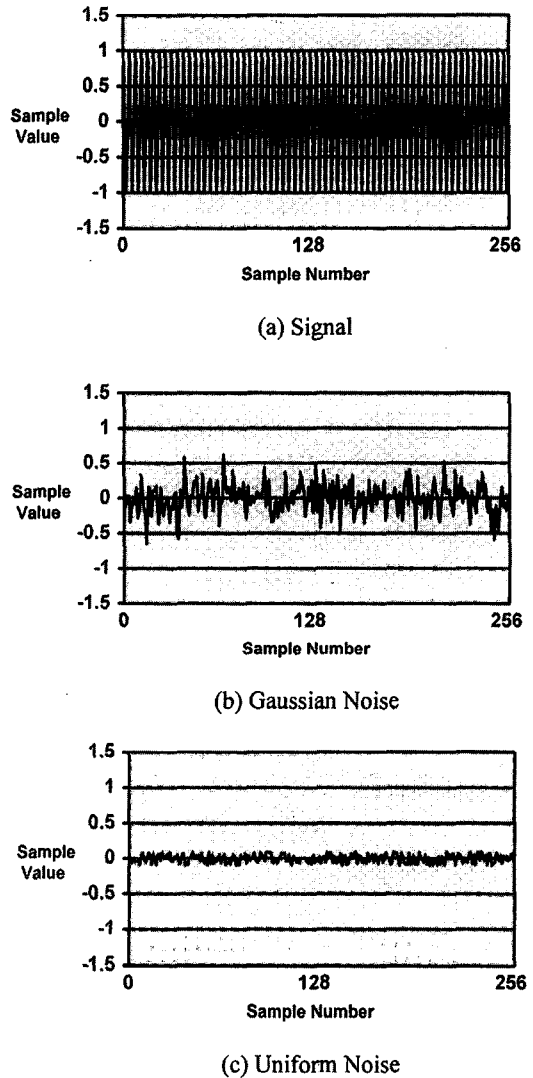


Fig. 3 Signal and Noises

Table 4 Variance and Standard Deviation of Signal and Noise

Signal Type	Item	σ			σ^2		
		Signal	Gaussian Noise	Uniform Noise	Signal	Gaussian Noise	Uniform Noise
Original		0.70849	0.21253	0.05911	0.50196	0.04517	0.00349
After Triangular Window		0.40825	0.11942	0.03311	0.16666	0.01426	0.00110
After Hanning Window		0.43301	0.12457	0.03504	0.18750	0.01532	0.00123
After Hamming Window		0.44577	0.12851	0.03619	0.19871	0.01651	0.00131
After Blackman Window		0.39026	0.11323	0.03122	0.15230	0.01282	0.00097
After Blackman-Harris Window		0.35984	0.10575	0.02854	0.12949	0.01118	0.00081

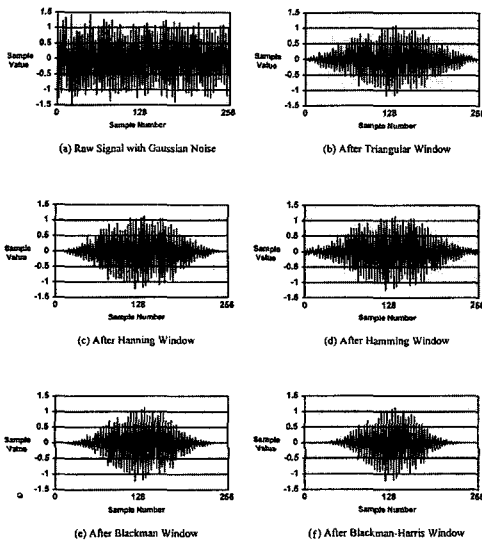


Fig. 4 Signal with Gaussian Noise Samples

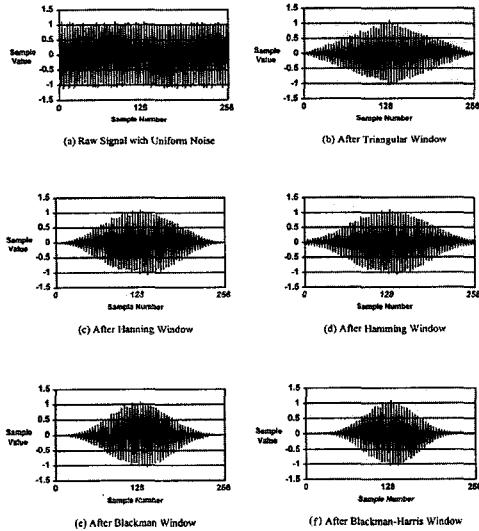


Fig. 5 Signal with Uniform Noise Samples

Fig. 4와 Fig. 5는 원래의 신호 $x(t)$ 에 각각 가우스 잡음과 균일 잡음을 추가한 $x_1(t)$, $x_2(t)$ 와 각 창 함수를 통과한 이후의 신호이다. 여기서도 역시 창 함수 통과 전과 후의 분산 및 표준편차의 값을 Table 5에 나타내었다. 각각의 경우에 있어서 원래의 신호에 잡음 성분이 추가되었기 때문에 표준편차와 분산이 모두 증가하였음을 알 수 있다.

Table 5 Variance and Standard Deviation Signal with Noise

Signal Type	σ		σ^2	
	Signal with Gaussian Noise	Signal with Uniform Noise	Signal with Gaussian Noise	Signal with Uniform Noise
Original	0.73328	0.71318	0.53770	0.50862
After Triangular Window	0.42357	0.41110	0.17941	0.16900
After Hanning Window	0.44985	0.43611	0.20237	0.19019
After Hamming Window	0.46313	0.44900	0.21449	0.20160
After Blackman Window	0.40421	0.39267	0.16338	0.15419
After Blackman-Harris Window	0.37153	0.36175	0.13804	0.13086

Table 6은 $x_1(t)$ 와 $x_2(t)$ 에 대해서 신호대 잡음비를 구한 것이다. 이때의 결과를 그림으로 나타낸 것이 Fig. 8이다. 원래 신호에 가우스 잡음을 추가하였을 때의 신호대 잡음비는 3.33363(24.08126 dB)이었다. 이 신호대 잡음비 값이 창 함수를 통과하였을 경우 모두 증가하였는데, 이 중에서도 해닝 창 함수를 통과시켰을 경우 3.47599(24.91759 dB)로 가장 크게 나타났다. 이때 신호대 잡음비 값이 선형적으로는 0.14236, 대수적으로는 0.83633 dB가 증가하였다.

Table 6 Signal to Noise Ratio between Signal and Noise

Signal Type	$SNR = \frac{\sigma_s}{\sigma_n}$		$SNR = 10 \log_{10} \frac{\sigma_s^2}{\sigma_n^2} [dB]$	
	Signal with Gaussian Noise	Signal with Uniform Noise	Signal with Gaussian Noise	Signal with Uniform Noise
Original	3.33363	11.98675	24.08126	49.67603
After Triangular Window	3.41865	12.33174	24.58494	50.24353
After Hanning Window	3.47599	12.35832	24.91759	50.28659
After Hamming Window	3.46890	12.31761	24.87673	50.22060
After Blackman Window	3.44668	12.50004	24.74825	50.51463
After Blackman-Harris Window	3.40288	12.60634	24.49247	50.68400

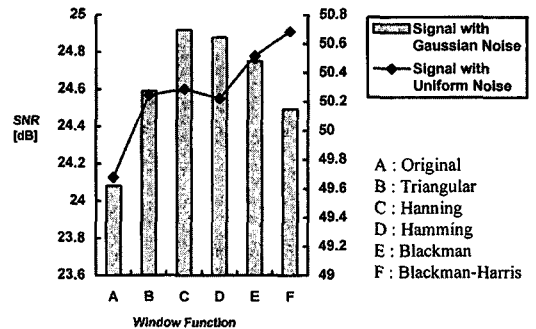


Fig. 6 Comparison of SNR between Signal with Gaussian Noise and Signal with Uniform Noise

원래 신호에 균일 잡음을 추가하였을 때의 신호대 잡음비는 11.98675(49.67603 dB)였다. 균일 잡음을 추가한 신호를 창함수를 통과하였을 때에도 모든 경우에서 신호대 잡음비 값이 증가하는 것을 볼 수 있었으며, 블랙만-해리스 창함수를 통과시켰을 경우 12.60634(50.68400 dB)로 신호대 잡음비 값이 가장 크게 나타났다. 이때 신호대 잡음비 값이 선형적으로는 0.61959, 대수적으로는 1.00797 dB가 늘었다.

5. 결론

창함수의 잡음 제거 성능을 평가하기 위한 컴퓨터 시뮬레이션을 통하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

1. 신호에 가우스 잡음이 합성된 경우 해닝 창함수를 통과시켰을 때의 신호대 잡음비 값이 가장 크게 나타났다.
2. 신호에 균일 잡음이 합성된 경우 블랙만-해리스 창함수를 통과시켰을 때의 신호대 잡음비가 가장 크게 나타났다.
3. 창함수를 통과시키기 전과 후의 신호대 잡음비를 계산하여 특정 창함수의 잡음 제거 필터로서의 성능을 확인할 수 있었다.
4. 이상과 같은 결론을 통해, 본 연구에서 제시한 신호대 잡음비 값에 의한 창함수의 성능 평가가 창함수를 선택하는 하나의 해석적인 방법을 사용될 수 있는 가능성을 확인하였다.

본 연구에서는 단일 신호에 대한 창함수의 잡음제거 성능을 살펴보았다. 하지만, 실제계에 있어서는 단일 신호만으로 의미를 갖는 경우보다는 입출력 관계를 이루는 신호에 대한 해석이 대부분이다. 향후 입력과 출력의 관계를 갖는 신호에 있어서는 창함수에 의한 효과와 이에 따

른 각종 창함수 기법의 성능을 평가할 수 있는 연구가 뒤따라야 할 것이다.

참고문헌

1. 이종각, 신호 및 시스템의 기초, 문운당, 1986, pp.285~298.
2. C. S. Burrus, J. H. McClellan, A.V. Oppenheim, Computer Based Exercises for Signal Processing Using MATLAB, Prentice Hall, 1994, pp.84~92.
3. D. F. Elliott, Handbook of Digital Signal Processing(Engineering Application), Academic Press, 1988, pp.253~286.
4. P. M. Embree, B. Kimble, C Language Algorithms for Digital Signal Processing, Prentice Hall, 1991, pp.257~262.
5. E. C. Ifeachor, Barrie. W. Jervis, Digital Signal Processing, Addison Wesley, 1993, pp.288~303.
6. B. P. Lathi, Linear Systems and Signals, Berkeley-Cambridge Press, 1992, pp.518~522.
7. C. L. Nikias, High Order Spectra Analysis, Prentice Hall, 1993, pp.126~132.
8. R. B. Randall, Frequency Analysis, B&K, 1987, p.232.
9. S. D. Stearns, R. A. David, Signal Processing Algorithms, Prentice Hall, 1988, pp.165~168.
10. R. D. Strum, Donald E. Kirk, Contemporary Linear System, PWS, 1994, pp.524~529.