論文 한국정밀공학회지 제13권 제5호 (1996년 5월)
Journal of the Korean Society of Precision Engineering Vol. 13. No.5. May. 1996.

GPC기법을 이용한 자기동조 PID제어기 설계

윤 강 섭*, 이 만 형**

Design of Self-Tuning PID Controller Using GPC Method

K. S. Yoon*, M. H. Lee**

ABSTRACT

PID control has been widely used for real control systems. Particularly, there are many researches on control schemes of tuning PID gains. However, to the best of our knowledge, there is no result for discrete-time systems with unknown time-delay and unknown system parameters. On the other hand, Generalized predictive control has been reported as a useful self-tuning control technique for systems with unknown time-delay. So, in this study, based on minimization of a GPC criterion, we present a self-tuning PID control algorithm for unknown parameters and unknown time-delay system. A numerical simulation was presented to illustrate the effectiveness of this method.

Key Words : Velocity-type PID Control (속도형 PID제어), Generalized Predictive Control (GPC, 일반형예측제어), Self-tuning Control (자기동조제어), Self-tuning PID Control (자기동조 PID 제어)

1. 서 론

PID 제어기는 다른 제어기에 비해 제어기의 구조가 간단하고 제어파라메터의 물리적인 의미를 이해하기 쉽다는 장점을 가지고 있으며, 현재도 산업현장에서는 많이 이용되고 있다. 그리고, PID 제어기의 이득선정을 위한 자동조정(auto-tuning)기법에 관한 많은 연구가 있었다[1-3]. 또한, 미지의 파라메터를 가진 시스템에 적용할 수 있는 자기동조(self-tuning) PID 제어에 관한 많은 연구가 있었다[4-6]. 이러한 자기동조 PID 제어방법은 시스템의 정보가 불충분하거나 시스템의 파라메터가 변화하는 경우에 대해서 적응할 수 있도록, 시스템의 파라메터를 추정하여 이를 근거로 제어기의 이득을 변화시키는 기법이다.

그러나, 이러한 자기동조 PID 제어기는 시스템의 정보, 특히 시스템의 차수, 시간지연에 대한 정보가 부정확한 경우에는 문제점이 발생한다. 그래서 자기동조제어 중에서, 미지의 시스템 차수나 시간지연을 가진 시스템에 대해서도 유용한 것으로 알려진 GPC(Generalized Predictive Control) 기법[7-11]을 이용하여 PID 제어기의 이득을 선정하는, 자기동조 PID 제어기를 구성해 보

* 부산대학교 대학원 정밀기계공학과
** 정회원, 부산대학교 제어기계공학과, 기계기술연구소, NSDM-ERC

고자 한다.

미지의 시간지연을 가진 시스템에 대해서 GPC기법을 PID 이득선정에 이용하기 위해서, 우선 속도형 PID 제어칙과 GPC 가격함수의 최소화에 근거한 제어칙을 구하고, GPC구조가 특별한 경우에 속도형 PID 제어구조와 등가된다는 성질을 이용하여 PID 이득 선정방법을 제안하고, 자기동조제어 구조에 적용함으로써 자기동조 PID 제어기를 구성하였다. 그리고 지연시간, 차수, 파라메터가 변하는 플랜트와 지연시간이 변하는 비최소위상 플랜트에 대한 시뮬레이션을 통해서 제안된 제어방법의 효용성을 보였다.

2. 자기동조 PID 제어기

제어대상 플랜트로 ARIMA(Auto-Regressive and Integrated Moving-Average)모델의 단일입출력 시스템을 고려하자.

$$A\left(z^{-1}\right)y(k)=B\left(z^{-1}\right)u(k-1)+\frac{\xi(k)}{\Delta} \tag{2.1}$$

여기서, $u(k)$는 입력, $y(k)$는 출력이고, $A\left(z^{-1}\right)$와 $B\left(z^{-1}\right)$는 backward shift operator z^{-1}의 다항식으로

$$A\left(z^{-1}\right)=1+a_1z^{-1}+\cdots a_{na}z^{-na}, B\left(z^{-1}\right)=b_0+b_1z^{-1}+\cdots+b_{nb}z^{-nb}$$

로 표현되고, △는 후향차분자(backward differencing operator, $\Delta=1-z^{-1}$ 이고, $\xi(k)$는 외란으로 백색 가우시안 프로세스이다. 만일 플랜트가 시간지연을 가진다면 $B\left(z^{-1}\right)$의 첫번째 요소는 0 이다. 시스템의 시간지연 d은 미지이고 $0\le d\le nb$에 존재한다고 가정한다. 그리고, 기준입력 $\{r(k)\}$는 계단입력으로 주어진다고 가정하자. 플랜트 모델을 ARIMA 모델로 선택한 이유는 내부적으로 적분동작을 가진 제어기를 유도하기 위해서이다.

2.1 속도형 PID 제어칙

연속시간에서 표준형 PID제어의 관계식은 다음과 같다.

$$u(t)=K\left[e(t)+\frac{1}{T}\int_0^t e(\tau)d\tau+T_d\frac{de(t)}{dt}\right] \tag{2.2}$$

여기서, e(t)는 오차신호로서 e(t) = r(t)-y(t)이고, r(t)는 기준입력, y(t)는 시스템의 출력이다.

이산시간에서의 속도형 PID로 나타내기 위해서, 식(2.2)를 $t=kT_s$, $t=(k-1)T_s$ 에서 이산시간으로 등가하면,

$$u(k)=K\left\{e(k)+\frac{1}{T_i}\int_0^{kT_s}e(\tau)d\tau+\frac{T_d}{T_s}\left[e(k)-e(k-1)\right]\right\} \tag{2.3}$$

$$u(k-1)=K\left\{e(k-1)+\frac{1}{T_i}\int_0^{(k-1)T_s}e(\tau)d\tau+\frac{T_d}{T_s}\left[e(k-1)-e(k-2)\right]\right\} \tag{2.4}$$

여기서, T_s는 샘플링주기이다. 식(2.3)에서 식(2.4)을 빼면,

$$u(k)-u(k-1)=K\left\{\begin{array}{l}e(k)-e(k-1)+\frac{1}{T_i}\int_{(k-1)T_s}^{kT_s}e(\tau)d\tau\\+\frac{T_d}{T_s}\left[e(k)-2e(k-1)+e(k-2)\right]\end{array}\right\} \tag{2.5}$$

$$\Delta u(k)=K\left\{\Delta e(k)+\frac{T_s}{T_i}e(k)+\frac{T_d}{T_s}\Delta^2e(k)\right\} \tag{2.6}$$

만일 기준입력이 계단입력이라고 가정하면, $\Delta e(k)=-\Delta y(k)$, $\Delta^2e(k)=-\Delta^2y(k)$ 로 둘 수 있으므로, 속도형 PID (I-PD구조)를 나타낼 수 있다.

$$\Delta u(k)=K_Ie(k)-\left\{\Delta K_P+\Delta^2K_D\right\}y(k) \tag{2.7}$$

여기서, $K_P=K$, $K_I=K\frac{T_s}{T_i}$, $K_D=K\frac{T_d}{T_s}$ 이다.

미지의 파라메터와 미지의 시간지연을 가진 시스템에 대해서, GPC기법을 이용하여 PID이득을 선정하기 위해서, 속도형 PID와 관계를 가질 수 있는 GPC 법칙을 유도하자.

2.2 GPC 법칙의 유도

GPC 기법에 사용되는 가격함수는 다음과 같은 형태로 고려하였다.

$$J=E\left\{\sum_{j=N_1}^{N_2}\left[y(k+j)-r(k+j)\right]^2+\sum_{j=1}^{N_2}Q_j\left(z^{-1}\right)\left(\Delta u(k+j-1)\right)^2\right\} \tag{2.8}$$

여기서, $E\{\cdot\}$는 기대값(expectation)이고, N_1은 최소 가격구간(minimum costing horizon), N_2는 최대가격 구간(maximum costing horizon)이고, $Q_j(z^{-1})$는 제어입력 가중요소이다.

또한, 다음과 같은 제어구간(control horizon)[7,14]에 대한 구속조건도 고려하였다.

$$\Delta u(k+j-1)=0\ ,\ j>N_u$$

여기서, N_u는 제어구간(control horizon)이다.

시스템의 지연시간을 모른다는 가정하에 $N_1=1, N_2=M$으로 둔다. 또한, 기준입력이 계단입력이라고 가정하면, 미래의 기준입력이 일정하다고 볼 수 있으므로 r(k+j)=r(k)(j= 1,⋯,M)로 둘 수 있다. 그러면 식(2.8)의 가격함수는 다음과 같다.

$$J=E\left\{\sum_{j=1}^{M}[y(k+j)-r(k)]^2+\sum_{j=1}^{M}Q_j(z^{-1})(\Delta u(k+j-1))^2\right\} \quad (2.9)$$

여기서, M은 예측범위(prediction range)이고, 제어입력 가중요소 $Q_j(z^{-1})$는 다음과 같이 가정한다[13].

$$Q_1(z^{-1})=q_{1,0}+q_{1,1}z^{-1}+\cdots+q_{1,l}z^{-l}$$
$$Q_j(z^{-1})=q_{j,0}\quad (j=2,3,\cdots,M) \quad (2.10)$$

가격함수를 최소화하는 제어입력신호 u(k)를 구하는 절차는 다음과 같다[7].

우선, j-스텝 예측기(j-step ahead predictor) y(k+j)를 유도하기 위해서, 다음의 Diophantine 방정식을 고려하자.

$$1=E_j(z^{-1})\Delta A(z^{-1})+z^{-j}F_j(z^{-1}) \quad (2.11)$$

여기서, $E_j(z^{-1})=1+e_{j,1}z^{-1}+\cdots+e_{j,j-1}z^{-(j-1)}$,
$F_j(z^{-1})=f_{j,0}+f_{j,1}z^{-1}+\cdots+f_{j,na}z^{-na}$ 으로, $A(z^{-1})$와 j에 의해서 유일하게 결정되는 다항식으로, 순환적인 방법으로 구해진다[7].

식(2.1)과 Diophantine 방정식으로 부터 y(k+j)를 구하면 다음과 같다.

$$y(k+j)=E_jB\Delta u(k+j-1)+F_jy(k)+E_j\xi(k+j) \quad (2.12)$$

여기서, 잡음성분은 모두 미래의 성분이므로, 시간 k까지의 측정된 출력과 $u(k+1)$, $i>1$ 가 주어질 때 최적예측기(optimal predictor)는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\hat{y}(k+j|k)=G_j(z^{-1})\Delta u(k+j-1)+F_j(z^{-1})y(k) \quad (2.13)$$

여기서, $G_j=E_jB=g_{j,0}+g_{j,1}z^{-1}+\cdots+g_{j,nb+j-1}z^{-(nb+j-1)}$
$(j=1,2,\cdots,M)$
식(2.13)를 현재시간 k 에서 미지성분과 기지성분 f(k+j)로 분리 표현하면 다음과 같다.

$$\hat{y}(k+j|k)=\left[g_{j,0}+z^{-1}g_{j,1}+\cdots+z^{-(j-1)}g_{j,j-1}\right]\Delta u(k+j-1)+f(k+j) \quad (2.14)$$

여기서, $f(k+j)=\sum_{i=1}^{nb}g_{j,i+j-1}z^{-(i-1)}\Delta u(k-1)+F_j(z^{-1})y(k)$

식(2.14)를, 제어구간에 대한 구속조건을 고려하여, 전체 예측구간 j=1,2,⋯,M에 대해서 벡터식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\underline{\hat{y}}=G\underline{\tilde{u}}+\underline{f} \quad (2.15)$$

여기서,

$$\underline{\hat{y}}=\left[\hat{y}(k+1|k),\hat{y}(k+2|k),\cdots,\hat{y}(k+M|k)\right]^T\ \in\ R^{M\times 1}$$
$$\underline{\tilde{u}}=\left[\Delta u(k),\Delta u(k+1),\cdots,\Delta u(k+N_u-1)\right]^T\ \in\ R^{Nu\times 1}$$
$$\underline{f}=\left[f(k+1),f(k+2),\cdots,f(k+M)\right]^T\ \in\ R^{M\times 1}$$
$$G=\begin{bmatrix} g_0 & 0 & \cdots & 0 \\ g_1 & g_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{N_u-1} & g_{N_u-2} & \cdots & g_0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{M-1} & g_{M-2} & \cdots & g_{M-N_u} \end{bmatrix}\ \in\ R^{M\times N_u}$$

식(2.15)의 벡터식을 이용하여 식(2.9)의 가격함수를 다시 나타내면 다음과 같다.

$$J = E\left[\left(G\underline{\tilde{u}} + \underline{f} - \underline{r}\right)^T\left(G\underline{\tilde{u}} + \underline{f} - \underline{r}\right) + \underline{\tilde{u}}^T Q\left(z^{-1}\right)\underline{\tilde{u}}\right] \quad (2.16)$$

여기서,

$$\underline{r} = \left[r(k), r(k), \cdots, r(k)\right]^T \in R^{M\times 1},$$

$$Q\left(z^{-1}\right) = diag\left\{Q_1\left(z^{-1}\right), Q_2\left(z^{-1}\right), \cdots, Q_j\left(z^{-1}\right)\right\}$$

$$= Q_0 + Q_1 z^{-1} + \cdots + Q_l z^{-1}$$

$$Q_0 = \begin{bmatrix} q_{1,0} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & q_{2,0} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & q_{N_u,0} \end{bmatrix} \in R^{N_u\times N_u},$$

$$Q_j = \begin{bmatrix} q_{j,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \in R^{N_u\times N_u} \quad (j = 1,2,\cdots,l)$$

가격함수를 최소화하는 제어증분벡터 $\underline{\tilde{u}}$ 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\left(G^T G + Q\right)\underline{\tilde{u}} = G^T\left(\underline{r} - \underline{f}\right) \quad (2.17)$$

$$\left(G^T G + Q_0\right)\underline{\tilde{u}} + Q_r\underline{\tilde{u}} = G^T\left(\underline{r} - \underline{f}\right) \quad (2.18)$$

여기서,

$$Q_r = Q_1 z^{-1} + \cdots + Q_l z^{-l} = \begin{bmatrix} q_{r1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \in R^{N_u\times N_u}$$

$$q_{r1,1} = q_{1,1}z^{-1} + q_{1,2}z^{-2} + \cdots + q_{1,l}z^{-l}$$

그리고, 식(2.18)에서 좌변 두번째 항을 R이라 두면 다음과 같다.

$$R = Q_r\underline{\tilde{u}} = \left[\left(q_{1,1}z^{-1} + q_{1,2}z^{-2} + \cdots + q_{1,l}z^{-l}\right)\Delta u(k), 0, \cdots, 0\right]^T$$

$$= \left[\sum_{i=1}^{l} q_{1,i}\Delta u(k-i), 0, \cdots, 0\right]^T \quad (2.19)$$

식(2.19)을 고려하여, 식(2.18)를 다시 정리하면 제어증분벡터 $\underline{\tilde{u}}$ 는 다음과 같다.

$$\underline{\tilde{u}} = \left(G^T G + Q_0\right)^{-1} G^T\left(\underline{r} - \underline{f}\right) - \left(G^T G + Q_0\right)^{-1} R$$

$$= \left(G^T G + Q_0\right)^{-1} G^T\underline{r} - \left(G^T G + Q_0\right)^{-1} G^T\underline{f} - \left(G^T G + Q_0\right)^{-1} R \quad (2.20)$$

제어증분벡터 $\underline{\tilde{u}}$ 의 첫번째 요소는 △u(k)이므로, 현재의 제어입력 u(k)는 다음과 같다.

$$u(k) = u(k-1) + \underline{h}^T G^T\underline{r} - \underline{h}^T G^T\underline{f} - \underline{h}^T R \quad (2.21)$$

여기서, $\underline{h}^T$는 행렬 $\left(G^T G + Q_0\right)^{-1}$ 의 첫번째 행벡터이다. $\underline{h}^T = \left[h_1, h_2, \cdots, h_{N_u}\right]$ 로 두고, 식(2.21)에서 우변의 각 항을 정리하면 다음과 같다.

$$\underline{h}^T G^T\underline{r} = \sum_{j=1}^{N_u}\left\{h_j\sum_{i=1}^{M-j+1} g_{i-1}\right\} r(k) = \sum_{j=1}^{N_u}\left\{h_j\sum_{i=j}^{M} g_{i-j}\right\} r(k) \quad (2.22)$$

$$\underline{h}^T G^T\underline{f} = \sum_{j=1}^{N_u}\left\{h_j\sum_{i=j}^{M} g_{i-j} f(k+i)\right\} \quad (2.23)$$

$$= \sum_{j=1}^{N_u}\left[h_j\sum_{i=j}^{M}\left\{g_{i-j}\sum_{t=1}^{nb}\left(g_{t+i-1}\Delta u(k-t) + F_i\left(z^{-1}\right)y(k)\right)\right\}\right]$$

$$= \sum_{j=1}^{N_u}\left[h_j\sum_{i=j}^{M}\left\{g_{i-j}\sum_{t=1}^{nb} g_{t+i-1}\Delta u(k-t)\right\}\right] + \sum_{j=1}^{N_u}\left[h_j\sum_{i=j}^{M}\left\{g_{i-j}F_i\left(z^{-1}\right)\right\}\right] y(k)$$

$$\underline{h}^T R = h_1\sum_{i=1}^{l} q_{1,i}\Delta u(k-i) \quad (2.24)$$

식(2.22)~(2.24)을 식(2.21)에 대입하면 다음과 같다.

$$u(k) = u(k-1) + \sum_{j=1}^{N_u}\left\{h_j\sum_{i=j}^{M} g_{i-j}\right\} r(k) - \sum_{j=1}^{N_u}\left[h_j\sum_{i=j}^{M}\left\{g_{i-j}\sum_{t=1}^{nb} g_{t+i-1}\Delta u(k-t)\right\}\right]$$

$$- \sum_{j=1}^{N_u}\left[h_j\sum_{i=j}^{M}\left\{g_{i-j}F_i\left(z^{-1}\right)\right\}\right] y(k) - h_1\sum_{i=1}^{l} q_{1,i}\Delta u(k-i) \quad (2.25)$$

2.3 PID제어칙과 GPC법칙의 등가

속도형 PID제어칙과 GPC 가격함수로 부터 유도된 제어칙이 특별한 경우에 등가됨을 보임으로써, GPC기법을 이용한 PID이득 선정 방법을 찾을 수 있다.

속도형 PID제어칙인 식(2.7)을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$u(k)=u(k-1)+K_I r(k) - \left[(K_P+K_I+K_D)-(K_P+2K_D)z^{-1}+K_D z^{-2}\right]y(k) \quad (2.26)$$

GPC법칙인 식(2.25)를 정리하면 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$u(k)=u(k-1)+\sum_{j=1}^{N_u}\left\{h_j\sum_{i=j}^{M}g_{i-j}\right\}r(k)-\sum_{j=1}^{N_u}\left[h_j\sum_{i=j}^{M}\left\{g_{i-j}F_i(z^{-1})\right\}\right]y(k) -\sum_{t=1}^{nb}\left[\sum_{j=1}^{N_u}\left\{h_j\sum_{i=j}^{M}g_{i-j}g_{t+i-1}\right\}\right]\Delta u(k-t)-h_1\sum_{t=1}^{l}q_{1,t}\Delta u(k-t) \quad (2.27)$$

속도형 PID제어칙인 식(2.26)과 GPC법칙인 식(2.27)를 비교해 보면, 식(2.27)에서 우변 4번째항과 5번째항은 식(2.26)에서는 나타나지 않는 △u(k-t), t≥1의 항임을 알 수 있다. 속도형 PID제어칙과 GPC법칙을 등가시키기 위해서, 이 두항의 소거가 필요하다. 그러므로,

$l=nb,\quad q_{1,t}=\dfrac{1}{h_1}\sum_{j=1}^{N_u}h_j\sum_{i=j}^{M}g_{i-j}g_{t+i-1}$ 라고 가정하면,

GPC법칙인 식(2.25)에서 우변 3번째항과 5번째항은 소거되고, GPC법칙인 식(2.27)은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$u(k)=u(k-1)+\sum_{j=1}^{N_u}\left\{h_j\sum_{i=j}^{M}g_{i-j}\right\}r(k)-\sum_{j=1}^{N_u}\left[h_j\sum_{i=j}^{M}\left\{g_{i-j}F_i(z^{-1})\right\}\right]y(k) \quad (2.28)$$

속도형 PID 제어칙 식(2.26)과 GPC법칙인 식(2.28)을 다시 비교해 보면, 두식에서 우변 3번째인 y(k)항이 차수가 동일하게 되면, 속도형 PID 제어칙과 GPC법칙이 등가 됨을 알 수 있다. 식(2.26)의 우변 3번째 y(k)항은 2차이고, 식(2.28)의 우변 3번째 y(k)항의 차수는 $F_i(z^{-1})$의 차수로 결정된다. 그리고, $F_i(z^{-1})$의 차수는 식(2.11)에서와 같이 플랜트 $A(z^{-1})$의 차수와 같은 na차가 된다. 그러므로, 플랜트 $A(z^{-1})$의 차수 na를 2차로 가정하면, $F_j(z^{-1})$는 2차가 되어 두 제어칙은 등가가 가능하고, GPC법칙인 식(2.28)은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$u(k)=u(k-1)+\sum_{j=1}^{N_u}\left\{h_j\sum_{i=j}^{M}g_{i-j}\right\}r(k) -\left[\sum_{j=1}^{N_u}\left\{h_j\sum_{i=j}^{M}g_{i-j}f_{i,0}\right\}+z^{-1}\sum_{j=1}^{N_u}\left\{h_j\sum_{i=j}^{M}g_{i-j}f_{i,1}\right\} +z^{-2}\sum_{j=1}^{N_u}\left\{h_j\sum_{i=j}^{M}g_{i-j}f_{i,2}\right\}\right]y(k) \quad (2.29)$$

속도형 PID 제어칙인 식(2.26)과 GPC 법칙인 식(2.29)의 등가성을 이용하여, 다음과 같은 PID 이득의 관계식을 얻을 수 있다.

$$K_I=\sum_{j=1}^{N_u}\left\{h_j\sum_{i=j}^{M}g_{i-j}\right\},\quad K_P+K_I+K_D=\sum_{j=1}^{N_u}\left\{h_j\sum_{i=j}^{M}g_{i-j}f_{i,0}\right\},$$
$$K_P+2K_D=-\sum_{j=1}^{N_u}\left\{h_j\sum_{i=j}^{M}g_{i-j}f_{i,1}\right\},\quad K_D=\sum_{j=1}^{N_u}\left\{h_j\sum_{i=j}^{M}g_{i-j}f_{i,2}\right\} \quad (2.30)$$

식(2.30)를 정리하면, GPC법칙으로부터 PID 이득을 결정할 수 있는 관계식을 얻을 수 있다.

$$K_P=-\sum_{j=1}^{N_u}\left\{h_j\sum_{i=j}^{M}g_{i-j}\left(f_{i,1}+2f_{i,2}\right)\right\},\quad K_D=\sum_{j=1}^{N_u}\left\{h_j\sum_{i=j}^{M}g_{i-j}f_{i,2}\right\}$$
$$K_I=\sum_{j=1}^{N_u}\left\{h_j\sum_{i=j}^{M}g_{i-j}\left(f_{i,0}+f_{i,1}+f_{i,2}\right)\right\}=\sum_{j=1}^{N_u}\left\{h_j\sum_{i=j}^{M}g_{i-j}\right\} \quad (2.31)$$

식(2.31)과 같이 PID 이득을 결정되면, 식(2.7) 또는 식(2.26)으로 부터 구해지는, 다음과 같은 식을 이용하여 제어입력 u(k)를 계산할 수 있다.

$$u(k)=u(k-1)+K_P\left[y(k-1)-y(k)\right]+K_I\left[r(k)-y(k)\right] +K_D\left[-y(k)+2y(k-1)-y(k-2)\right] \quad (2.32)$$

2.4 자기동조 PID 제어기

본절에서는 앞에서 구한 GPC기법을 이용하여 PID 이득을 선정하는 PID제어기를 시스템 파라메터가 미지인 경우에도 적용할 수 있도록 확장하였다.

미지의 파라메터를 가진 시스템에 적용하기 위해서, 파라메터 추정기를 사용하여 시스템 파라메터를 추정한 후 추정된 파라메터로 부터 제어칙을 구하는 자기동조제어기의 기본 구조를 채택한다.

파라메터 추정기로서는 다음과 같은 exponential forgetting을 가진 Recursive least-squares estimation 알고리즘[12]을 사용한다.

$$K(k) = P(k-1)\phi(k)[\lambda I + \phi^T(k)P(k-1)\phi(k)]^{-1}$$
$$P(k) = [P(k-1) - K(k)\phi^T(k)P(k-1)]/\lambda \qquad (2.33)$$
$$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) + K(k)[y(k) - \phi^T(k)\hat{\theta}(k-1)]$$

여기서,

$$\hat{\theta}(k) = [a_1, \cdots, a_{na}, b_0, b_1, \cdots, b_{nb}]^T,$$
$$\phi(k) = [-y(k-1), \cdots, -y(k-na), u(k-1), \cdots u(k-nb-1)]^T$$

파라메터 추정기로 부터 추정되는 $a_1, \cdots, a_{na}, b_0, b_1, \cdots, b_{nb}$ 즉, $A(z^{-1})$ 와 $B(z^{-1})$ 를 사용하여 PID제어기의 이득 (K_P ,K_I ,K_D)을 계산한다.

이상과 같이 GPC기법을 이용한 자기동조 PID 제어기 알고리즘을 구성할 수 있다. 그 계산 절차를 요약하면 다음과 같다.

① 설계파라메터로서 예측구간 M, 제어구간 N_u, 제어입력가중행렬 Q_0를 결정한다.

② 식(2.32)의 파라메터 추정기를 이용하여, 과거시간의 출력과 입력으로 부터, 시스템 파라 메터 $a_1, \cdots, a_{na}, b_0, b_1, \cdots, b_{nb}$ 를 추정한다.

③ 식(2.11)의 Diophantine 방정식을 이용하여, 추정된 $A(z^{-1})$ 와 $B(z^{-1})$ 로 부터, $F_j(z^{-1})$ 와 $G_j(z^{-1})$ 를 계산한다.

④ $\underline{h}$ 를 계산하고, 식(2.31)을 이용하여 PID 이득 (K_p, K_I, K_D) 을 계산한다.

⑤ 계산된 PID 이득으로 부터, 식(2.32)을 이용하여 제어입력 u(k)를 계산하여 플랜트에 인가한다.

⑥ 각 스텝마다 ②-⑤단계를 반복한다.

이상에서 제안한 제어기의 안정도 조건을 살펴보기 위해서, 플랜트 모델 식(2.1)에 GPC법칙인 식(2.28)를 대입하면, 다음과 같은 식을 구할 수 있다.

$$y = \frac{z^{-1}B(z^{-1})\sum_{j=1}^{N_u}\left\{h_j\sum_{i=j}^{M}g_{i-j}\right\}}{T(z^{-1})}r(k) + \frac{1}{T(z^{-1})}\xi(k) \qquad (2.34)$$

여기서, $T(z^{-1}) = \Delta A(z^{-1}) + z^{-1}B(z^{-1})\sum_{j=1}^{N_u}h_j\sum_{i=j}^{M}\left\{g_{i-j}F_i(z^{-1})\right\}$ 이다.

그러므로, $T(z^{-1})$의 영점이 모두 단위원 내에 존재하면 안정하다고 볼 수 있다. 여기서, $T(z^{-1})$는 $A(z^{-1})$와 $B(z^{-1})$ 뿐만 아니라, 설계파라메터인 예측구간 M, 제어구간 N_u,제어입력가중행렬 Q_0에 의해서 결정된다.

3. 시뮬레이션

지연시간, 차수, 파라메터가 변하는 플랜트와 지연시간이 변하는 비최소위상 플랜트에 대해서 제안된 자기동조 PID제어기의 성능을 조사하여 보자.

우선 Table 1과 같은 지연시간, 차수, 파라메터가 변하는 플랜트[7]에 대해서 고정된 PID제어기와 제안된 자기동조 PID제어기의 성능을 비교하였다. 제어기의 샘플링 시간은 1초로 하였고, 제어입력은 [-100,100]의 범위로 제한하였다. 처음 10스텝 동안은 제어입력을 10으로 동일하게 고정하였다.

Table 1. Transfer functions of the simulated models(plant #1).

Number	Samples	Model
1	1-100	$\frac{1}{1+10s+40s^2}$
2	101-200	$\frac{e^{-1.5s}}{1+10s+40s^2}$
3	201-300	$\frac{e^{-1.5s}}{1+10s}$
4	301-400	$\frac{1}{1+10s}$
5	401-500	$\frac{1}{10s(1+2.5s)}$

고정된 PID제어기는 식(2.32)와 같은 속도형 PID제어기의 구조를 가지며, PID 제어기의 이득은, 모델 1의 전달함수를 알고 있다는 가정하에 대표극점의 감쇠비가 0.7, 시정수가 약 5초가 되도록, PID제어기의 이득을 K_P=7.5, K_I=1.3, K_D=18.2 로 선정하였다.

자기동조 PID제어기의 경우에는, 시간지연은 모른다는 가정하에, 시스템 파라메터의 추정을 위해서 $A(z^{-1})$와 $B(z^{-1})$를 다음과 같이 각각 2차와 5차다항식으로 가정하였다.

$$\begin{aligned} y(k)= & -a_1(k)\,y(k-1)-a_2(k)\,y(k-2) \\ & +b_0(k)\,u(k-1)+b_1(k)\,u(k-2)+b_2(k)\,u(k-3) \\ & +b_3(k)\,u(k-4)+b_4(k)\,u(k-5)+b_5(k)\,u(k-6) \end{aligned} \quad (3.1)$$

그리고, 설계파라메터인 M 과 N_u는 각각 10 과 1로 두었고, Q_0는 2로 선정하였다.

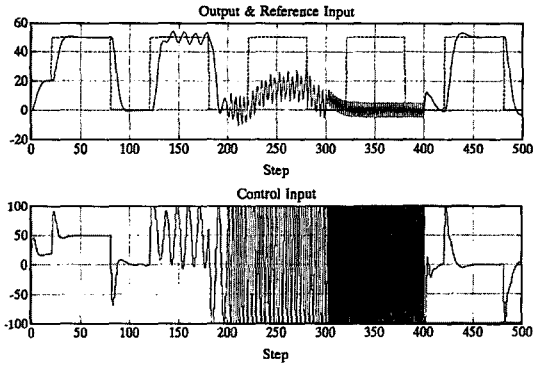

Fig. 1 The output and control input of fixed PID controller (plant #1).

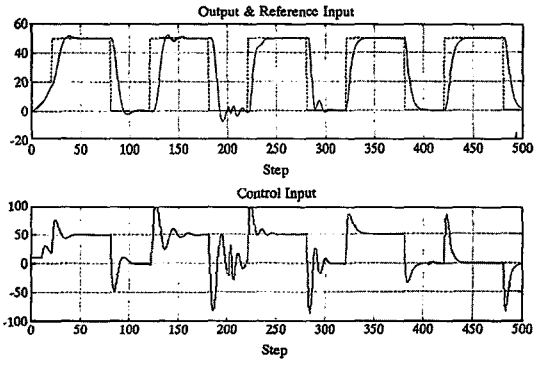

Fig. 2 The output and control input of self-tuning PID controller (plant #1).

위와 같은 조건으로 시뮬레이션을 수행하여 고정된 PID제어기인 경우를 Fig. 1 에, 자기동조 PID 제어기를 Fig. 2에 나타내었다. 고정된 PID제어기인 경우(Fig. 1)에 지연시간이 증가하는 경우 오버슈터가 증가하고, 시스템의 차수가 변하는 경우 진동이 발생되므로, 플랜트의 변화에 대해서 응답특성이 매우 변화가 심하다. 그러나, 제안된 자기동조 PID 제어기의 경우는 플랜트의 변화에 대해서 응답특성이 거의 변화가 없는 양호한 응답을 나타냄을 알 수 있다.

다음으로 Table 2와 같은 지연시간이 변하는 비최소위상 플랜트에 대해서 고정된 PID제어기와 제안된 자기동조 PID제어기의 성능을 비교하였다. 시뮬레이션 조건은 앞의 경우와 동일하게, 즉, 제어기의 샘플링시간은 1초로, 제어입력은 {-100,100}의 범위로 제한하고, 처음 10스텝 동안은 제어입력을 10으로 고정하였다.

Table 2. Transfer functions of the simulated models (plant #2).

Number	Samples	Model
1	1-100	$\frac{(s-2)(s-3)}{(s+1)(s+2)(s+3)}$
2	101-200	$\frac{(s-2)(s-3)}{(s+1)(s+2)(s+3)}e^{-s}$
3	201-300	$\frac{(s-2)(s-3)}{(s+1)(s+2)(s+3)}e^{-2s}$
4	301-400	$\frac{(s-2)(s-3)}{(s+1)(s+2)(s+3)}e^{-3s}$
5	401-500	$\frac{(s-2)(s-3)}{(s+1)(s+2)(s+3)}e^{-4s}$

고정된 PID제어기는 속도형 PID제어기의 구조를 가지며, 모델 1의 전달함수를 알고 있다는 가정하에, 대표극점의 감쇠비가 1, 시정수가 약 5초가 되도록, PID제어기의 이득을 K_P=0.14, K_I=0.21, K_D=0.01 로 선정하였다.

자기동조 PID제어기의 경우에는, 시간지연은 모른다는 가정하에, 시스템 파라메터의 추정을 위해서 $A(z^{-1})$와 (B^{z-1})를 각각 2차와 5차다항식으로 가정하였다. 그리고, 설계파라메터인 M 과 N_u는 각각 10 과 1로 두었고, Q_0는 30으로 선정하였다.

위와 같은 조건으로 시뮬레이션을 수행하여 고정된 PID제어기인 경우를 Fig. 3 에, 자기동조 PID제어기를 Fig. 4에 나타내었다. 두가지 결과를 비교하여 보면, 고정된 PID제어기의 경우는 지연시간의 증가로 오버슈터가

많이 증가하지만, 자기동조 PID 제어기의 경우는 지연시간의 증가로 오버슈터가 약간 증가함을 볼 수 있다. 그러므로 제안된 자기동조 PID 제어기는 주어진 비최소위상 플랜트에서 지연시간의 증가에 대해서도 그 성능이 어느 정도는 유지됨을 알 수 있다.

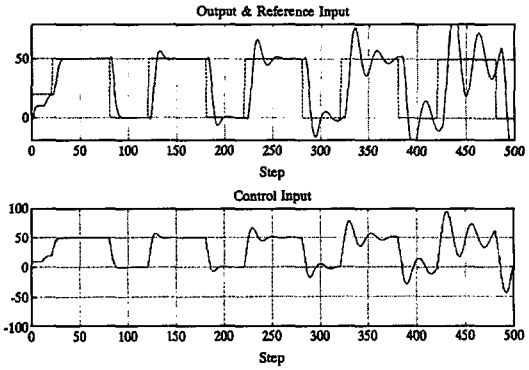

Fig. 3 The output and control input of fixed PID controller (plant #2).

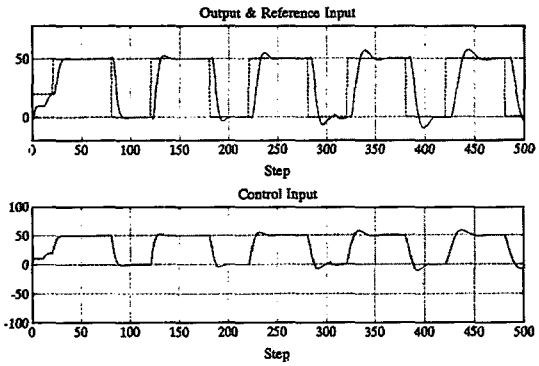

Fig. 4 The output and control input of self-tuning PID controller (plant #2).

4. 결 론

본 연구에서는 시스템의 정보(특히, 시스템의 차수, 시간지연)가 부정확한 경우에 적용할 수 있는 자기동조 PID 제어기를 제안하였다. 이산시간에서 미지의 시간지연을 가진 시스템에 적용될 수 있는 GPC의 특별한 경우에 대한 제어기 구조를 속도형 PID제어기와 등가 시킴으로써, GPC기법을 이용한 PID이득 조정방법을 구하였다. 그리고, 미지의 파라메터를 가진 시스템에 적용할 수 있도록, 시스템 파라메터를 추정한 후 추정된 파라메터로부터 제어칙을 구하는 자기동조제어와 같은 기본구조를 채택하여 자기동조 PID제어기를 구성하였다.

그리고 주어진 예제에 대한 시뮬레이션을 통해서, 제안된 알고리즘이 지연시간, 차수, 파라메터가 변하는 플랜트에 대해서 양호한 성능을 가짐을 알 수 있었고, 또한 지연시간이 변하는 비최소위상 플랜트에 대해서도 적용 가능성을 확인하였다.

참 고 문 헌

1. K. J. Astrom, et al, "Automatic Tuning of Simple regulators with Specifications on Phase and Amplitude Margins," Automatica, Vol.20, No.5. pp.645-651, 1984.
2. F. Radke and R. Isermann, "A Parameter-Adaptive PID-Controller with stepwise Parameter Optimization," Automatica, Vol. 23, No. 4, pp. 449-457, 1987.
3. W. R. Clutt and E. Goberdhansingh, "Auto-tuning for Model-Based Predictive Control," Automatica, Vol. 26, No. 4, pp. 691-697, 1990.
4. F. Cameron and D. E. Seborg, "A Self-tuning controller with a PID structure," International Journal of Control, Vol. 38, pp.401-417, 1983
5. P. J. Gawthrop, "Self-tuning PID Controller : Algorithms and Implementation," Transaction on IEEE Automatic Control, Vol. 31, No. 3. pp. 201-209, 1986.
6. T. Yamamoto, H. Ishihara, S. Omatu, and T. Kitamori, "Multivariable Self-Tuning Controller with I-PD Structure," Proc. of IEEE International Conference on IECON, pp. 1812-1817, 1991
7. D. W. Clarke, C. Mohtadi, and P. S. Tuffs, "Generalized Predictive Control-Part I. The Basic Algorithm," Automatica, Vol. 23, pp. 137-148, 1987.
8. D. W. Clarke, C. Mohtadi, and P. S. Tuffs,

"Generalized Predictive Control-Part II. Extensions and Interpretations," Automatica, Vol. 23, pp. 149-160, 1987.
9. D. W. Clarke, and C. Mohtadi, "Properties of Generalized Predictive Control." Automatica, Vol. 25, No. 6, pp.859-875, 1989.
10. R. R. Bitmead, M. Gevers, and V. Wertz, Adaptive Optimal Control, Prentice Hall, 1990.
11. R. Soeterboek, Predictive Control-A Unified Approach, Prentice Hall, 1992.
12. K. J. Astrom and B. Wittenmark, Adaptive Control, Addison-Wesley, 1989.
13. T. Yamamoto, S. Omatu, and M. Kaneda, "Design Method of Self-Tuning PID Controllers," Proc. of American Control Conference, pp. 3263-3267, 1994.
14. C. R. Cutler and B. L. Ramaker, "Dynamics matrix control: a computer control algorithm," Proceedings Joint Automatic Control Conference, San Francisco, CA., 1980.
15. 윤강섭, 이만형, "GPC기법을 이용한 자기동조 PID제어기 설계," 한국정밀공학회 춘계학술대회 논문집, pp.326-329, 1995.