論文 한국정밀공학회지 제13권 제7호 (1996년 7월)
Journal of the Korean Society of Precision Engineering Vol. 13. No.7. JULY. 1996.

오차를 갖는 부품간의 조립성 확인을 위한 인터벌 분석 : 2편

박 상 호*, 이 건 우**

Interval Analysis for Assemblability Checking between Variational Parts : Part 2

Sangho Park*, Kunwoo Lee**

ABSTRACT

It can be expected that the tolerances of the parts are assigned systematically and thus the parts are designed considering the assemblability in advance in the design stage, if the tolerances can be stored together with the geometric model of the parts and the assemblability of the parts is verified in the computer. In other words, an example of the concurrent engineering is realized. To verify the concepts described above, a new method is proposed to verify the assemblability when the tolerance information and the geometric model of the parts of an assembly are given. This method determines the assemblability by subdividing the range of relative motion between parts until the subdivided region corresponding to free of interference can be found.

Key Words : tolerance(공차), geometric model(기하 모델), assemblability(조립성), concurrent engineering (동시 공학), assembly(조립체)

1. 서 론

대부분의 공학 설계에서 최종 단계는 설계된 부품을 이용한 조립체의 구성이다. 조립체를 표현하는 가장 간단한 방법은 각 부품 (component)의 위치와 방향을 지정하는 것이다. 그 상대 위치는 각 부품에 부착된 좌표계를 정의하는 4 X 4 변환 행렬 (transformation matrix)로 표현할수 있다.

조립체를 구성하는 부품은 가공으로 인하여 형상에 오차를 가질수 있고 그러한 오차의 허용량은 공칭모델 (nominal model)에 공차로 표현된다. 이를 위하여 본 연구의 1편에서는 변환 행렬을 이용하여 공차를 표현하는방법을 제시하였다[1]

이렇게 표현된 기하 공차가 형상 모델링 시스템에 저장되어 있다면, 공차를 갖는 부품들의 실제 조립 가능 여부를 컴퓨터상에서 미리 확인이 가능하도록 하여 설계시 애

* 시스템공학연구소 시스템응용연구부
** 서울대학교 기계설계학과

매한 작업인 공차 부여를 쉽게 해줄 것이다. 이는 결과적으로 조립을 고려한 설계가 가능하도록 하므로, 동시 공학 개념의 구현에 필수 요소라고 할 수 있다.

본 연구에서는 1편에서 제시한 기하 공차의 표현 방법의 한 응용분야로, 조립체를 이루고 있는 부품의 기하 공차 정보가 형상 모델과 함께 주어져 있을 때 조립 가능성을 판단하는 방법을 제시하였다. 이 방법은 조립 작업 해당 부품간의 상대 위치 영역을 분할해가면서 조립 가능성을 결정하는 것이다. 조립이 가능한 상대 위치의 허용 영역은 공차의 경우와 같이 각 부품에 부착된 좌표계를 정의하는 인터벌 수로 구성된 변환행렬 (transformation matrix)로 표현할 수 있다. 또한 이 영역은 상대 위치의 초기 영역을 분할하여 분할된 영역중에서 부품이 간섭을 일으키지 않는 영역을 판단하여 구할 수 있다. 이러한 영역이 연속적으로 존재하고 최종 조립 위치에서 간섭이 일어나지 않아야 조립경로가 존재하고 조립 가능성을 보장할 수 있다.

2. 관련연구

공칭 부품으로 이루어진 조립체를 표현하고 위치 설정을 위한 연구는 많이 진행되어 왔다. 그 중 대표적인 것으로는 각 부품간의 공간적인 관계를 저장하는 자료구조를 제안하고[2]이 관계로 부터 부품의 상대위치를 계산하는 방법에 관한 연구이다.[3] 여기서 공간적인 관계로는 두 평면사이의 against조건과 두 원통면 사이의 fits조건이 대표적으로 사용되었다. 그 후 이 방법은 다른 형상에 대하여 확장되었다.[4][5]

Fleming[6]은 공차영역으로 기하 공차를 표현하고 조립체에서 위치의 불확실성을 연구하였다. 공차가 주어진 부품과 그것들의 조립체를 분석하기 위하여 데이텀과 공차영역의 네트웍의 개념을 도입하였다. 이 네트웍에서 각 아크 (arc)는 공차정보나 조립조건에서 부품간의 접촉상태를 의미하는 관계를 표현한다. 그는 기하학적인 구속조건 (geometric constraint)을 산술적인 형태 (algebraic form)로 변환하여 부등식으로 표현되는 프레임웍 (framework)을 제안하고 이것을 이용하여 조립체의 부품을 맞출 수 있는지를 결정할 수 있게 하였다. Srinivasan과 Jayaraman[7][8]은 오프셋 방법에 근거하여 조립체를 위한 기능적인 요구조건 (functional requirement)를 표현하기 위해서 VBR (virtual boundary requirement)를 제안하였다. 또한 그들의 주된 연구 목적은 이 VBR을 부품에 주어진 공차정보를 나타내는 CT (conditional tolerance)로 바꾸는 것이었다. VBR이 조립체의 요구조건에 관계된 것이라면, CT는 좀더 가공이나 검사의 관점에서 고려된 실제적인 것이다. 일반적인 알고리즘은 개발하기 어렵지만 그들은 몇가지 조립체 문제에 관하여 VBR을 CT로 바꾸기 위한 산술적인 조건을 유도하였다. 그러나 그들의 연구는 너무 복잡하게 수식을 유도하였다는 단점을 가지고 있다.

Inui와 Kimura[9]는 형상 오차가 있는 비공칭모델 (nonnominal model)간의 가능한 조립체 위치를 결정하였다. 회전은 선형화되고 접촉상태는 1, 2 와 3점에서 against와 fits로 구분되는 접촉상태가 고려되었다. 먼저 각 상대 형상간의 1 점 접촉을 인식하고 더 많은 점이 접촉을 일으킬 수 있는지 부품을 움직여 접촉상태를 판단하였다. Sodhi와 Turner[10]는 여러 면이 접촉하는 조립체 문제를 분석하였다. 선형화 프로그래밍 (linear programming)을 이용하여 목적함수로 면들간의 거리를 고려하여 조립체에서 부품간의 상대위치를 결정하는 최적화 방법 (constrained-optimization technique)을 제안하였다. 그러나 이들의 연구는 조립이 가능한 최적화된 특정한 위치를 구하는 것이므로 조립이 가능한 모든 영역을 구하여 이들 영역의 연속성을 고려함으로써 조립 경로의 존재 여부를 판단하고자 하는 본 연구와는 차이를 가진다.

ElMaraghy등[11]은 공차영역을 고려하여 두 원통면의 교차영역 (intersection volume)을 구하였다. 이 방법은 공차를 갖는 상대 형상 (mating part)간의 간섭영역을 체크하는 데 사용할 수 있다.

3. 조립성

본 연구에서 고려하는 조립성을 정의하기 위해 Fig. 1을 보자. Fig. 1은 조립체인 컨테이너 (container)의 리드 (lid), 컵 (cup)와 볼트 (bolt)가 가공으로 인하여 형상의 변화를 가져왔을 경우, 조립이 가능한가에 대한 예이다. Fig. 2 의 (a)는 설계자가 원하는 조립의 상태이다. 왼쪽의 그림은 세 부품의 조립의 위치를 구하기 위해서 볼트의 위치가 존재할 수 있는 초기 영역을 사용자가 지정한 것이다. 이 초기 영역으로 부터 부품의 실제 가능한 위치의 허용영역을 구하고자 하는 것이다. 이 허용 영역은 부품간의 상대 위치를 나타내는 변환 행렬의 집합으로 나타난다. 그 결과로 Fig.2(a)와 같이 T형의 조립이

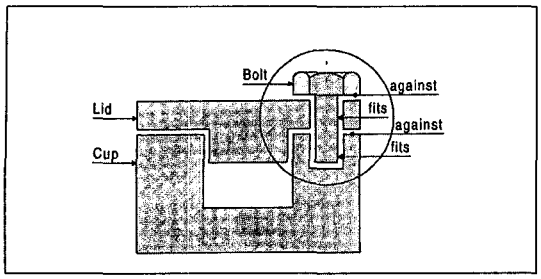

Fig. 1 The example of an assembly:This figure shows an assembly *container* where *against* is a mate condition for planes and *fits* is a mate condition for cylinders.

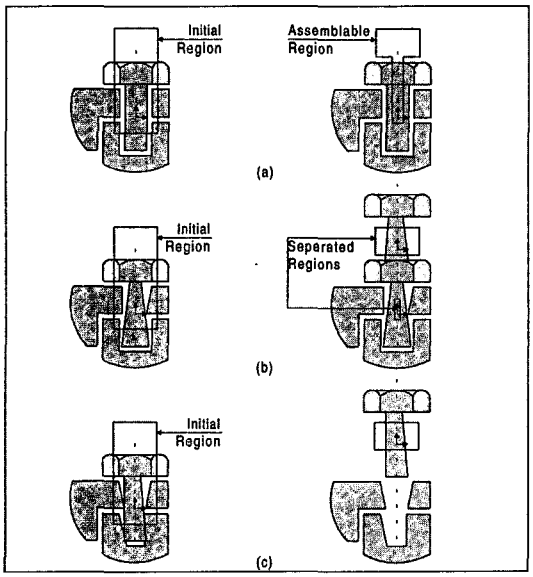

Fig. 2 Assemblability checking : If the parts of an assembly have variations, assemblability is classified into three cases as shown in(a) assemblable, (b) dis-continuous assembling path and (c) not assemblable.

가능한 위치의 집합이 구해졌다. (b)는 가공으로 인한 형상 오차가 존재하여 결과로 구한 조립가능영역이 두 부분으로 나누어져 있음을 보인다. 이러한 경우에는 이 부품을 조립할 경로가 연속적이지 않다는 것을 알수 있다.(c)의 경우는 조립의 위치에서 두 부품이 서로 간섭을 일으키므로 조립이 불가능함을 보인다.

형상 오차를 포함한 변화모델 (variational model)간에 조립을 가능케하는 허용 위치 영역을 인터벌 분석 (interval analysis)을 통하여 구할 수 있다. 인터벌 분석은 인터벌 수를 세분 (subdivision)하는 방법을 이용한다. 이 허용 영역은 부품간의 상대 위치를 나타내는 변환 행렬에서 각각의 요소에 인터벌수를 대입하면 얻어지는데 이 인터벌의 크기에 의해 설계자가 원하는 위치의 허용영역에서 간섭이 어느 정도 일어나고 또한 어느정도 움직일수 있는가 하는 것을 알 수 있다. 이와 같은 문제를 풀기 위해서 각 위치에서 두 물체사이에 어떻게 접촉 (contact)이 일어나는 지를 판단하여야 한다. 즉 두 물체가 서로 간섭을 일으키는지 아니면 서로 떨어져 있는지를 판단하여야 한다. 이 접촉상태 (contact state)에 근거하여 앞에서 설명한 두 조립체 물체가 움직일 수 있는 영역의 집합을 구하게 된다.

3.1 접촉상태

조립체의 접촉상태를 정의하기 위해서 2차원의 변화를 갖는 몇가지 다각형에 대한 다음 Fig.3을 보자. 회색 영역은 형상의 위치의 변화에 의하여 경계가 놓일수 있는 변화의 영역을 나타낸다. 이 그림에서 기준이 되는 오목한 다각형에 대해서 상대 형상 (mate feature)인 원은 접촉점이 없이 자유롭게 움직일 수 있다. 이와 같은 상태를 *Free*상태라고 정의하자.

그러나 사각형은 다각형과 서로 간에 간섭 부분 (interference region)이 있다. 이것은 형상의 어느 한점이라도 상대 형상의 내부에 존재하면 그 부분에서 간섭부분이 발생한다는 것이다. 이와 같은 상태를 *Interference* 상태라고 정의하자.

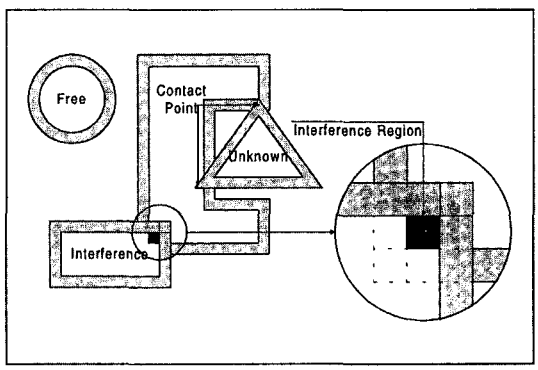

Fig. 3 The definition of contact states: *Free* denotes no contact point, *Unknown* denotes a contact within the allowable ranges of variations, *Interference* denotes an interference between the inside regions of mate features.

반면에 삼각형은 상대형상의 내부에 존재하는 점이 없고 경계의 변화를 나타내는 영역안에서 접촉이 일어난다. 이 경우에는 변화의 양에 따라 이들 두형상이 서로 간섭이 일어날 수도 있고, 서로 자유롭게 움직일 수도 있음을 나타낸다. 즉 변화에 따라 두 형상의 접촉상태가 다르다는 것을 의미한다. 이와 같은 상태를 *Unknown* 상태라고 정의하자.

3.2 인터벌 분석

인터벌 분석은 주워진 인터벌을 반복적으로 세분하여 해를 구하는 방법이다.[12][13][14] 조립성을 검사하기 위해서는 접촉상태에 근거하여 다음의 3 단계를 거쳐 인터벌 분석을 통하여 원하는 해를 구하게 된다.

단계 1. 초기화 (Initialization)

초기치는 구하고자 하는 해가 존재할 영역을 결정한다. 인터벌 분석은 초기치를 세분하여 세분된 값의 영역안에서 해의 존재여부를 판단하므로 구해질 해는 주워진 초기치의 영역안에 존재하게 된다.

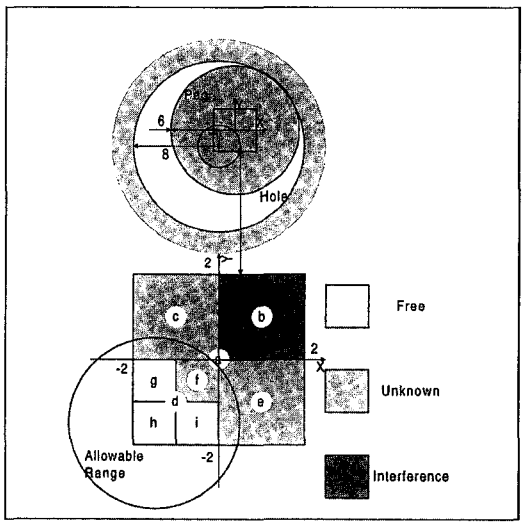

Fig. 4 An example for interval analysis :This figure shows the process to find the region resulting in no interference between a peg and a hole. The largest rectanglular region is an initial region specified by the designer, and the circlular region is the true solution in which the peg can move without interfering the hole. The bottom figure is the detail of the center position of the peg.

펙 (peg)과 구멍 (hole)의 조립체를 위한 인터벌 분석에 대해서 Fig. 4와 같이 두 조립체의 구성을 단계별로 고려해 보자. 펙 중심의 이동을 나타내는 좌표계를 따로 설정하여 그림의 아래 부분에 확대하여 그릴 수 있는데 아래 그림의 원은 실제로 펙이 움직일 수 있는 허용 영역을 나타낸다. 펙의 반지름이 6이고 구멍의 반지름이 8이므로 펙의 중심은 반지름이 2인 원내부에서 움직일수 있고 이 원의 중심은 구멍의 중심과 일치한다. 즉 인터벌 분석에서는 이러한 원의 영역을 구해내는 것이 목표이다. 따라서 그림에서 X축과 Y축에 관한 평행이동을 나타내는 a와 같은 영역 ($d_x=[-2,2]$, $d_y=[-2,2]$)을 초기치로 하여 세분하면 펙과 구멍이 서로 간섭을 일으키지 않는 영역을 구해낼 수 있다. a의 영역은 변수가 2개이므로 세분하면 모두 4개의 영역으로 세분된다. 즉 변수가 2개일 경우에는 쿼드트리(quadtree)로 세분되어 나가고 변수가 3개일 때는 세분의 결과가 옥트리 (octree)가 된다. 움직이는 부품의 수가 여러개가 되어 그 움직임이 m개의 인터벌 수로 구성될 경우 각 변수가 2개의 인터벌 수로 나누어지므로 최대 $n=2^m$개의 벡터로 세분하면 된다.

단계 2. 반복적으로 나누기 (Recursive Subdivision)

초기치를 나누어 두 조립체간에 접촉상태를 판단한다. 주어진 영역안에서 형상이 임의로 움직여도, 즉 상대 위치와 방향을 나타내는 변환 행렬이 이에 맞게 변하여도

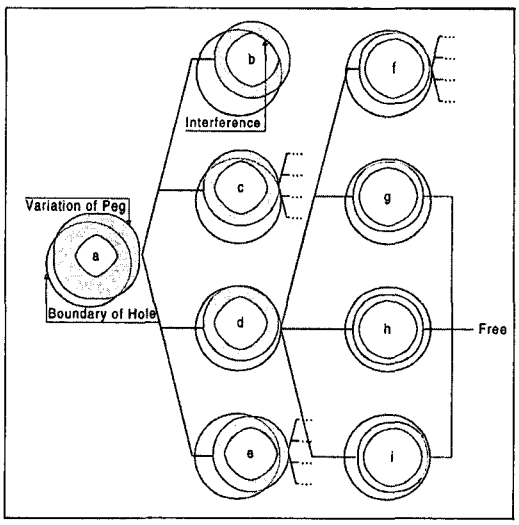

Fig. 5 The subdivision process of interval analysis:The position of a peg is subdivided as quad trees as shown in Fig.4 because the initial region has two variables along X and Y axis.

```
analysis (region)

1:      if( Free ) add region to solution
2: else if( Interference ) discard region
3: else if( Small ) add region to intermediate
   solution
4: else if( Unknown ){
5:      subdivide region into subregion_i
6:      analysis( subregion_i ), i=1,2...n
7: }
```

Fig. 6 The recursive algorithm of interval analysis for assemblability checking.

두 상대형상의 경계에 간섭부분이 없을 경우 (Free)에는 원하는 해이다. 반면에 변환 행렬이 주어진 영역안에서 형상이 움직일 때 항상 간섭부분이 존재할 경우 (Interference)에는 해가 될 수 없으므로 버린다. 이 두 경우가 아닌 경우 (Unknown)에는 반복적으로 세분하여 주어진 조건 (인터벌 수의 폭이 충분히 작아 세분할수 없을 경우)을 만족할 때까지 계속한다.

펙과 구멍의 경우에서 초기치인 a의 세분의 결과를 *b*, *c*, *d* 와 *e* 라고 하고 d의 세분의 결과를 *f*, *g*, *h* 와 *i* 라고 하자. Fig. 5는 Fig. 4에 주워진 펙의 중심의 위치가 존재할 수 있는 영역에 따라 펙의 경계가 움직일 수 있는 변화를 그린 것이다. 회색영역이 펙의 경계의 변화인데 세분의 결과에 따라 쿼드 트리로 나타나고 쿼드 트리의 각 노드에 대해서 접촉상태를 고려하게 된다.

Fig. 6의 반복적인 알고리즘 (recursive algorithm)은 이 과정을 나타낸 것이다. 첫번째 줄은 주어진 인터벌의 영역안에서 간섭 영역이 없다는 것을 의미하므로 해가 됨을 의미한다. Fig.5에서 d를 세분한 *f*, *g*, *h* 와 *i* 중에서 *f* 는 경계에 접촉이 일어나지만 *g*, *h* 와 *i* 는 경계의 영역안에서 서로 접촉이 일어나지 않는다. 따라서 이 *g*, *h* 와 *i* 의 경우에는 해가 된다.

두번째 줄은 인터벌을 계속 세분해도 두 형상간에는 계속 간섭 부분이 존재한다는 것이므로 더 이상 세분할 필요가 없다는 것을 의미한다. Fig.5 에서 보는 바와 같이 *b* 는 주워진 변화의 영역안에서 펙이 움직이면 항상 간섭이 일어난다. 이러한 경우에는 원하는 해가 될 수 없고 계속 세분할 필요도 없다.

또 세번째 줄은 세분하고자 하는 인터벌 수의 최대 폭이 충분히 작은 경우에는 더 이상 세분할 수도 없고 해인지 아닌지를 판단할 수도 없음을 의미한다. 이 경우에는 중간해 (intermediate solution)로 처리한다. 이상적인 경우에 인터벌 수의 폭이 무한히 작을 때까지 세분 과정을 계속 한다면 중간해는 존재하지 않으나 만일 형상에 공차영역과 같은 변화가 이미 주어져 있다면 이 중간해는 없어지지 않는다. 따라서 이와같은 경우에 중간해는 내부끼리는 간섭을 일으키지 않으나 공차영역과는 간섭을 일으키는 영역으로 처리된다.

네번째 줄은 세분의 결과에 따라 해가 될 수도 있는 경우이다. 이때는 인터벌 수를 계속 세분하여 (다섯번째 줄) 세분된 *n* 개의 인터벌 수에 대하여 반복적으로 위의 과정을 계속한다 (여섯번째 줄). Fig.5에서 *c*, *d* 와 *e* 의 경우에는 경계의 영역에서는 서로 접촉이 일어나지만 내부점은 간섭을 일으키지 않는다. 마찬가지로 *d* 를 세분한 *f*, *g*, *h* 와 *i* 중에서 *f* 는 경계에 접촉이 일어나므로 계속 세분해 나간다. 세분의 결과가 앞의 세줄에 주어진 조건을 만족할 때까지 이 과정을 반복한다.

단계 3. 합치기 (Aggregation)

앞의 단계에서 구해진 해는 연속적인 영역의 집합이다. 하나의 해를 원할 경우나 아니면 해의 원소의 갯수를 줄이고자 할 경우에는 해를 둘러싸는 영역으로 합칠 수 있다. 이렇게 합쳐진 해는 구한 모든 해를 포함하는 근사적인 해가 된다. Fig. 4의 펙과 구멍의 예에서는 해인 *g*, *h* 와 *i* 의 근사해는 *d* 가 된다. 이 경우를 생각해보면, 근사해 *d* 는 해가 아닌 *f* 까지도 포함함을 알 수 있다. 따라서 정확한 해를 구하기 위해서는 이 과정을 생략한다.

3.3 여러부품의 조립

두 부품의 상대위치는 6개의 자유도를 변수로 갖는 영역으로 표현이 가능하다. 따라서 인터벌 분석을 하기 위해서는 각 변수를 2개로 세분하여야 하는데 이 과정을 거치면 하나의 영역은 2^6의 갯수의 영역으로 나누어진다.

여러부품의 경우는 한 부품을 고정시키고 다른 부품을 이 고정된 부품의 상대 위치로 표현할 수 있다. 따라서 n개의 부품은 (n-1)개의 상대위치를 결정하여야 한다. n-1개의 영역은 변수를 6×(n-1)개 가지고 있으므로 모두 $(2^6)^{n-1}$개의 영역으로 세분된다. 부품의 갯수가 증가할 때마다 고려해야 할 영역의 갯수 또한 지수함수적으로 증가하나 원하는 해를 쉽게 구할 수 있다. 따라서 컴퓨터의 계산속도가 향상된다면 부품 수로 인한 계산시간 문제를 극복할 수 있을 것이다.

4. 최소거리

조립체 요소의 변화 형상은 다른 요소의 상대 변화 형

상과 여러 곳에서 접촉을 가질 수 있다. 어느곳에서 어느 정도 접촉이 일어나는지는 두 부품간의 최소거리를 계산하여 판단할 수 있다. 부품의 밖을 향하는 방향을 양수의 거리로 정의하고 안을 향하는 방향으로의 거리를 음수로 정의하면 그 거리들 중에 가장 가까운 거리를 계산함으로써 접촉상태를 판단할 수 있다. Fig. 3에서 오목한 다각형과 원의 경계 사이에 가장 가까운 거리가 양수일때 두 형상이 자유롭다. 두 형상사이에 가장 가까운 거리가 음수로 나타나면 서로 간섭을 일으키는 부분이 존재하게 된다.

최소거리 (minimum distance)는 조립체에서 형상간의 상대 위치를 나타내는 영역에 따라 어느 정도 거리가 떨어져 있는가 하는 것을 인터벌 수로 표현한다. 최소거리는 두 형상이 자유롭게 움직일수 있는 정도를 수치적으로 나타낸 것이며 형상간의 모든 점들 중에서 가장 가까운 거리를 나타내는 인터벌 수이다. 따라서 최소거리는 다음식과 같이 주어진다.

$$[mindista, mindistb] = [min(dista_i), min(distb_i)], i=1, 2,...n$$

여기에서 $[dista_i, distb_i]$은 형상의 임의의 i 번째 점에서 상대 형상까지의 거리를 나타내는 인터벌 수인데 $dista_i$는 주어진 변화의 범위안에서 가장 가까운 하한값을 나타내는 거리이고 $distb_i$는 상한 거리이다. n은 이 거리들의 갯수이고 최소 거리는 n개의 $[dista_i, distb_i]$들에 의해서 결정되는데 mindista은 최소 거리의 하한값이고 mindistb는 상한값이다.

이 최소거리의 상한 값이 음수일때 간섭 영역이 존재하게 된다. 따라서 간섭 영역은 최소거리를 표현하는 인터벌 수의 음수로 표현할 수 있다. 최소거리의 하한 값이 양수일 경우에는 두 조립체의 관계에서 간섭 부분이 없다는 것이고 그 값이 클수록 두 요소는 멀리 떨어져 있다. 최소거리가 영을 포함하면, 즉 최소거리의 상한값이 0보다 크고 하한값이 0보다 작으면 변화에 따라 간섭이 생길 수도 있고 자유로울 수도 있다. 따라서 최소거리의 크기에 따른 형상간의 접촉상태는 다음 Table 1과 같다.

Table 1 Relations between a contact state and a minimum distance

Minimum Distance	Contact State
$0 < mindista$	Free
$mindista \leq 0 \leq mindistb$	Unknown
$mindistb < 0$	Interference

4.1 변화 평면 사이의 거리

두 변화 평면 사이의 거리를 계산하기 위해서 먼저 다음과 같은 가정을 한다.

1. against조건은 평면에 존재하는 점들과 법선 벡터로 정의할 수 있다. against조건을 만족하기 위해서는 두 공칭 평면 (nominal planes)의 법선벡터가 반대방향이어야 한다[2]. 본 연구에서는 법선벡터를 평면의 좌표계의 Z축 방향으로 한다.
2. against조건으로 구속되는 평면의 좌표계 (cartesian coordinate)에는 $\Delta(d_Z, \delta_X, \delta_Y)$의 미소 변환 행렬이 변화를 나타내게 되고 따라서 변화 평면은 공칭평면의 위치이동과 방향의 허용영역을 갖게 된다.
3. 상대 변화 평면의 길이 안쪽에 존재하는 변화점만을 고려한다. 이는 변화 평면의 모든 변화점들 중에서 상대 변화 평면과 접촉이 일어날 수 있는 변화점은 상대 변화 평면의 내부에 존재하는 점들이기 때문이다. 따라서 두 형상의 경계사이의 교차점이나 한 형상의 꼭지점 중에서 상대 형상의 내부에 존재하는 변화점을 선택하여 고려하게 된다.

변화평면과 변화점사이의 거리를 계산하기 위해서는 점을 평면의 좌표계로 변환해서 고려하는 것이 보다 쉽다. (Fig.7 참조)

평면의 좌표계를 A라고 하고 상대 평면의 좌표계를 B

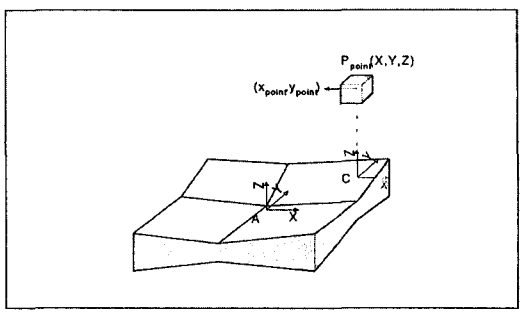

Fig. 7 A relation between a variational plane and a variational point:A is the coordinate frame given to the variational plane and C is the coordinate frame located where the variational point is projected on the variational plane.

라고 할 때, B좌표계의 임의의 한 점을 A좌표계로 변환하는 것은 다음과 같이 평면의 변환행렬을 이용하여 쉽게 계산할 수 있다.

$$P_{point}(X,Y,Z) = {}^{A}T_{B} P_{mate} \quad (1)$$

여기에서 ${}^{A}T_{B}$는 평면의 A좌표계에서 상대평면의 B좌표계로 변환하는 변환행렬이고 P_{mate}는 상대평면의 B좌표계에 대한 점의 위치이다. P_{point}는 A좌표계에 대한 점의 좌표이다.

변화형상은 형상이 놓일 수 있는 허용영역을 갖는 형상이므로 변화점 (variational point)은 3차원에서 직육면체 (brick)로 표현되고 인터벌 수로 표현된 그 좌표값을 (X, Y, Z)라고 하자. 이 X,Y의 중심값을 (x_{point}, y_{point})라고 하면 변화 평면의 A좌표계에서 변화점을 평면에 투영한 점에 원점을 둔 C좌표계로의 변환 행렬은 평행 이동 변환 행렬을 이용하여 다음과 같이 주어진다.

$${}^{A}T_{C} = Q_{XY}(x_{point}, y_{point}) \quad (2)$$

여기에서 Q_{XY}는 X축과 Y축에 관한 평행 이동 변환 행렬이다.

변화평면 (variational plane)은 그 좌표계에 대하여 인터벌 수로 표현된 미소 변화를 갖는다. A좌표계에 주워진 미소 변화가 C좌표계에 전파하는 변화는 다음 식과 같이 주어진다.

$${}^{A}\Delta_{C} = {}^{C}T_{A} \ \Delta_{A} \ {}^{A}T_{C} \quad (3)$$

Fig.8 의 C좌표계에서 원점의 변화점은 (3)식의 미소 변화에 따라 원점을 다음과 같이 변환 이동한 점이다.

$$P_{plane} = (I + {}^{A}\Delta_{C})(0,0,0) \quad (4)$$

여기에서 I는 단위 변환행렬이고 P_{plane}는 C좌표계의 원점의 변화점의 위치를 나타내고 (0,0,0)는 원점을 나타내는 좌표값이다.

따라서 변화점과 변화평면과의 거리는 변화점인 P_{point}와 C좌표계의 원점의 변화점인 P_{plane}사이의 거리와 같으므로 (1)와 (4)식에 의해

$$[dista, distb] = Zof(P_{point} - P_{plane})$$

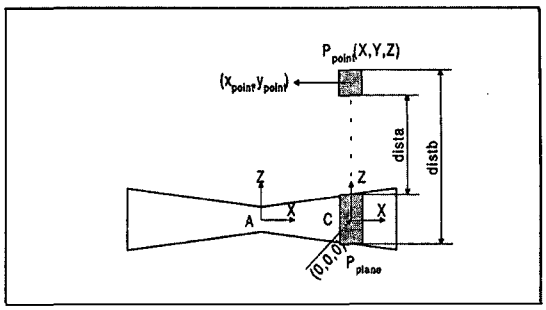

Fig. 8 A distance between a variatonal plane and a variational point: This figure is shown at the cross section of C coordinate frame in the figure 7.

이다. 여기에서 *dista*는 두 점사이의 거리의 하한값, *distb*는 상한값이고 *Zof*는 점의 *Z*좌표이다.

4.2 변화 원통면 사이의 거리

두 변화 원통면 사이의 거리를 계산하기 위해서 먼저 다음과 같은 가정을 한다. (Fig. 9를 참조)

1. fits조건은 두 공칭 원통 형상의 중심선 (centerline)이 같은 선 (colinear)상에 존재하도록 구속한다.[2] 본 연구에서는 원통 형상의 중심선 방향을 Z축과 일치시킨다.
2. fits 조건으로 구속되는 원통면에는 좌표계에 주워진 미소 변화인 $\Delta(d_X, d_Y, \delta_X, \delta_Y)$ 가 위치와 방향의 변화를 나타내게 된다. 접촉이 일어날수 있는 방향은 축과 구멍의 Δ에 의해서 결정된다.
3. 두 변화형상사이의 접촉은 상대형상의 길이안에 있는 양끝 가장자리 (end rim)에서 일어난다. 이것은 형상의 끝에 있는 가장자리가 상대형상의 양끝 가장자리 사이에 존재하면 그곳에서 접촉이 일어날 수 있음을 뜻한다.

Fig. 9은 fits조건으로 구속되는 축과 구멍의 단면을 그린것이다. 축 (peg)의 양끝 가장자리 중에서 D부분이 상대 형상의 길이 안쪽에 존재한다. 또한 구멍 (hole)의 경우는 양끝 가장자리 중에서 C부분이 상대형상인 축의 양끝가장자리사이에 존재한다. 그림에서 알수 있듯이 C와 D부분에서 접촉이 일어날 수 있다.

두번째 가정에 의하여 접촉이 일어날 수 있는 C좌표계에서 두 형상의 접촉관계를 알아보기 위해서 A와 B의 좌표계에 주어진 위치와 방향의 미소 변화를 C 좌표계로 변환하면

$${}^{A}\Delta_{C} = {}^{C}T_{A} \ \Delta_{A} \ {}^{A}T_{C}$$

$$^{B}\Delta_{C} = {}^{C}T_{B}\ \Delta_{B}\ {}^{B}T_{C} \qquad (5)$$

와 같이 주어진다. 여기에서 $^{C}T_{A}, {}^{A}T_{C}, {}^{C}T_{B}, {}^{B}T_{C}$ 는

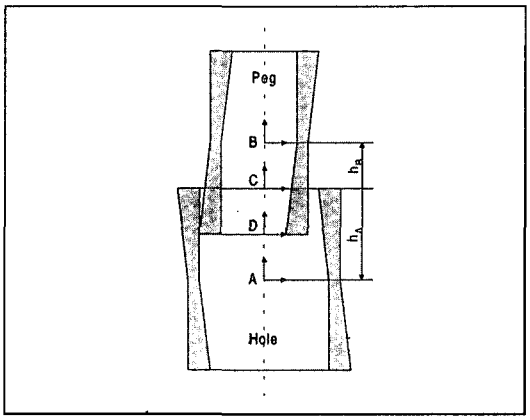

Fig. 9 A relation between two variational cylinders :A and B are the coordinate frames given to the variational cylinders and C and D are the coordinate frames where a contact can happen.

A, B와 C 좌표 사이의 변환행렬이다. Fig.10 는 C 좌표계에서 두 변화 원통면의 단면을 나타낸다.

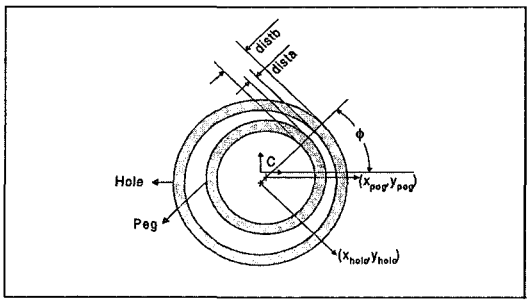

Fig. 10 A distance between two variational cylinders: This figure is shown at the cross section of C coordinate frame in the Fig. 9 where a contact can happen.

이 두 단면의 원점을 나타내는 변화점은 원점을 A와 B 좌표계에서 C좌표계로 변환된 미소 변환 행렬에 의해서

$$P_{hole} = (I + {}^{A}\Delta_{C})\ (0,0,0)$$
$$P_{peg} = (I + {}^{B}\Delta_{C})\ (0,0,0) \qquad (6)$$

로 주어진다. P_{hole}, P_{peg}는 C좌표계의 원점을 통과하는 단면에서 구멍과 축의 중심의 변화점이고 (0,0,0)는 원점의 위치를 나타내는 좌표값이다. 그러나 이 값들은 인터벌 수로 표현되었기 때문에 중간값을 취하여 구멍과 축 단면의 중심의 X,Y 좌표를 (x_{hole}, y_{hole}), (x_{peg}, y_{peg})라고 하자. 그림에서 보는 것과 같이 두 중심을 이은 연장선의 방향에서 두 형상이 가장 접근해 있고 C좌표계에서 이 연장선의 방향은 다음 식에 의해서 구할 수 있다.

$$\phi = atan2(y_{peg} - y_{hole}, x_{peg} - x_{hole}) \qquad (7)$$

여기에서 C 좌표계의 ϕ 방향에서 두 형상이 가장 접근해 있으므로 접촉이 일어날 수 있다고 할 수 있고 또한 형상간의 최소 거리도 이 방향에서 구할 수 있다.

(7)의 ϕ 방향에서 두 단면간의 거리는 반지름의 차이와 (6)에서 구한 변화점으로부터 다음과 같이 구할 수 있다.

$$[dista,\ distb] = (R_{hole} - R_{peg}) + Xof(R_z(-\phi)(P_{hole} - P_{peg}))$$

여기에서 R_{hole}, R_{peg}는 C좌표계의 원점을 통과하는 단면에서 구멍과 축의 단면의 반지름이고 Xof는 구해진 점의 X좌표이다. D좌표계에서도 같은 방법으로 구할 수 있다.

5. 적용예

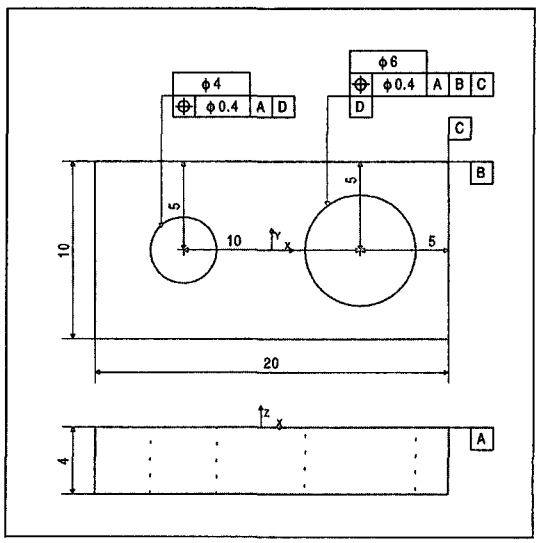

Fig. 11 A drawing example with two holes

여기에서는 공차가 주어지지 않은 공칭 부품과 공차가

주워진 부품에대하여 조립성 확인을 하는 예를 보이겠다. Fig.11과 Fig.12는 위치도 공차가 주어진 두개의 구멍과 축의 도면을 보인다.

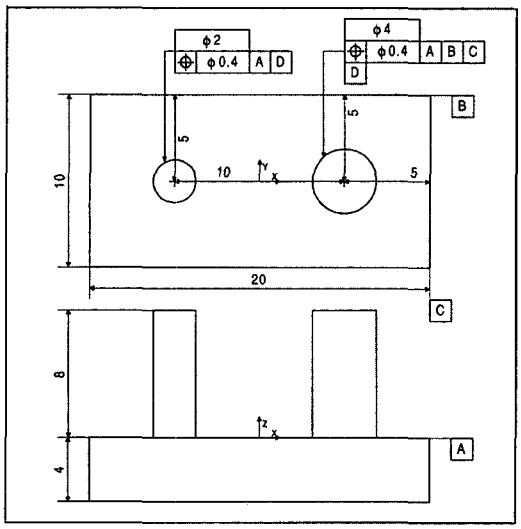

Fig. 12 A drawing example with two pegs

이 두 부품이 조립되었을 경우에 어느 정도의 허용 범위를 가지며 조립이 가능한지 주어진 공차를 고려하지 않은 공칭 부품간의 경우와 공차를 고려한 경우로 나누어 조립성을 확인하겠다.

Fig.13 은 이후의 결과를 보일 각 창 (window)의 구성을 보이고 있다. (a)는 Fig.11과 12의 도면에 주어진 공칭 부품과 공차에 근거하여 각 뷰 (view)에 따른 물체의 형태를 그릴 창의 구성이다. 특히 이들 그림에 나타나는 허용 범위는 앞장에서 설명한 방법에 의해 도시하였다. (b)는 (a)의 창 중에서 ISO 뷰를 5배 확대하고 도면에 주워진 좌표계에 근거하여 고정된 구멍에 대한 축의 상대 위치를 그릴 창의 구성이다. 이들 그림에는 이 결과를 얻는데 걸리는 시간과 세분하는 최대 깊이를 표시하였다.

Fig. 14는 공차를 고려하지 않은 공칭 물체간의 조립성 확인에 대한 예이다. Fig. 15는 결과를 나타낸다. 결과를 나타내는 그림에서 오른쪽 위에 나타나는 ***Free*** 영역은 두 부품이 서로 간섭을 일으키지 않고 축이 움직일 수 있는 영역이고 오른쪽 아래에 나타나는 ***Unknown*** 영역은 중간해로 처리되어진 영역으로 만일 중간해를 나타내는 영역의 인터벌 폭이 무한히 작을 때까지 계속 세분한다면 이 영역은 존재하지 않을 것이다. 왼쪽 아래에 나타나는

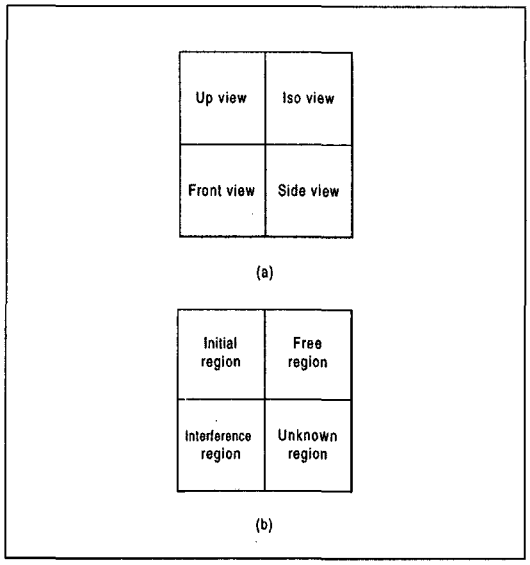

Fig. 13 The configuration of result windows:(a) is the viewing windows of the drawing examples and (b) is the configuration of result windows zoomed up by five times from the view of (a). The results represent the regions of the relative positions of the peg with respect to the fixed hole.

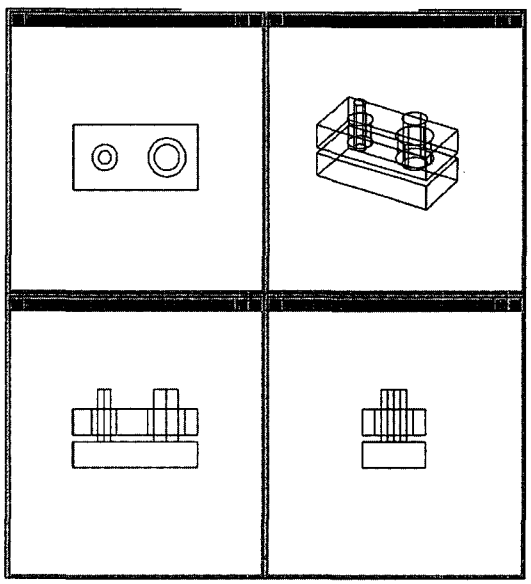

Fig. 14 An example for assemblability checking between nominal parts

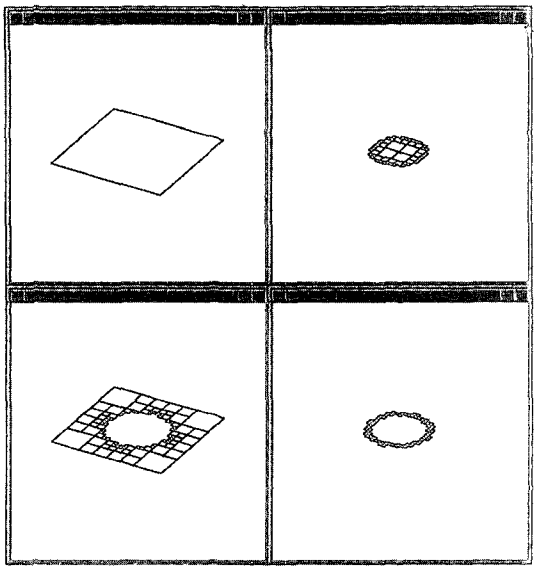

Fig.15 The results between nominal parts : The initial region is $d_x=d_y=[-2.0,2.0]$. The maximum depth of subdivisions is 5 and the computation time is 38.01 CPU seconds.

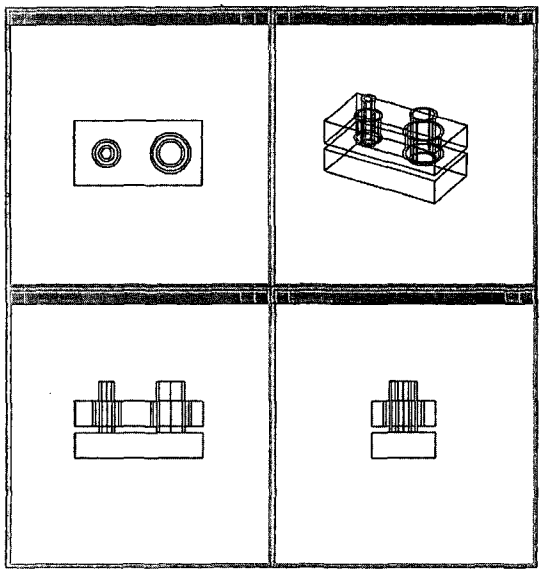

Fig. 16 An example for assemblability checking between toleranced parts

Interference 영역은 간섭을 일으켜 인터벌 분석중에서 버려진 값들이다. 왼쪽 위는 인터벌 분석을 행할 d_X(=[-2.0,2.0]), d_Y(=[-2.0,2.0])의 두개의 변수로 구성된 초기영역이다.

Fig.16와 17은 Fig.11과 12의 위치도 공차를 모두 고려하여 적용한 경우이다. 이 적용예에서는 앞의 예와는 달리 초기치가 d_X(=[-1.2,1.2]), d_Y(=[-1.2,1.2]), d_Z(=[-2.0,2.0])의 세개의 변수로 이루어져 있다. 그리고 *Unknown* 영역은 공차영역과는 간섭을 일으킬 수 있지만 물체의 내부와는 간섭을 일으키지 않고 조립되는 영역이다. 이 결과에서 하나 주목할 것은 공차가 주어진 경우에는 Fig. 14의 공칭 부품간의 조립성 확인 문제와는 달리 이 *Unknown* 영역은 중간해의 인터벌 폭이 무한히 작을 때까지 세분해도 존재한다는 것이다. 또한, 이 영역은 공차영역과 간섭을 허용하는 조립위치를 구할 경우에 유용하게 사용될 수 있고 그 위치는 *Free* 영역과 합친 영역이 된다. 따라서 나온 결과도 세 변수를 고려한 것이다. 이 결과에서 주목할 것은 걸리는 시간이 초기치의 변수의 갯수와 세분하는 최대 깊이에 따라 지수 함수적으로 증가한다는 것이다.

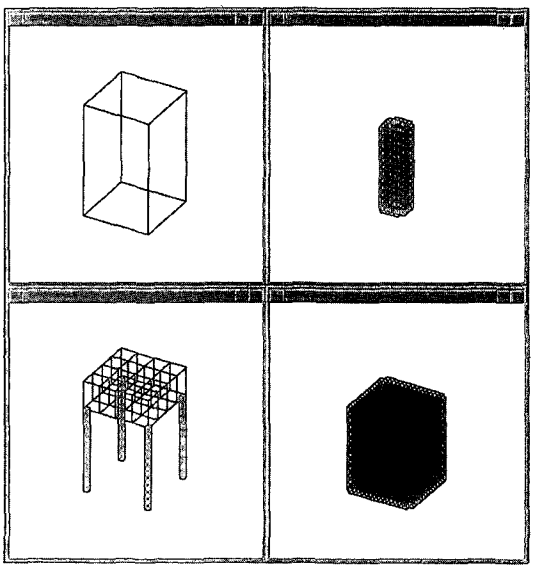

Fig. 17 The results between toleranced parts: The initial region is $d_x=d_y=[-1.2,1.2]$ and $d_z=[-2.0,2.0]$. The maximum depth of subdivisions is 4 and the computation time is 346.43 CPC seconds.

6. 결 론

본 연구에서는 1편에서 기술한 방법에 의하여[1] 공차정보를 갖는 부품들간의 간섭이 일어나지 않는 허용 위치영역을 구하여 조립성을 확인하는 방법을 기술하였다. 즉 두 공칭 부품이 조립되어 있고 이들 공칭 부품에 주어진

공차가 충분히 작다고 가정하여 공차를 포함하는 두 부품 사이에 간섭이 일어나지 않고 조립이 가능한 상대 위치의 허용 영역을 구하고, 이 영역을 분석함으로써 조립 경로의 연속성및 조립 가능성을 판단할 수 있도록 하였다. 이 때 조립체 내에서의 부품간의 간섭은 부품간의 최소거리로서 나타내었다. 이 최소거리는 변화 평면과 변화점간의 거리를 계산하는 식과 원통면 사이의 거리를 계산하는 식으로 부터 얻어진다. 이 방법은 공차가 주어진 부품, 측정된 가공 에러가 있는 부품, 그리고 설계자가 설계한 공칭 부품등과 같은 두개 이상의 부품을 동시에 조립하는 경우에서의 조립성 확인에도 응용할 수 있다.

본 연구의 한계는 다음과 같다. 우선, 항상 틈새 (clearance)가 존재하는 두 개 부품의 헐거운 끼워맞춤 (clearance fit)을 가정하고 조립성을 확인한다는 것이다. 둘째, 고려하여야할 부품의 수가 많아지거나 세분하는 최대 깊이의 수가 증가할수록 걸리는 시간도 지수함수적으로 증가한다는 것이다. 이러한 시간 문제를 해결하고 억지 끼워 맞춤 (interference fit)을 고려하기 위해서는 추가적인 정보를 포함하는 좀 더 향상된 알고리즘을 개발할 필요가 있다. 세째, 미소 행렬이 변환 행렬의 작은 변화를 나타낸다는 가정하에 삼각함수를 선형화하여 기하 공차를 나타내는 수식을 유도하고[1] 조립성을 확인하는 알고리즘을 개발하였기 때문에 충분히 큰 변화를 수반할 경우에는 미소 행렬을 사용하지 못하고 변환 행렬을 사용하여야 한다. 또한 실제 가공된 형상에 대해서 그 형상 오차가 크다면 본 연구에서 접촉 상태를 판단하기 위한 몇 가지 가정을 사용할 수 없다. 예를 들면, 원통면의 양 끝에서 상대 형상과 접촉이 일어난다는 가정을 사용할 수 없고 접촉은 양 끝사이 어디에서나 일어날 수 있다. 따라서 작은 변화라는 가정을 하지 않는다면, 본 연구에서 유도한 대부분의 식들이 복잡해지고 추가적인 알고리즘이 필요할 것이다.

참 고 문 헌

1. 박상호, 이건우, 기하공차의 수학적 표현: 1편. 한국정밀 공학회지 제 13권 제 6호, 1996.
2. K. Lee and D. C Gossard. A hierarchical data structure for representing assemblies: Part1. *Computer Aided Design*, 17(1):15-19, 1985.
3. K. Lee and G. Andrews, Inference of the positions of components in an assembly: Part2. *Computer Aided Design*, 17(1):20-24, 1985.
4. D.N. Rocheleau and K. Lee, System for interactive assembly modelling. *Computer Aided Design*, 19(2):65-72, 1987.
5. S.H. Kim and K. Lee, An assembly modelling system for dynamic and kinematic analysis. *Computer Aided Design*, 21(1):2-12, 1989.
6. A.D. Fleming, *Analysis of Uncertainties and Geometric Tolerances in Assemblies of Parts*. PhD thesis, University of Edinburgh, 1987.
7. R. Jayaraman and V. Srinivasan, Geometric tolerancing: Ⅰ. virtual boundary requirements. *IBM Journal of Research and Development*, 33(2):90-104, 1989.
8. V. Srinivasan and R. Jayaraman, Geometric tolerancing: Ⅱ. conditional tolerances. *IBM Journal of Research and Development*, 33(2):105-124, 1989.
9. M. Inui and F. Kimura, Algebraic reasoning of position uncertainties of parts in an assembly. In *Solid Modeling Foundations and CAD/CAM Applications*, pages 419-428. ACM Symposium, 1991.
10. R. Sodhi and J.U. Turner, Relative positioning of variational part models for design analysis. *Computer Aided Design*, 26(5):366-378, 1994.
11. W. H. ElMaraghy, S.R. Valluri, B.M. Skubnid, and P.D. Surry, Intersection volumes and surface areas of cylinders for geomtrical modelling and tolerancing. *Computer Aided Design*, 26(1):29-45, 1994.
12. T. Duff, Interval arithmetic and recursive subdivision for implicit functions and constructive solid geometry. *Computer Graphics*, 26(2):131-138, July 1992.
13. K.G. Suffern, Interval method in computer graphics. *Computer Graphics*, 15(3):331-340, 1991.
14. J.M. Snyder, Interval analysis for computer graphics. *Computer Graphics*, 26(2):121-130, July 1992.