

콘크리트의 탄-소성 이방성-손상 모델

Elasto-Plastic Anisotropic-Damage Model for Concrete

이 기 성*
 Lee, Ki-Seong
 송 하 원**
 Song, Ha-Won

.....

요 약

콘크리트의 미세공극 혹은 미세균열의 발생과 성장은 콘크리트의 점차적인 물성 저하를 야기한다. 이와같은 손상은 이방성을 가지며 소성과 함께 콘크리트의 비선형거동을 일으키는 주요원인이 된다. 본 논문은 콘크리트의 탄소성 변형 및 손상을 고려하여 콘크리트의 이방성 손상거동을 해석할 수 있는 콘크리트 연속체 손상 모델의 개발에 관한 연구이다.

등가 탄성 에너지원리를 이용하여 이방 손상텐서로 표현된 유효탄성텐서를 구하고, 이를 포함하고 있는 열역학 법칙의 자유에너지함수와 소산포텐셜로부터 손상의 전개법칙을 유도한 후, 손상에너지해방률의 함수로 표현한 손상면을 적용함으로써 콘크리트의 이방성손상을 효율적으로 해석할 수 있는 구성방정식을 유도하였다. 또한 이방성 손상모델에 콘크리트의 소성모델을 도입시켜 탄소성 변형 및 손상을 함께 고려할 수 있는 콘크리트의 연속체 손상모델을 개발하였다.

개발된 손상모델을 유한요소해석 프로그램에 적용하여 1축 및 2축의 여러 조합응력을 받는 콘크리트 모형을 유한요소해석하였으며, 실험결과 또는 타 모델과의 비교로부터 손상모델의 타당성을 검증하였다.

Abstract

The initiation and growth of microcracks or microvoids inside concrete results in the progressive degradation of concrete. This damage processing along processing along with plastic deformation is main cause of nonlinear behavior of concrete. In this study, a continuum damage model of concrete is developed for the analysis of the nonlinear behavior of concrete due to damage and elasto-plastic deformation.

Anisotropic damage tensor is used to describe the anisotropy of concrete and hypothesis of equivalent elastic energy is used to define the effective elastic tensor. The damage model including the damage evolution law and constitutive equation is derived with damage variable and damage surface which is defined by damage energy release rate by using the Helmholtz free energy and dissipation potential based on the thermo-dynamic principles. By adopting a typical plasticity model of concrete, plasticity of concrete is included to this model.

* 한국전력기술주식회사 토목구조기술처 책임기술원
 ** 연세대학교 토목공학과 조교수

이 논문에 대한 토론을 1996년 9월 31일까지 본 학회에 보내주시면 1997년 3월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

A finite element analysis program implemented with this model was developed and finite element analysis was performed for the analyses of concrete subjected to uniaxial and biaxial loadings. Comparison of the results of analysis with those of experiments and other models shows that the model successfully predicts the nonlinear behavior of concrete.

1. 서 론

어떤 재료에 하중이 작용하면 재료에 발생한 균열이나 결함등으로 인해 하중에 저항하는 면적이 감소하게 되므로 실제 재료에 작용하는 유효응력은 그만큼 증가하게 된다. 이러한 유효응력개념은 Kachanov¹⁾가 금속의 크리프 파손을 모형화하면서 처음으로 제안되었다. 이후 Rabotnov²⁾가 손상된 재료의 역학적 거동과 미세균열의 전개를 나타내는 역학적인 방정식을 세우기 위해 약간의 수정을 가하므로 유효응력개념을 체계화하였다.

손상역학이 콘크리트에 적용되기 시작한 것은 70년대 후반과 80년대 초로서 주로 일축의 손상만을 고려한 스칼라 손상모델을 사용하였다. (Krajcinovic³⁾, Loland⁴⁾, Mazar⁵⁾, Lorrain과 Loland⁶⁾), 또한 임의로 발생하는 손상을 나타내기 위해 다축을 고려한 모델들이 개발되었으나 제한적인 벡터형의 손상모델 (Krajcnovic와 Fonseka^{7,8)})이거나 각 방향의 손상이 일정하다고 가정하는 등방성 손상모델 (Mazar⁹⁾)들이었다.

손상뿐만아니라 재료의 비선형성을 나타내는 소성을 함께 고려한 모델들이 제안되었고 (Klinsinski와 Mroz¹⁰⁾, Yazdani와 Schreyer¹¹⁾, Ramtani와 Berthaud, Mazar¹²⁾) 반복하중을 고려하기 위한 모델들 (Suaris와 Ouyang, Fernando¹³⁾, Abu-Lebdeh와 Voyiadjis¹⁴⁾)도 제안되었다.

이와같이 콘크리트의 연속체 손상모델에 관한 연구들이 활발히 진행되어 왔으나 주로 스칼라 손상모델이거나 등방성의 모델들이며, 이방성을 고려한 모델에서도 불완전한 변형률등가원리를 사용하였고, 또한 소성과정을 손상과정과 합성하면서 상당히 많은 제약조건을 갖게한 모델들이다. 따라서 콘크리트에 대하여 소성과 손상을 고려하고 적용하기 보다 간단한 이방성 손상모델이 요구된다.

본 논문에서는 먼저 손상의 역학적 표현 및 열역학과의 관계를 설명하였고, 비가역 열역학 법칙의 전개에 의해 이방성 손상을 고려한 구성방정식을 유도하여 콘크리트의 연속체 손상모델을 개발하였다. 또한 콘크리트의 소성변형을 고려하기 위하여 파괴기준과 항복면, 흐름법칙 등을 도입하여 탄소성을 고려한 이방성 손상공식으로 확장하였다. 개발된 탄소성-손상모델을 유한요소해석 프로그램에 적용하여 다양한 응력상태에 있는 콘크리트의 거동을 유한요소 해석하였으며 실험결과 및 타모델에 의한 결과들과 비교 고찰하였다.

2. 등가 탄성 에너지원리

콘크리트의 손상은 일반적으로 이방성을 가지게 되며 3차원의 경우 손상된 부재와 가상의 손상되지 않은 부재사이의 응력 σ 와 유효응력 $\bar{\sigma}$ 사이의 관계는 손상의 이방성을 고려한 손상효과텐서 \mathbf{M} 을 사용하여 식(1)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\bar{\sigma} = \mathbf{M} : \sigma \quad (1)$$

여기서 ($:$)는 텐서의 내적을 나타내며, \mathbf{M} 은 손상상태를 나타내는 4차의 이방성 텐서로서 식(2)와 같이 표현된다.¹⁵⁾

$$\mathbf{M} = [\mathbf{I} - \omega]^{-1} \quad (2)$$

여기서, \mathbf{I} 는 4차 항등 텐서이며 ω 는 손상변수텐서이다.

손상되지 않은 상태에서 응력과 선형탄성변형률의 관계는 탄성텐서 \mathbf{E} 를 사용하면 식(3)과 같으나

$$\epsilon^e = \mathbf{E}^{-1} : \sigma \quad (3)$$

콘크리트가 손상되었을 때 구성관계는 식(4)와 같이 변하게 된다.

$$\varepsilon^e = \bar{\mathbf{E}}^{-1} : \sigma \quad (4)$$

여기서 $\bar{\mathbf{E}}$ 는 유효탄성텐서라 하며, $\bar{\mathbf{E}}$ 를 사용하여 나타낸 손상된 재료의 탄성에너지 $\mathbf{W}^e(\varepsilon^e, \omega)$ 는 식(5)와 같다.

$$\mathbf{W}^e(\varepsilon^e, \omega) = \frac{1}{2} \varepsilon^e : \bar{\mathbf{E}} : \varepsilon^e \quad (5)$$

식(4)에서 $\bar{\mathbf{E}}$ 는 탄성에너지등가원리¹⁶⁾에 따라 응력을 유효응력으로 대치하여 손상된 콘크리트의 공액탄성에너지와 손상되지 않은 콘크리트의 공액탄성에너지가 같도록 하여 구할 수 있다. 즉, 손상되지 않은 재료($\omega=0$)의 공액탄성에너지 $\mathbf{W}^e(\sigma, 0)$ 는 식(6)과 같고 손상된 재료에 대해서는 식(7)과 같다.

$$\mathbf{W}^e(\sigma, 0) = \frac{1}{2} \sigma : \mathbf{E}^{-1} : \sigma \quad (6)$$

$$\mathbf{W}^e(\sigma, \omega) = \mathbf{W}^e(\bar{\sigma}, 0) = \frac{1}{2} \bar{\sigma} : \mathbf{E}^{-1} : \bar{\sigma} \quad (7)$$

식(7)에 식(1)의 관계를 대입하면 식(8)을 얻는다.

$$\mathbf{W}^e(\sigma, \omega) = \frac{1}{2} \sigma : \mathbf{M}^T : \mathbf{E}^{-1} : \mathbf{M} : \sigma \quad (8)$$

따라서 공액탄성에너지로부터 구한 응력-변형을 구성관계는 식(9)와 같다.

$$\varepsilon^e = \frac{\partial \mathbf{W}^e(\sigma, \omega)}{\partial \sigma} = \mathbf{M}^T : \mathbf{E}^{-1} : \mathbf{M} : \sigma \quad (9)$$

식(4)와 식(9)로부터 식(10)과 같이 유효탄성텐서를 얻게 된다.

$$\bar{\mathbf{E}} = \mathbf{M}^{-1} : \mathbf{E} : \mathbf{M}^{-T} \quad (10)$$

여기서 $\bar{\mathbf{E}}$ 는 대칭텐서이며 이를 이용하여 식(8)를 다시 쓰면 식(11)과 같다.

$$\mathbf{W}^e(\sigma, \omega) = \frac{1}{2} \sigma : \bar{\mathbf{E}}^{-1} : \sigma \quad (11)$$

콘크리트의 손상은 콘크리트 내의 미세균열의 생성과 성장으로 나타나는 비가역적 과정으로 이 과정은 에너지를 소산시킨다. 소성흐름에 사용된 에너지와 손상과정에서 사용된 에너지가 서로 독

립적이며¹⁷⁾ 등은 과정에 대한 콘크리트의 Helmholtz 자유에너지는 식(12)와 같다.¹⁸⁾

$$\rho \Psi(\varepsilon^e, \omega, \varepsilon_p, \beta) = \mathbf{W}^e(\varepsilon^e, \omega) + \Psi_p(\varepsilon_p) + \Psi_d(\beta) \quad (12)$$

여기서 ε_p 는 누적된 유효소성변형률을, β 는 손상의 누적량을 나타내는 내적 변수이며 $\Psi_p(\varepsilon_p)$ 와 $\Psi_d(\beta)$ 는 각각 소성경화에너지와 손상경화에너지를 나타낸다. 식(12)와 식(5)로 부터 손상변수 ω 에 대한 연관변수인 손상에너지해방률 $-\mathbf{Y}$ 를 구한다.

$$\begin{aligned} -\mathbf{Y} &= -\rho \frac{\partial \Psi}{\partial \omega} \\ &= -\frac{1}{2} \varepsilon^e : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \omega} : \varepsilon^e \\ &= \varepsilon^e : (\mathbf{M}^{-1} : \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \omega} : \bar{\mathbf{E}})^S : \varepsilon^e \end{aligned} \quad (13)$$

여기서 윗첨자^S는 대칭텐서 (즉 $A^S = \frac{(A+A^T)}{2}$)를 나타낸다.

같은 방법으로 식(5)와 식(12)로 부터 응력을 구하면 식(14)와 같다.

$$\begin{aligned} \sigma &= \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon^e} \\ &= \rho \frac{\partial \mathbf{W}^e(\varepsilon^e, \omega)}{\partial \varepsilon^e} \\ &= \bar{\mathbf{E}}^{-1} : \varepsilon^e \end{aligned} \quad (14)$$

응력변화율은 식(10)으로부터 식(15)와 같이 된다.

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} &= \bar{\mathbf{E}} : \dot{\varepsilon}^e + \frac{\partial \bar{\mathbf{E}}}{\partial \omega} : \dot{\omega} \\ &= \bar{\mathbf{E}} : \dot{\varepsilon}^e - 2(\mathbf{M}^{-1} : \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \omega} : \bar{\mathbf{E}})^S : \varepsilon^e : \dot{\omega} \end{aligned} \quad (15)$$

응력이 일정하면 식(15)는 식(16)과 같이 정리된다.

$$\bar{\mathbf{E}} : \dot{\varepsilon}^e = 2(\mathbf{M}^{-1} : \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \omega} : \bar{\mathbf{E}})^S : \varepsilon^e : \dot{\omega} \quad (16)$$

그러므로 탄성에너지밀도 $\dot{w}_e = \sigma : \dot{\varepsilon}^e$ 이므로 여

기에 식(14)를 대입하고 식(16)를 이용하면 식(17)이 된다.

$$\begin{aligned} \dot{w}_e^e &= \sigma : \dot{\varepsilon}^e \\ &= \bar{\mathbf{E}} : \varepsilon^e : \dot{\varepsilon}^e \\ &= 2\varepsilon^e : (\mathbf{M}^{-1} : \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \omega} : \bar{\mathbf{E}})^S : \varepsilon^e : \dot{\omega} \end{aligned} \quad (17)$$

식(13)과 식(17)을 비교하면 식(18)을 얻을 수 있다.

$$-Y = \frac{1}{2} \frac{W_e}{\omega} \Big|_{\sigma=\text{const}} \quad (18)$$

즉, 손상이 발생하므로써 상실되는 손상에너지해방률 $-Y$ 는 선형과곡역학에서 사용하는 탄성변형에너지해방률과 같다.

손상에너지해방률은 손상변수가 증가함에 따라 증가하게 되어 손상경화가 발생한다. 이때 누적손상량 β 와 손상경화를 일으키는 열역학적 힘 $-B$ 는 Helmholtz 자유에너지식(12)로부터 식(19)와 같이 얻을 수 있다.

$$-B = -\rho \frac{\partial \Psi}{\partial \beta} = -\frac{\partial \Psi_d(\beta)}{\partial \beta} \quad (19)$$

3. 이방성 손상의 전개

소성과 손상은 비가역적 과정으로서 역학적 에너지를 열이나 표면생성에너지로 변환하게 된다. 따라서 열역학 제2법칙에 의한 Clausius-Duhem 부등식은 온도의 변화가 없는 경우 식(20)과 같이 주어진다.

$$\sigma : \dot{\varepsilon} - \rho \dot{\Psi} \geq 0 \quad (20)$$

식(12)로부터 Helmholtz 자유에너지의 변화율은 식(21)이 된다.

$$\rho \dot{\Psi} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon^e} : \dot{\varepsilon}^e + \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_p} \dot{\varepsilon}_p + \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \omega} : \dot{\omega} + \frac{\partial \Psi}{\partial \beta} \dot{\beta} \quad (21)$$

또한 변형률을 탄성변형률과 소성변형률로 구분하여 식(22)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^e + \dot{\varepsilon}^p \quad (22)$$

식(21)과 식(22)를 식(20)에 대입하면 식(23)과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} (\sigma - \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon^e}) : \dot{\varepsilon}^e + \sigma : \dot{\varepsilon}^p - \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_p} \dot{\varepsilon}_p - \frac{\partial \Psi}{\partial \omega} : \dot{\omega} \\ - \frac{\partial \Psi}{\partial \beta} \dot{\beta} \geq 0 \end{aligned} \quad (23)$$

식(23)을 열역학 제1법칙($\sigma = \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon^e}$)과 ε_p 의 연관변수를 $R = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon^p}$ 로 정의하여 소성과 손상의 소산부등식으로 다시 쓰면 식(24)와 같다.

$$D^p = \sigma : \dot{\varepsilon}^p - R \dot{\varepsilon}_p \geq 0 \quad (24a)$$

$$D_d = -Y : \dot{\omega} - B \dot{\beta} \geq 0 \quad (24b)$$

Remark 3.1 :

식(24b)에서 손상부분만을 고려하면 $-Y$ 는 식(18)로부터 0보다 큰 값임을 알 수 있으므로 Clausius-Duhem 부등식을 만족시키기 위해서는 $\dot{\omega} \geq 0$ 이어야 한다. 즉 손상과정은 감소하지 않는 과정임을 나타낸다.

항복면과 같이 응력은 공간내에서 손상이 발생하는 영역과 손상이 발생하지 않는 영역을 구분하는 손상면 f_d 는 식(25)와 같이 손상에너지해방률 $-Y$ 와 $-B$ 의 함수로 나타낼 수 있다.¹⁹⁾

$$f_d(-Y, -B) = 0 \quad (25)$$

초기에 등방성인 재료에 대한 손상면 f_d 의 형태는 재료의 모든 방향에 대하여 동일하다. 따라서 식(25)를 식(26)과 같이 표현할 수 있다.

$$f_d(Y_I, Y_{II}, Y_{III}) = 0 \quad (26)$$

여기서 Y_I, Y_{II}, Y_{III} 는 각각 Y 의 1차, 2차 및 3차 불변량을 나타낸다.

소성에서 편차응력의 2차 불변량을 사용하여 항복면을 정의하듯이 본 논문에서는 손상면을 식(27)과 같이 정의하였다.

$$f_d(\mathbf{Y}, \mathbf{B}) = Y_d - \{B_0 + B(\beta)\} = 0 \quad (27)$$

여기서

$$Y_d = Y_{II}^{1/2} = \sqrt{\frac{1}{2} \mathbf{Y} : \mathbf{J} : \mathbf{Y}} \quad (28)$$

이때 B_0 는 손상의 초기발생치를 나타내고 \mathbf{J} 는 손상성장의 이방성 특성을 나타내는 손상특성텐서로서 다음과 같은 형태를 갖는다.

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 & \mu & \mu & 0 & 0 & 0 \\ \mu & 1 & \mu & 0 & 0 & 0 \\ \mu & \mu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1-\mu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1-\mu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1-\mu) \end{bmatrix} \quad (29)$$

여기서 μ 는 재료정수로서 \mathbf{J} 가 부(-)의 값을 갖지 않기 위해 μ 는 $-1/2 \leq \mu \leq 1$ 의 값을 갖는다.

최대손상소산이론과 흐름법칙의 직교성을 적용하면 식(30) 및 식(31)과 같이 손상전개법칙을 얻을 수 있다.

$$\dot{\beta} = \lambda_d \frac{\partial f_d}{\partial (-B)} = \lambda_d \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \dot{\omega} &= \lambda_d \frac{\partial f_d}{\partial (-\mathbf{Y})} \\ &= -\lambda_d \frac{\partial f_d}{\partial \mathbf{Y}} \\ &= -\dot{\beta} \frac{\mathbf{J} : \mathbf{Y}}{2 Y_d} \end{aligned} \quad (31)$$

여기서 λ_d 는 항상 양의 값을 갖는 스칼라승수로서 consistency 조건 $\dot{f}_d=0$ 으로부터 구할 수 있다.

$$\lambda_d = \begin{cases} \frac{\frac{\partial f_d}{\partial \mathbf{Y}} : \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \varepsilon^e} : \varepsilon^e}{\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \beta} + \frac{\partial f_d}{\partial \mathbf{Y}} : \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \omega} : \frac{\partial f_d}{\partial \mathbf{Y}}} > 0, & \text{if } f_d=0 \text{ and } \frac{\partial f_d}{\partial \mathbf{Y}} : \dot{\mathbf{Y}} > 0 \\ 0, & \text{if } f_d < 0, \text{ or } f_d=0 \text{ and } \frac{\partial f_d}{\partial \mathbf{Y}} : \dot{\mathbf{Y}} \leq 0 \end{cases} \quad (32)$$

Remark 3.2 :

식(31)을 이용하여 2차 불변량 Y_{II} 를 표현하면 식(33)과 같이 소산손상에너지 $-\mathbf{Y} : \dot{\omega}$ 와 관계를 맺을 수 있다.

$$Y_{II} = \frac{1}{2} \mathbf{Y} : \mathbf{J} : \mathbf{Y} = \frac{Y_d}{\beta} \mathbf{Y} : \dot{\omega} \quad (33)$$

식(28)로부터 $Y_{II} = Y_d^2$ 임로 식(33)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\mathbf{Y} : \dot{\omega} = Y_d \dot{\beta} \text{ or } Y_d = \frac{\mathbf{Y} : \omega \cdot}{\beta} \quad (34)$$

따라서 등가의 손상에너지해방률 Y_d 는 전체 손상을 일으키는데 필요한 에너지가 된다.

식(14)로부터 증분형태의 응력-변형률 관계를 유도하면 식(35)과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} &= \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon^e} : \dot{\varepsilon}^e + \frac{\partial \sigma}{\partial \omega} : \dot{\omega} \\ &= \bar{\mathbf{E}} : \dot{\varepsilon}^e + \frac{\partial \bar{\mathbf{E}}}{\partial \omega} : \varepsilon^e : \dot{\omega} \\ &= \bar{\mathbf{E}} : \dot{\varepsilon}^e + \frac{\partial \bar{\mathbf{Y}}}{\partial \varepsilon^e} : \dot{\omega} \end{aligned} \quad (35)$$

식(35)에 식(31)과 (32)를 대입하면 식(36)과 같이 정리된다.

$$\dot{\sigma} = \left[\bar{\mathbf{E}} - \frac{\frac{\partial \bar{\mathbf{Y}}}{\partial \varepsilon^e} : \frac{\partial f_d}{\partial \mathbf{Y}} \times \frac{\partial f_d}{\partial \mathbf{Y}} : \frac{\partial \bar{\mathbf{Y}}}{\partial \varepsilon^e}}{\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \beta} + \frac{\partial f_d}{\partial \mathbf{Y}} : \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \omega} : \frac{\partial f_d}{\partial \mathbf{Y}}} \right] : \dot{\varepsilon}^e \quad (36)$$

여기서 \otimes 는 텐서의 외적을 나타낸다. 식(36)의 괄호를 $\bar{\mathbf{K}}$ 라 정의하면 식(36)은 식(37)로 간략하게 표현할 수 있다.

$$\dot{\sigma} = \bar{\mathbf{K}} : \dot{\varepsilon}^e \quad (37)$$

즉 손상을 고려한 대칭의 탄성-손상강성텐서 $\bar{\mathbf{K}}$ 는 다음과 같다.

$$\bar{\mathbf{K}} = \bar{\mathbf{E}} - \frac{\frac{\partial \bar{\mathbf{Y}}}{\partial \varepsilon^e} : \frac{\partial f_d}{\partial \mathbf{Y}} \times \frac{\partial f_d}{\partial \mathbf{Y}} : \frac{\partial \bar{\mathbf{Y}}}{\partial \varepsilon^e}}{\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \beta} + \frac{\partial f_d}{\partial \mathbf{Y}} : \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \omega} : \frac{\partial f_d}{\partial \mathbf{Y}}} \quad (38)$$

Remark 3.3 :

식(38)에서 $\dot{\omega}$ 에 대한 손상에너지해방률의 증분 $-\dot{Y}$ 는 식(39)와 같이 구할 수 있다.

$$-\frac{\partial Y}{\partial \omega} = \frac{1}{2} \varepsilon^e : \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial \omega \partial \omega} : \varepsilon^e \quad (39)$$

$$= \varepsilon^e : (\mathbf{M} : \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \omega} : \bar{\mathbf{E}} : \frac{\partial \mathbf{M}^T}{\partial \omega} : \mathbf{M}^T)^S : \varepsilon^e$$

Remark 3.4 :

손상을 고려한 유효탄성강성텐서 식(38)에서의 $\partial B / \partial \beta$ 의 값은 1차원은 손상을 고려하므로써 구할 수 있다. 즉 1차원에서의 손상강성계수를 구하기 위하여 식(38)의 변수들을 구하면 유효탄성계수는 식(40)이 된다.

$$\bar{\mathbf{E}} = (1-\omega)^2 \mathbf{E} \quad (40)$$

식(40)으로부터 유효탄성계수의 손상변수에 의한 증분은 식(41)과 같이 얻어진다.

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{E}}}{\partial \omega} = -2(1-\omega) \mathbf{E} \quad (41)$$

또한 식(27)의 손상면에 대한 직교법칙으로부터 식(42)를 얻는다.

$$\frac{\partial f_d}{\partial Y} = -\sqrt{\frac{J}{2}} \quad (42)$$

손상에너지해방률의 탄성변형에 대한 증분은 식(43)과 같고,

$$\frac{\partial Y}{\partial \varepsilon^e} = -(1-\omega) \mathbf{E}(\varepsilon^e)^2 \quad (43)$$

손상변수에 의한 증분을 구하면 식(44)와 같이 구할 수 있다.

$$\frac{\partial Y}{\partial \omega} = \mathbf{E}(\varepsilon^e)^2 \quad (44)$$

이것들로 부터 식(38)의 탄성-손상텐서를 1차원에 대해 구하면 식(45)와 같이 얻게 된다.

$$\bar{\mathbf{K}} (1-\omega)^2 \mathbf{E} - \frac{2(1-\omega)^2 J \mathbf{E}^2 (\varepsilon^e)^2}{\frac{\partial B}{\partial \beta} + \frac{1}{2} J \mathbf{E} (\varepsilon^e)^2} \quad (45)$$

식(45)에서 \mathbf{J} 는 1차원 손상의 경우 1이 되므로 $\bar{\mathbf{K}}=0$ 되게하는 $\partial B / \partial \beta$ 를 식(46)과 같이 구할 수 있다.

$$\frac{\partial B}{\partial \beta} = \frac{3}{2} \mathbf{E} (\varepsilon_{\text{peak}}^e)^2 \quad (46)$$

여기서 $\varepsilon_{\text{peak}}^e$ 는 실험에서 구한 최대압축응력 발생시의 변형률이다.

4. 콘크리트 소성의 적용

콘크리트의 소성을 고려하기 위해 총변형률증분은 식(22)에서부터 식(47)과 같다.

$$\dot{\varepsilon}^e = \dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^p \quad (47)$$

식(47)을 식(37)에 대입하면 식(48)과 같이 된다.

$$\dot{\sigma} = \bar{\mathbf{K}} : (\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^p) \quad (48)$$

콘크리트의 파괴는 콘크리트가 받을 수 있는 극한하중저항능력으로서 파괴면은 이 능력에 대한 계적으로 나타나게 된다. 본 논문에서는 콘크리트의 여러가지 거동특성을 잘 표현하는 Willam-Warnke의 5매개변수모델에 의한 파괴면을 사용하였다.²⁰⁾ 또한 항복기준이 되는 항복면은 축소된 파괴면을 사용하는 것이 일반적이나 콘크리트 거동의 큰 특징은 인장과 낮은 정수압영역에서는 탄성한계나 균열시작점이 파괴면과 거의 일치하지만 높은 정수압영역에서는 소성영역이 커진다는 점이다. 이러한 콘크리트의 항복특성을 반영한 항복면모델이 Han-Chen²¹⁾이 제안한 부등경화소성 모델로서 본 논문에서는 항복면으로 이 모델을 사용하였다.

현재의 응력이 항복면에 접촉하게 되면 재료는 그 이상의 하중에 대해 소성흐름상태에 놓이게 된다. 소성포텐셜면을 $g(\sigma, \varepsilon^p, k)$ 라 하면 소성흐름 벡터의 방향은 직교법칙에 따라 식(49)와 같이 정의된다.

$$\dot{\varepsilon}^p = \lambda_p \frac{\partial g}{\partial \sigma} \quad (49)$$

여기서 λ_p 는 소성변형의 크기를 제어하는 양의 스칼라계수이다. 본 논문에서는 다음과 같이 Drucker-Prager 형태의 소성포텐셜 함수를 사용하였다.

$$g = \alpha I_1 + \sqrt{J_2} - k = 0 \quad (50)$$

여기서 α 와 k 는 재료정수이며 I_1 은 응력의 1차 불변량이고 J_2 는 편차응력의 2차 불변량이다. 또한 항복면 $f_p(\sigma, \varepsilon^p)$ 의 소성 consistency조건($\dot{f}_p=0$)으로부터 λ_p 는 식(51)과 같다.

$$\lambda_p = \frac{\left(\frac{\partial f_p}{\partial \sigma} : \mathbf{K} \right) : d\varepsilon}{\left(\frac{\partial f_p}{\partial \sigma} : \mathbf{K} : \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \sigma} - \mathbf{H}^p \frac{\partial f_p}{\partial \mathbf{R}} \phi \right)} \quad (51)$$

여기서 $\mathbf{H}^p = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \varepsilon_p}$ 이며 $\phi = \frac{\varepsilon_p}{\lambda_p}$ 이다.

따라서 증분상태의 응력-변형률 관계식은 식(48)에 식(49)와 식(51)을 대입하여 식(52)와 같이 얻게된다.

$$\dot{\sigma} = \bar{\mathbf{H}} : \dot{\varepsilon} \quad (52)$$

여기서 $\bar{\mathbf{H}}$ 는 탄소성-손상 강성텐서이며 식(53)과 같다.

표 1. 모델의 해석과정

1. 탄성예측	$\varepsilon_{n+1}^{trial} = \varepsilon_n + \Delta^s \cdot u_{n+1}$ $\varepsilon_{n+1}^{p, trial} = \varepsilon_n^p$ $\varepsilon_{n+1}^{e, trial} = \varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^p$ $\sigma_{n+1}^{trial} = \sigma_n + \bar{\mathbf{H}}_n d\varepsilon_{n+1}$ $\omega_{n+1}^{trial} = \omega_n$	<ol style="list-style-type: none"> 1) 총변형률 계산 2) 소성변형률 계산 3) 탄성변형률 계산 4) 시행응력의 계산 5) 시행손상변수 계산
2. 손상의 계산	$Y_{n+1} = Y(\varepsilon_{n+1}^{e, trial}, \omega_{n+1}^{trial})$ $\bar{\mathbf{E}}_{n+1}^{trial} = \mathbf{E}(Y, \omega_{n+1}^{trial})$ $f_d(Y_{n+1}, B_n) \leq 0$ $\bar{\mathbf{K}}_{n+1}^{trial} = \bar{\mathbf{E}}_{n+1}^{trial} - \mathbf{D}(Y_{n+1}, \varepsilon_{n+1}^{e, trial}, \omega_{n+1}^{trial})$	<ol style="list-style-type: none"> 1) 손상에너지해방률 2) 탄성텐서 3) 손상의 전개 4) 탄성-손상강성텐서
3. 소성의 계산	$f_p(\sigma_{n+1}^{trial}, \varepsilon_{n+1}^{p, trial}) \leq 0$ $d\varepsilon_{n+1}^p = \lambda_p \frac{\partial f}{\partial \sigma_{n+1}^{trial}}$ $\bar{\mathbf{P}}_{n+1} = \mathbf{P}(\sigma_{n+1}, \bar{\mathbf{K}}_{n+1})$ $\bar{\mathbf{H}}_{n+1}^{trial} = \bar{\mathbf{K}}_{n+1}^{trial} - \mathbf{P}(\sigma_{n+1}^{trial}, \bar{\mathbf{K}}_{n+1}^{trial})$	<ol style="list-style-type: none"> 1) 소성의 전개 2) 소성변형률 계산 3) 탄성-손상-소성강성텐서
4. 시행응력비교	$d\sigma_{n+1} = \bar{\mathbf{H}}_{n+1}^{trial} \cdot d\varepsilon_{n+1}$ $\sigma_{n+1} = \sigma_n + d\sigma_{n+1}$ $ \sigma_{n+1} - \sigma_{n+1}^{trial} \leq \xi$	<ol style="list-style-type: none"> 1) 응력의 계산 2) 이를 만족치 않으면 다시 1. 수행
5. 변수경신	$\varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n^p + d\varepsilon_{n+1}^p$ $d\beta_{n+1} = \beta_{n+1}(Y_{n+1}, \omega_n) \cdot d\varepsilon_{n+1}^p$ $B_{n+1} = B_n + \frac{\partial B}{\partial \beta} \cdot d\beta_{n+1}$ $d\omega_{n+1} = -d\beta_{n+1} \cdot \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial Y_{n+1}}$ $\omega_{n+1} = \omega_n + d\omega_{n+1}$	<ol style="list-style-type: none"> 1) 소성변형률 경신 2) 손상변수 경신

$$\bar{\mathbf{H}} = \bar{\mathbf{K}} - \frac{(\mathbf{K} : \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \sigma} \times \frac{\partial \mathbf{f}_p}{\partial \sigma} : \mathbf{K})}{(\frac{\partial \mathbf{f}_p}{\partial \sigma} : \mathbf{K} : \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \sigma} - \mathbf{H}^p \frac{\partial \mathbf{f}_p}{\partial \mathbf{R}})}$$
 (53)

식(53)에서 만일 손상을 고려하지 않으면 $\bar{\mathbf{K}}$ 는 탄성텐서 \mathbf{E} 가 되므로 일반적인 탄소성강성텐서를 얻게 된다.

5. 콘크리트의 탄소성 손상 해석

5.1 탄소성 손상 계산순서

본 논문에서 유도된 탄소성 손상모델의 계산 순서는 아래의 표 1과 같다.

5.2 사용변수와 해석모델

계산된 결과와 실험결과를 비교하기 위하여 Kupfer 등²²⁾에 의한 여러 응력상태의 콘크리트 실험결과들과 비교하였다. 각 실험에서 얻어진 재료상수들은 표 2에 나타내었다. 또한 소성모델로 이용한 Willam-Warnke의 5가지 매개변수의 값들은 표 3과 같다.

표 2. 실험재료상수

실험자	탄성계수(E) (MPa)	포아송비 (ν)	압축강도(f_c) (MPa)
Kupfer	31700	0.22	32.2

표 3. Willam-Warnke 모델의 매개변수 값

	$a_0 = b_0$	a_1	a_2	b_1	b_2
Kupfer	0.1025	-0.8403	-0.0910	-0.4507	-0.1018

일축 및 이축 응력을 받는 콘크리트 공시체에 대한 유한요소해석은 8개의 8절점 Solid 요소 (그림 1)를 사용하였으며, 손상모델에 사용된 변수인 초기 손상발생치 B_0 와 Remark 3.4에서 구한 $\partial B / \partial \beta$ 는 표 4에 나타내었다.

표 4. 손상모델의 변수

	B_0 (MPa)	$\partial B / \partial \beta$ (MPa)
Kupfer	0.0	0.1288

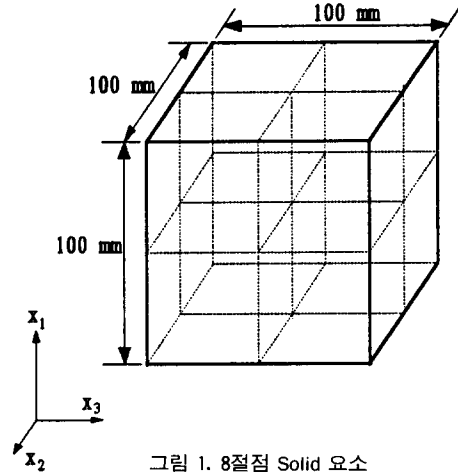


그림 1. 8절점 Solid 요소

5.3 일축 거동 해석

일축응력상태에 대한 적용으로 일축압축응력과 일축인장응력상태에 대하여 계산하였다. 계산결과와 실험결과를 비교하였고 또한 각 응력상태에 따른 손상변수의 변화를 도시하였다.

그림 2에는 일축압축에 의한 거동으로 Kupfer 등의 실험결과 및 Ishikawa 등²³⁾과 Yazdani 등²⁴⁾의 모델에 의한 결과를 함께 비교하여 나타내었다. 그림 3에는 일축압축에 의한 콘크리트의 손상변수의 변화를 변형률에 대하여 보이고 있다.

일축압축거동에 대한 실험결과와 비교하여 볼 때 본 모델은 그림 2에서 보이는 것처럼 극한강도를 포함하여 하중이 작용하는 압축(x_1)축의 전체적인 거동을 잘 표현하고 있다. 하중이 직접 작용

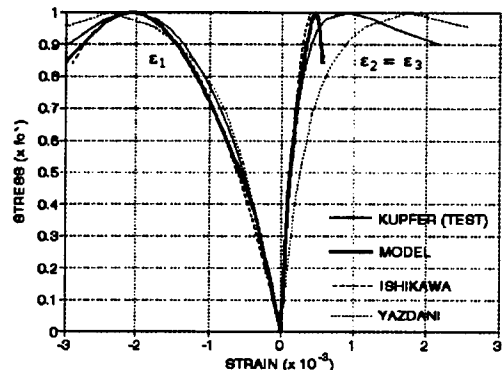


그림 2. 일축압축응력의 거동

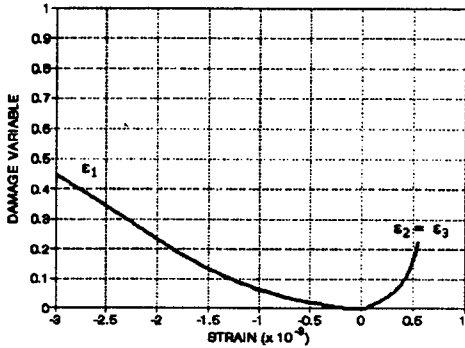


그림 3. 일축압축응력에 의한 손상의 증가

하지 않는 인장변축의 거동에서 본 모델의 결과는 임계응력(critical stress)까지 실험결과와 잘 일치하고 있으나 임계응력 이후 실험결과보다 작은 변형을 주고 있다. 여기서 임계응력은 콘크리트의 일축압축시험에서 체적변형률이 최대가 되는 응력으로서 그 크기가 약 $0.75 f_c$ 이며 임계응력 이후에는 균열이 불안정하게 전파되어 실험시 인장변형률의 측정이 어려운 부분이다. 즉 본 모델은 직접 하중이 작용하지 않는 인장변형축에 대하여 균열전파가 안정된 영역에서는 거동을 잘 예측하고 있으며 균열전파가 불안정한 영역에서는 다소 작은 변형을 주고 있다. 그림 3은 최대응력시(변형률 2.06×10^{-3}) 손상이 0.244 발생하고, 이후 3.00×10^{-3} 변형률까지 손상이 0.45로 증가하는 것을 보여준다.

일축인장실험에 의한 콘크리트의 거동을 Kupfer 등의 실험결과와 비교하여 그림 4에 나타내었고 본 모델에 의한 손상변수의 변화를 그림 5에 나타내었다. 그림 4에서 일축인장응력에 대한 본 모델의 결과는 실험결과와 잘 일치하고 있으며 최대응력 이후의 거동도 표현가능함을 보이고 있다. 그림 5의 손상변화에서 최대인장응력시(변형률 135×10^{-3}) 손상은 0.267이며 이 값은 일축압축시험의 최대응력시의 손상 0.244보다 크게 증가한 것을 알 수 있다. 그림 3과 그림 5의 손상변수의 변화를 최대응력시의 변형률과 손상을 서로 비교하면 표 5와 같다. 표 5를 통해 볼 때 콘크리트는 압축응력보다는 인장응력을 받을 때 손상이 크게 증가하며 손상과정이 빠르게 진행됨을 알 수 있다.

표 5. 압축과 인장에서의 손상발달 비교

	최대응력시		비 고
	변형률(ϵ_{peak})	손상	
압축응력	2.06×10^{-3}	0.244	Kupfer, et al
인장응력	0.135×10^{-3}	0.267	Kupfer, et al

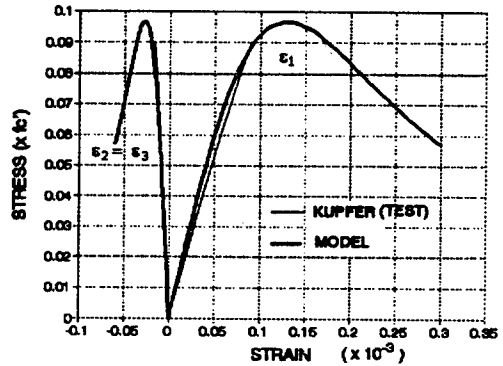


그림 4. 일축인장응력의 거동

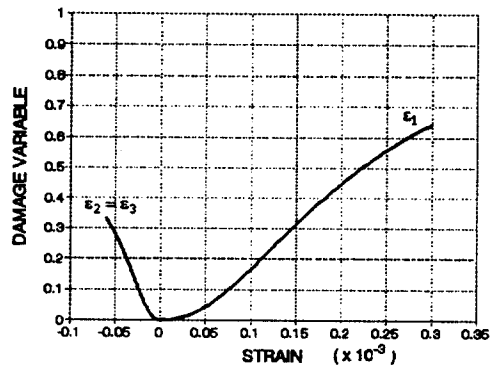


그림 5. 일축인장응력에 의한 손상의 증가

5.4 이축 거동 해석

이축응력의 적용을 비교하기 위하여 표 6과 같이 여러 응력비에 대한 Kupfer 등의 실험결과를 본 모델에 의한 계산결과와 비교하였다. Kupfer 등의 실험결과에서 두축의 등력비(σ_1/σ_2)가 각각 (-1.0 : -1.0), (-1.0 : -0.52)으로 두축이 모두 압축인 경우와 (-10:0.052), (-1.0:0.204)으로 일축압축-일축인장인 경우, 그리고 두축이 모두 인장인 (1.0:1.0), (1.0:0.55)의 응력비에 대하여 비교하였다.

표 6. 이축응력의 거동비교를 위한 응력비

종 류	실 험	응력비	
		σ_1	σ_2
압축-압축	Kupfer, et al	-1.0	-1.0
		-1.0	-0.52
압축-인장	Kupfer, et al	-1.0	0.052
		-1.0	0.204
인장-인장	Kupfer, et al	1.0	1.0
		1.0	0.55

그림 6은 두축의 응력비가 (-1.0 : -1.0)인 압축-압축응력상태에 대하여 Kupfer 등의 실험결과와 비교하고 Yazdani 등의 모델결과와도 비교한 것을 보이고 있다. 그림 6에서 압축응력이 작용하는 x_1 축과 x_2 축의 거동은 본 모델과 Yazdani 등의 모델이 모두 실험결과와 잘 일치하고 있으며 직접 하중이 작용하지 않는 인장변형축(x_3)의 거동은 본 모델이 실험결과보다 큰 변형을 일으키고 있다.

그림 7에는 두축의 응력비가 (-1.0 : -0.52)인 이축압축응력상태에 대한 비교로써 Kupfer 등의 실험결과와 Ishikawa 등의 모델, Yazdani 등의 모델과 본 모델의 결과를 비교하였다. 그림 7에서 Ishikawa 등은 하중이 작용하는 축 즉 x_1 축과 x_2 축에 대한 결과를 비교하였고 Yazdani 등의 x_1 축과 하중이 작용하지 않는 x_3 축에 대한 결과를 비교하고 있다. 이 그림으로부터 큰 하중이 작용하는 축의 거동은 실험결과와 세 모델이 모두 근사한 결과를 보이고 있으며 작은 하중이 작용하는 축의 거동은 Ishikawa 등의 모델이 작은 변형을 주고

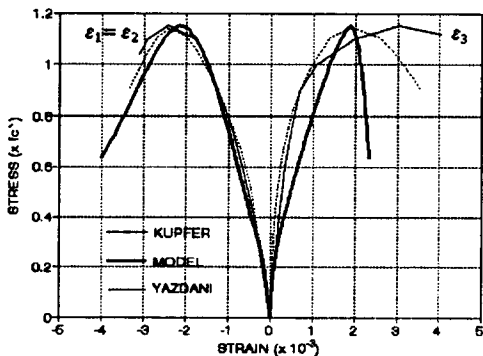


그림 6. 이축압축응력(-1.0 : -1.0)의 거동

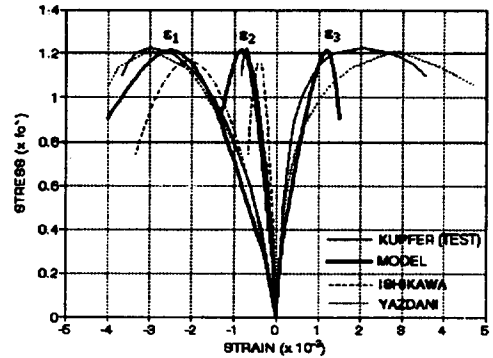


그림 7. 이축압축응력(-1.0 : -0.52)의 거동

있으나 본 모델은 실험결과와 일치하는 거동을 보이고 있다. 또한 하중이 직접 작용하지 않는 x_3 축 인장변형축의 경우 본 모델과 Yazdani 등의 모델은 중간응력 이후 실험결과보다 큰 변형을 보이며 특히 Yazdani 등의 결과는 최대응력에 가까울수록 과도한 변형을 보이고 있다.

이축응력을 받는 경우중에서 한축(x_1)은 압축을 받고 다른 한축(x_2)은 인장을 받는 경우에 대하여 본 모델을 이용하여 계산하였고, 그 결과를 그림 8과 그림 9에 나타내었다. 그림 8은 두축의 응력비가 (-1.0 : 0.052)일 때의 거동을 나타내고 있다. 또 그림 9는 두축의 응력비가 (-1.0 : 0.204)인 경우의 거동을 도시하였다. 이들 그림으로부터 볼 때 일축압축-일축인장인 두가지 응력비의 경우에 대하여 본 모델의 결과가 실험결과와 유사한 거동을 모형화하고 있다.

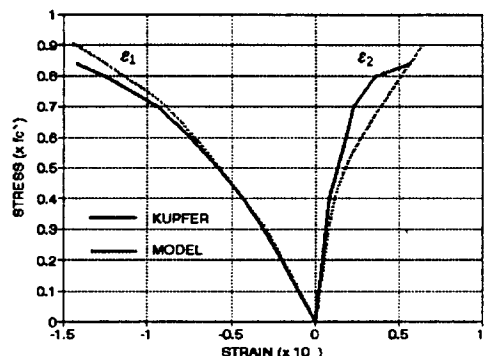


그림 8. 이축(압축-인장, -1.0 : 0.052)응력의 거동

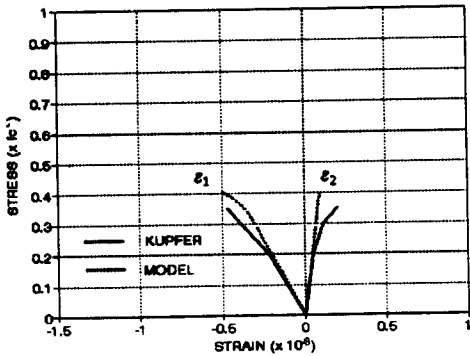


그림 9. 이축(압축-인장, -1.0 : 0.204)응력의 거동

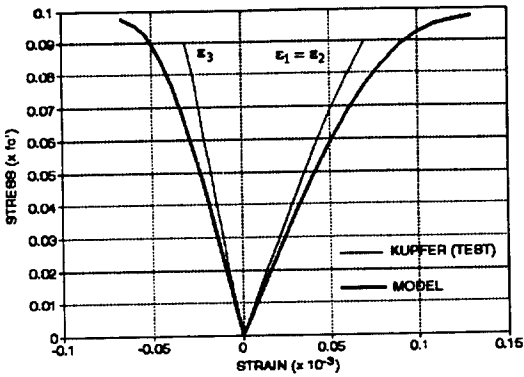


그림 10. 이축(압축-인장, 1.0 : 1.0)응력의 거동

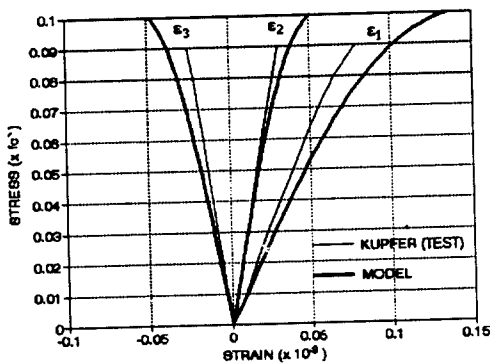


그림 11. 이축(압축-인장, 1.0 : 0.55)응력의 거동

두축이 모두 인장인 경우로써 응력비가 (1.0 : 0.55)인 경우에 대하여 실험치와 비교하였다. 그림 10은 두축의 응력비가 (1.0 : 1.0)인 경우의 응

력-변형을 거동을 보이고 있다. 또한 두축의 응력비가 (1.0 : 0.55)인 경우에 대하여 그림 11에 응력-변형을 거동을 나타내었다. 이축응력에 의한 비교로부터 볼 때 이축압축응력의 거동에 대하여 하중이 작용하는 축의 거동은 잘 나타내고 있으며 하중이 직접 작용하지 않은 축에서는 인장변형이 극한하중이전에 실험치에 비해 약간 크게 발생한 것과 극한하중이후의 거동이 실험에 비하여 보다 취성거동을 보이는 것을 제외하고는 실험결과와 잘 일치하고 있다.

6. 결 론

콘크리트의 탄소성 손상거동을 모형화하기 위하여 열역학 법칙의 자유 에너지함수와 소산 포텐셜로부터 손상의 전개법칙을 유도하였고 손상에너지해방률의 함수로 표현된 손상면을 적용하여 이방성 손상의 구성방정식을 유도하였다. 유도된 손상의 구성방정식이 콘크리트의 소성거동을 표현할 수 있도록 콘크리트의 소성모델을 도입하여 탄소성 손상 구성방정식을 완성하였다.

유도된 탄소성 손상모델을 유한요소해석 프로그램에 적용하여 일축과 이축의 여러 응력상태하에 있는 콘크리트의 비선형 거동에 대하여 유한요소해석을 실시하였고, 실험결과 및 타모델의 결과와는 비교로부터 개발된 모델을 검증하였다.

참 고 문 헌

- [1] Kachanov, L.M., *Introduction to Continuum Damage Mechanics*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1986.
- [2] Rabotnov, Y.N., *Creep Problems in Structural Members*, Amsterdam, North Holland Publishing Co., 1969.
- [3] Krajcinovic, D., "Distributed Damage Theory of Beams in Pure Bending," *J. Applied Mechanics*, Vol.46, ASME, 1979, pp.592-596.
- [4] Loland, K.E., "Continuous Damage Model for Load-Response Estimation of Concrete," *Cement and Concrete Research*, Vol.10, 1980, pp.395-402.

- [5] Mazars, J., "Mechanical Damage and Fracture of Concrete Structures," *5th Int. Conf. on Fracture*, Cannes, 1980.
- [6] Lorrain, M. and Loland, K.E., "Damage Theory Applied to Concrete," *Fracture Mechanics of Concrete*, 1983, pp.341-369.
- [7] Krajcinovic, D. and Fonseka, G.U., "The Continuous Damage Theory of Brittle Materials Part 1 : General Theory," *J. Applied Mechanics*, ASME, Dec. 1981, pp.809-815.
- [8] Fonseka, G.U. and Krajcinovic, D., "The Continuous Damage Theory of Brittle Materials Part 2 : Uniaxial and Plane Response Model," *J. Applied Mechanics*, ASME, Dec. 1981, pp.816-824.
- [9] Mazars, J., "A Description of Micro and Macroscale Damage of Concrete Structures," *Eng. Fracture Mechanics*, Vol.25, No.5 /6, 1986, pp.729-737.
- [10] Klisinski, M. and Mroz, Z., "Description of Inelastic Deformation and Degradation of Concrete," *Int. J. Solids & Structures*, Vol.24, No.4, 1988, pp.391-416.
- [11] Yazdani, S. and Schreyer H.L., "An Anisotropic Damage Model with Dilatation for Concrete," *Mechanics of Materials*, Vol.7, North-Holland, 1988, pp.231-244.
- [12] Ramtani, S., Berthaud, Y., and Mazars, J., "Orthotropic Behavior of Concrete with Directional Aspects : Modelling and Experiments," *Nuclear Engineering & Design*, 133, 1992, pp.97-111.
- [13] Suaris, W., Ouyang, C., and Fernando, V. M., "Damage Model for Cyclic Loading of Concrete," *J. Engineering Mechanics*, Vol.116, No.5, ASCE, May 1990, pp.1020-1035.
- [14] Abu-Lebdeh, T.M. and Voyiadjis, G.Z., "Plasticity-Damage Model for Concrete under Cyclic Multiaxial Loading," *J. of Engineering Mechanics*, Vol.119, No.7, ASCE, July 1993, pp.1465-1484.
- [15] Murakami, S. and Ohno, N., "A Continuum Theory of Creep and Creep Damage," *Creep in Structures*, IUTAM, 3rd Symposium Leicester /UK, Eds. Ponter and Hayhurst, 1980, pp.422-444.
- [16] Sidoroff, F., "Description of Anisotropic Damage Application to Elasticity," *IUTAM Colloquium on Physical Nonlinearities in Structural Analysis*, Springer-Verlog, Berlin, 1981, pp.237-244.
- [17] Chow, C.L. and Wang, J., "An Anisotropic Theory of Continuum Damage Mechanics for Ductile Fracture," *Engineering Fracture Mechanics*, Vol.27, No.5, 1987, pp.547-558.
- [18] Lee, H., Peng, K., and Wang, J., "An Anisotropic Damage Criterion for Deformation Instability and Its Application to Forming Limit Analysis," *Engineering Fracture Mechanics*, Vol.21, No.5, 1985, pp.1031-1054.
- [19] Chow, C.L. and Lu, T.J., "On Evaluation Laws of Anisotropic Damage," *Engineering Fracture Mechanics*, Vol.34, No.3, 1989, pp.679-701.
- [20] Chen, W.F., *Plasticity in Reinforced Concrete*, McGraw-Hill, New York, 1982.
- [21] Han, D.J. and Chen, W.F., "A Nonuniform Hardening Plasticity Model for Concrete Materials," *Mechanics of Materials* 4, North-Holland, 1985, pp.283-302.
- [22] Kupfer, H., Hilsdorf, H.K., and Rusch, H., "Behavior of Concrete under Biaxial Stresses," *ACI Journal*, Vol.66, No.6, 1969, pp.656-666.
- [23] Ishikawa, M., Yoshikawa, H., and Tanabe, T., "The Constitutive Model in Terms of Damage Tensor," *Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Structures*, Proceedings of ASCE, Ed. by Meyer, C. and Okamura, H., Tokyo, Japan, May 21-24, 1985, pp.93-103.
- [24] Yazdani, S. and Schreyer, H.L., "Combined Plasticity and Damage Mechanics Model for Plain Concrete," *J. Engineering Mechanics*, 116, No.7, ASCE, Jul. 1990, pp.1435-1450.

(접수일자 : 1995. 12. 1)