

단일방향 복합재료의 공유면에 존재하는 모서리 균열의 경계요소해석

Boundary Element Analysis of Stress Intensity Factor for Interface Edge Crack in A Unidirectional Composite

이 상 순*
Lee, Sang-Soon
김 정 규**
Kim, Jung-Gyu

요 약

이 논문에서는 경계요소법을 사용하여 횡방향의 인장변형률을 받는 단일방향 graphite /epoxy 복합재료의 섬유와 기지의 공유면에 존재하는 모서리 균열에 대한 응력확대계수를 계산하였다. 그러한 균열은 복합재료의 자유경계면에서 발생하는 특이 응력들에 의해 야기될 수 있다. 응력확대계수의 크기는 균열 길이가 작은 경우에는 균열 길이에 따라 조금씩 증가되다가, 균열길이가 커지면 일정한 값에 이르게된다.

Abstract

The overall stress intensity factor for edge crack located at the interface between fiber and matrix of a unidirectional graphite /epoxy laminate model subjected to a transverse tensile strain have been computed using the boundary element method. Such crack might be generated due to a stress singularity in the vicinity of the free surface. The amplitude of complex stress intensity factor has the constant value at large crack lengths.

1. 서 론

서로 다른 탄성체들로 구성된 복합재료는 고등 공학구조체에 많이 사용되고 있다. 일반적으로 복합재료의 균열은 복합재료의 섬유(fiber)와 기지(matrix)사이의 공유면에서 많이 발생하기 때문에, 그러한 공유면에 놓여 있는 균열에 대한 연구

는 구조물의 안전과 수명을 예측하는데 매우 중요하다고 볼 수 있다.

공유면에 존재하는 계면균열은 오랫동안 많은 관심을 받아왔다¹⁻⁶⁾ 여러가지 계면균열 문제에 대한 해들이 발표되었는데, 그들의 대부분은 단순한 형상과 경계조건을 갖는 것들이었다. 보다 일반적인 형상과 하중조건을 갖는 문제를 해석하기 위해

* 한국원자력연구소, 원자로기계분야, 선임연구원

** 한국원자력연구소, 원자로기계분야, 연구원

• 이 논문에 대한 토론을 1996년 9월 30일까지 본 학회에 보내주시면 1997년 3월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

서 수치해석방법이 사용되고 있는데, 경계요소법은 계면균열 문제에 효과적으로 응용되어 왔다. Lee와 Choi⁷⁾는 종속영역법을 사용하여 계면균열 문제를 접근하였다. 그들은 균열 선단부분에서의 거동을 나타내기 위해서 표준 이차요소(standard quadratic element)를 사용하였는데, 그러한 경우에는 균열 선단부분을 모델링하는데 매우 많은 요소들이 필요하고 정확도도 떨어지는 단점이 있다. Blandford 등⁸⁾이 설명했던 것처럼, 균열 선단에서의 거동을 잘 나타내기 위해서는 특별한 요소가 사용되어야 한다. Yuuki와 Cho⁹⁾는 Hetenyi 기본해를 사용한 경계요소법을 이용하여 계면균열의 응력확대계수를 계산하였다. Tan과 Gao¹⁰⁾, 그리고 Raveendra와 Benerjee¹¹⁾는 균열 선단에 대해 이차 사분점 요소(quadratic quarter-point element)를 적용하여 매우 정확한 결과를 얻었다. Miyazaki 등¹²⁾은 경로적분법을 사용하여 응력확대계수를 계산하였다.

본 논문에서는 경계요소법을 사용하여, 서로 다른 탄성체들이 무한하게 적층된 단일방향 복합재료에 횡방향 인장변형률이 작용하고 있을 때, 자유경계면(free surface) 근처에 존재하는 모서리 균열에 대한 응력확대계수를 조사하였다. 그러한 균열은 복합재료의 자유경계면에서 발생하는 특이응력들에 의해 야기될 수 있다. 즉, 균열이 없는 단일방향 복합재료에 횡방향 하중이 작용하는 경우에, 섬유와 기지의 공유면에 따라 발생하는 응력들은 자유 경계면 가까이에 이르러 크기가 급속히 커지는데, 이러한 특이응력은 자유 경계면 가까이에서 결합분리를 야기시킬 수 있다. 따라서 단일방향 복합재료의 안전성을 예측하기 위해서는 자유경계면에서의 특이응력과 모서리 균열에 대한 조사가 매우 중요하다고 볼 수 있다. 해석을 수행하는데 있어서, 먼저 이차원 해석모델과 관련 경계조건들을 제시하였고, 다음에 종속영역법을 도입하여, 해석모델을 독립된 탄성영역들로 나눈 다음, 공유면에 변위 연속조건과 표면력 평형조건을 적용하여, 경계요소공식을 나타내었다. 제시한 수치해석 결과는 단일 방향 복합재료에 나타나는 특이응력의 특성과 모서리 균열에 대한 응력확대계수를 나타내어 준다.

2. 단일 방향 복합재료에 대한 경계요소공식

그림 1-(a)는 무한하게 적층된 단일 방향 복합재료에 횡방향 인장변형률이 작용하는 것을 나타내고 있으며, 그림 1-(b)는 해석모델을 보여주고 있다. 여기에서 복합재료는 이차원 평면 변형률 상태에 있다고 가정한다. 해석모델은 섬유와 기지의 공유면에 따라 길이가 a인 모서리 균열을 포함하고 있다. 어떠한 체력(body forces)도 존재하지 않는다는 가정아래, 해석모델에 대한 경계적분방정식은 다음과 같이 주어진다.

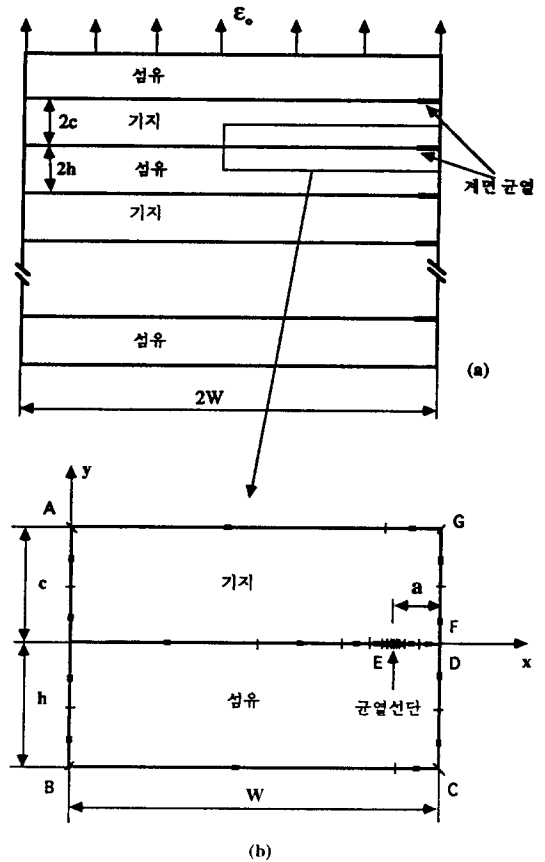


그림 1 모서리 계면균열을 갖는 단일방향 복합재료의 해석 모델

섬유영역에 대해서,

$$c_{ij}^f(\mathbf{y}) u_j^f(\mathbf{y}) + \int_{S^f} u_j^f(\mathbf{y}') T_{ij}^f(\mathbf{y}, \mathbf{y}') dS^f(\mathbf{y}') = \int_{S^f} t_j^f(\mathbf{y}') U_{ij}^f(\mathbf{y}, \mathbf{y}') dS^f(\mathbf{y}') \quad (1)$$

이고,

기지영역에 대해서,

$$c_{ij}^m(\mathbf{y}) u_j^m(\mathbf{y}) + \int_{S^m} u_j^m(\mathbf{y}') T_{ij}^m(\mathbf{y}, \mathbf{y}') dS^m(\mathbf{y}') \\ = \int_{S^f} t_j^m(\mathbf{y}') U_{ij}^m(\mathbf{y}, \mathbf{y}') dS^m(\mathbf{y}') \quad (2)$$

이다. 식(1)과 (2)에서 윗 첨자 'f'와 'm'은 각각 섬유와 기지를 가리키고, u_i 와 t_i 는 각각 경계면에서의 변위와 표면력(traction)을 나타내며, S 는 주어진 문제의 경계면을 가리킨다. $c_{ij}(\mathbf{y})$ 는 경계면의 기하학적 형상에만 의존하는 함수이다. $U_{ij}(\mathbf{y}, \mathbf{y}')$ 와 $T_{ij}(\mathbf{y}, \mathbf{y}')$ 들은 탄성학에서 얻어진 켈빈(Kelvin) 문제의 기본해들이다.

일반적으로, 식(1)과 (2)에 대한 정밀해를 구하는 것은 불가능하기 때문에 수치적분이 사용되어야 한다. 이 논문에서는 변위와 표면력, 그리고 기하학적 형상을 나타내기 위해서 이차 형상함수(quadratic shape functions)를 사용하였다. 응력 확대계수는 균열 선단부근에서의 응력이나 변위로 부터 계산될 수 있다. 서론에서 설명한 것처럼, 균열 선단 부근의 거동을 정확히 나타내기 위해서는 특수 경계요소가 사용되어야 한다. 이 논문에서는, 균열선단에서의 변위를 나타내기 위해서 사분점 경계요소를 사용하였고, 균열선단의 응력을 나타내기 위해서 표면력 특이 사분점 경계요소(traction singular quarter-point element)를 사용하였다. 이러한 경계요소에 대한 자세한 설명과 수치해석 결과들은 참고문헌[8], [10], [11]들에 나타나 있다. 식(1)과 (2)는 다음과 같은 행렬 방정식으로 쓸 수 있다. 즉,

섬유영역에서는

$$[H^1 \ H^{12}] \begin{bmatrix} u^1 \\ u^{12} \end{bmatrix} = [G^1 \ G^{12}] \begin{bmatrix} t^1 \\ t^{12} \end{bmatrix} \quad (3)$$

이고,

기지영역에서는

$$[H^2 \ H^{21}] \begin{bmatrix} u^2 \\ u^{21} \end{bmatrix} = [G^2 \ G^{21}] \begin{bmatrix} t^2 \\ t^{21} \end{bmatrix} \quad (4)$$

이다. 식(3)과 (4)에서, 윗 첨자 '1'과 '2'는 각각 섬유영역과 기지영역을 가리키고, '12'와 '21'는 두 영역의 공유면을 나타내며, H 와 G 는 각각의 영역에서의 영향행렬들을 나타낸다.

두 영역의 공유면에서는 변위의 연속조건과 표면력의 평형조건이 만족되어야 하는데, 그와 같은 조건들은 다음과 같이 주어진다.

$$u^{21} = u^{12} \\ t^{12} = -t^{21} \quad (5)$$

식(5)를 식(3)과 (4)에 대입하여 정리하면, 다음과 같은 행렬 방정식이 얻어진다.

$$\begin{bmatrix} H^1 & H^2 & 0 & G^{12} \\ 0 & H^{21} & H^2 & -G^{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^1 \\ u^{12} \\ u^2 \\ t^{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G^1 & 0 \\ 0 & G^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t^1 \\ t^2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

식(6)에 경계조건들을 적용하여 계산하면, 경계면에서의 변위와 표면력들을 얻을 수 있다. 해석모델의 대칭성으로 부터 각 경계면에서의 전단응력은 0으로 나타난다. 이러한 조건하에서, 해석모델에 대한 경계조건들은 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} \text{A-B면에서} \quad & \tau_{xy}=0, \quad u_x=0 \\ \text{B-C면에서} \quad & \tau_{xy}=0, \quad u_y=0 \\ \text{C-D와 F-G면에서} \\ & \sigma_{xx}=0, \quad \tau_{xy}=0 \\ \text{D-E와 E-F면에서} \\ & \sigma_{yy}=0, \quad \tau_{xy}=0 \\ \text{G-A면에서} \quad & \tau_{xy}=0, \quad u_y=(h+c)\epsilon_0 \end{aligned} \quad (7)$$

경계조건식(7)을 식(6)에 적용하여 풀면, 경계면과 공유면에서의 응력과 변위를 구하게 된다.

3. 응력확대계수의 계산

그림 2는 계면균열을 보여주고 있다. 균열 선단부근에서의 응력들은 다음과 같이 표현된다⁵⁾ :

$$[\sigma_{yy} + i \tau_{xy}]_{\theta=0} = \frac{K_1 + iK_2}{\sqrt{2\pi r}} \exp\{i\epsilon \ln(\frac{r}{l})\} \quad (8)$$

식(8)에서 r 는 균열 선단으로 부터의 거리를 나타내고, l 은 r 을 정규화시키는 임의의 길이이다. $i = \sqrt{-1}$ 이고, K_1 과 K_2 는 복합응력확대계수 $K (=K_1+iK_2)$ 를 나타내며,

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{1}{2\pi} \ln(\gamma) \\ \gamma &= \frac{\kappa_1 \mu_2 + \mu_1}{\kappa_2 \mu_1 + \mu_2} \\ \kappa_i &= 3 - 4\nu_i \text{ (평면변형)} \\ &= \frac{3 - \nu_i}{1 + \nu_i} \text{ (평면응력)} \quad (i=1,2) \end{aligned} \tag{9}$$

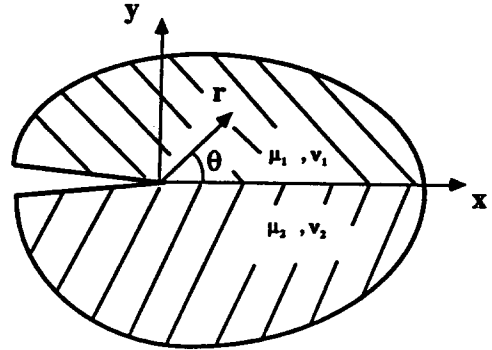


그림 2 계면균열 선단부근

이다. μ 와 ν 는 전단계수와 포아손 비를 가리키고, 아래 첨자들은 각각의 영역을 나타낸다.

균열 면들 사이의 상대변위는 다음과 같이 주어진다⁵⁾ :

$$\begin{aligned} [\Delta u_x + i\Delta u_y] &= \frac{K_1 + iK_2}{2(1+2i\varepsilon)\cosh(\pi\varepsilon)} \\ & \left[\frac{\kappa_1 + 1}{\mu_1} + \frac{\kappa_2 + 1}{\mu_2} \right] \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \exp \\ & \{i\varepsilon \ln\left(\frac{r}{l}\right)\} \end{aligned} \tag{10}$$

여기에서

$$\Delta u_j = u_j(r, \pi) - u_j(r, -\pi), \quad (j=x, y) \tag{11}$$

이다.

응력확대계수는 식(8) 또는 (10)을 이용하여, 균열 선단부근에서의 변위나 응력으로 부터 계산할 수 있다. 이 논문에서는 식(10)을 이용하여, 균열 선단부근의 상대변위로부터 응력확대계수를 다음과 같이 계산하였다.

$$\begin{aligned} K^* = |K| &= \sqrt{K_1^2 + K_2^2} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{2\cosh(\pi\varepsilon)}{\left[\frac{\kappa_1 + 1}{\mu_1} + \frac{\kappa_2 + 1}{\mu_2} \right]} \\ & \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \sqrt{(1+4\varepsilon^2)(\Delta u_x^2 + \Delta u_y^2)} \end{aligned} \tag{12}$$

4. 수치해석 예제

4.1 중앙균열문제

3장에서 설명한 방법을 이용하여 경계요소법으로 계산한 응력확대계수의 정확성을 보이기 위하여, 크기가 $2a$ 인 계면균열을 갖는 무한평판에 $(\sigma_{yy})_\infty$ 가 작용하는 문제를 선택하였다(그림 3). 이 문제에 대한 정밀해는 다음과 같이 주어진다³⁾.

$$K^* = (\sigma_{yy})_\infty \sqrt{\pi a} \sqrt{1 + \varepsilon^2} \tag{13}$$

위 식의 ε 는 식(9)에서 설명되었다. 정밀해 (13)은 그림 3-(b)에 나타난 바와같이 무한평판의 각 영역에서 다음과 같은 응력점프를 가정하여 계산한 식이다.

$$\begin{aligned} (\sigma_{xx})_2 &= \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{1 - \nu_1}{1 - \nu_2} (\sigma_{xx})_1 + \left[\frac{\nu_2}{1 - \nu_2} - \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{\nu_1}{1 - \nu_2} \right] \\ \{ \sigma_{yy} \}_\infty \end{aligned} \tag{14}$$

수치해석에서 사용된 물성값들은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\mu_2}{\mu_1} &= 2, 10, 73 \\ \nu_1 &= 0.38 \\ \nu_2 &= 0.2 \end{aligned} \tag{15}$$

그림 3-(b)에서 $W=19a$ 와 $H=16a$ 로 가정되었고, $a=0.5$ 에 대해서 36개의 이차 경계요소가 사용되었다.

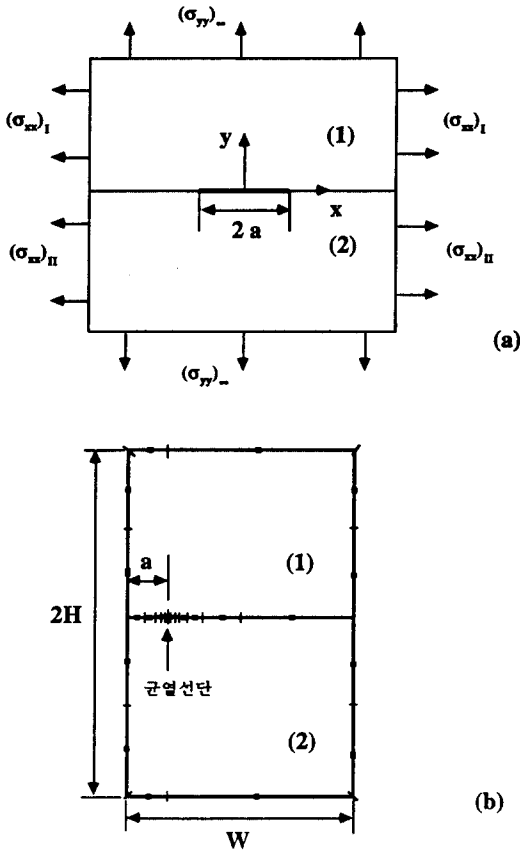


그림 3 중앙 계면균열 해석모델

표 1 경계요소법에 의해 계산된 중앙계면균열에 대한 응력 확대계수의 수치오차

μ_2 / μ_1	수치오차(%)
2	<1.5
10	<1.5
73	<1.5

표 1은 경계요소해석에 의해 계산된 응력확대계수를 나타내고 있는데, 선택된 μ_2 / μ_1 범위에서 경계요소해석의 결과는 정밀해와 비교하여 1.5%이하의 수치오차를 보이고 있다.

4.2 단일방향 복합재료문제

4.2.1 예제1-균열길이 a=0

횡방향 변형률 ϵ_x 를 받고 있는 단일방향 복합재

료의 공유면 모서리에서의 거동을 알아보기 위해서, 균열이 없는 상태의 해석모델(그림 1-(b)에서 균열길이 a=0인 경우)을 택하여 수치해석을 수행하였다. 그림 1-(b)에서 h=c와 W=12.5h로 가정되었고, 36개의 이차 선요소(quadratic line elements)가 사용되었다. 수치해석에서 사용된 물성값들은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\mu^f}{\mu^m} &= 100 \\ v^m &= 0.29 \\ v^f &= 0.24 \end{aligned} \tag{16}$$

식(16)에서 'f'와 'm'은 각각 섬유와 기지를 나타낸다.

그림 4는 공유면에서의 수직응력 σ_{yy} 와 전단응력 τ_{xy} 의 변화를 보여주고 있다. 섬유와 기지의 공유면에 따라 발생하는 응력들은 자유 경계면 가까이에서 이르러 크기가 급속히 커지고 있다. 이러한 특이응력들은 섬유나 기지의 두께에 비하여 비교적 작은 길이에 걸쳐서 나타나는 국소적인 현상이긴 하지만, 자유 경계면 가까이에서 결함분리 또는 모서리 균열을 야기시킬 수 있다.

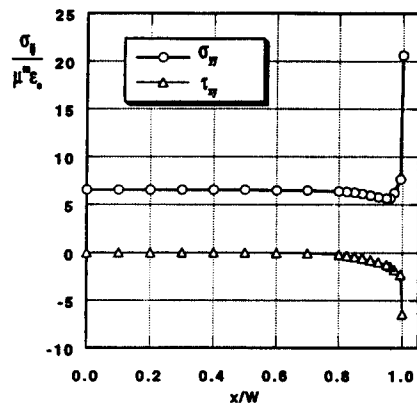


그림 4 섬유와 기지의 공유면에서의 응력변화

4.2.2 예제 2-균열길이 a>0

기술상의 흥미와 중요성때문에 현재 많이 사용되고 있는 graphite/epoxy 복합재료가 선택되었다. 수치해석에서 사용된 물성값들은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 K^f &= 224,000 \text{ MPa} & (17) \\
 \nu^f &= 0.29 \\
 E^m &= 3,200 \text{ MPa} \\
 \nu^m &= 0.35
 \end{aligned}$$

식(17)에서 K는 체적계수를, 그리고 E와 ν 는 인장탄성계수와 포아손 비를 나타낸다.

그림 1-(b)의 해석모델을 사용하여 해석을 수행하였다. 경계조건은 식(7)에 나타나 있다. 이 예제에서는 $h=0.0127\text{mm}$ 와 $(W-a) > 9h$ 의 조건이 사용되었다. 그림 5는 균열길이에 따른 K^* 의 변화를 보여주고 있다. 균열 길이가 작을 경우에는 균열 길이에 따라 응력확대계수의 크기가 조금씩 증가되다가, 일정한 값에 이르게 된다.

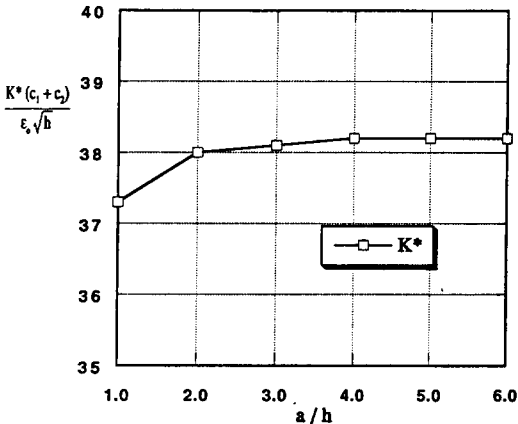


그림 5 균열길이에 따른 응력확대계수의 크기변화 :

$$c_1 = \frac{\kappa_1 + 1}{\mu_1} ; c_2 = \frac{\kappa_2 + 1}{\mu_2} ;$$

5. 결 론

본 논문에서는 경계요소법을 사용하여, 단일방향 복합재료에 횡방향 인장변형률이 작용하고 있을 때 발생할 수 있는 파단과정을 조사하였다. 균열이 없는 단일방향 복합재료에 횡방향 하중이 작용하는 경우에, 섬유와 기지의 공유면에 따라 발생하는 응력들은 자유 경계면 가까이에 이르러 크기가 급속히 커지는데, 이러한 특이응력은 자유 경계면 가까이에서 결합분리 또는 모서리 균열을 야기시킬 수 있다. 따라서 단일방향 복합재료의

안정성을 예측하기 위해서는 자유 경계면에서의 특이 응력과 모서리 균열에 대한 조사가 매우 중요하다고 볼 수 있다. 자유 경계면 근처에 존재하는 모서리 균열에 대한 응력확대계수를 조사하였다. 응력확대계수의 크기는 균열 길이가 작은 경우에는 균열 길이에 따라 조금씩 증가되다가, 균열 길이가 커지면 일정한 값에 이르게 된다.

본 논문에서는 기술상의 중요성 때문에 graphite/epoxy복합재료가 사용되었지만, 다른 종류의 복합재료 뿐만 아니라 유사한 형태의 복합구조체에도 여기에서 기술된 방법들이 활용될 수 있다.

참 고 문 헌

- [1] Erdogan, F., "Stress Distribution in Bonded Dissimilar Materials with Cracks", *J. Applied Mechanics*, 32, 1965, pp.403-410
- [2] England, A.H., "A Crack Between Dissimilar Media", *J. Applied Mechanics*, 32, 1965, pp. 400-402.
- [3] Rice, J.R. and Sih, G.C, "Plane Problems of Cracks in Dissimilar Media", *J. Applied Mechanics*, 32, 1965, pp.418-422.
- [4] Comninou, M., "The Interface Crack", *J. Applied Mechanics*, 44, 1977, pp.631-636.
- [5] Rice, J.R., "Elastic Fracture Mechanics Concepts for Interfacial Cracks", *J. Applied Mechanics*, 55, 1988, pp.98-103.
- [6] Comninou, M., "An Overview of Interface Cracks", *Engineering Fracture Mechanics*, 37, 1990, pp.197-208.
- [7] Lee, K.Y. and Choi, H.J., "Boundary Element Analysis of Stress Intensity Factors for Bimaterial Interface Cracks", *Engineering Fracture Mechanics*, 29, 1988, pp.461-472.
- [8] Blandford, G.E. Ingrassia A.R. and Liggett, J.A., "Two-dimensional Stress Intensity Factor Computations Using The Boundary Element Method", *Int., J. Numer. Methods Engr.*, 17, 1981, pp.387-404.
- [9] Yuuki, R. and Cho, S.B., "Efficient Boundary Element Analysis of Stress Intensity Factors for Interface Cracks in Dissimilar Materials", *Engineering Fracture Mechanics*, 34, 1989, pp.

- 179-188.
- [10] Tan, C.L. and Gao, Y.L., "Treatment of Bimaterials Interface Crack Problems Using the Boundary Element Method", *Engineering Fracture Mechanics*, 36, 1990, 919-932.
- [11] Raveendra, S.T. and Banerjee, P.K., "Computation of Stress Intensity Factor for Interfacial Cracks", *Engineering Fracture Mechanics*, 40, 1991, pp.89-103.
- [12] Miyazaki, N. Ikeda, T. Soda, T. and Munakata, T., "Stress Intensity Factor Analysis of Interface Crack Using Boundary Element Method-Application of Contour-Integral Method", *Engineering Fracture Mechanics*, 45, 1993, pp.599-610.

(접수일자 : 1995. 12. 7)