

서로 다른 두 재료의 접합면에 수직인 균열의 경계요소 해석

Boundary Element Analysis of a Crack Normal at the Bondline of Two Dissimilar Materials

임 원 균*
Lim, Won-Kyun
이 현 규**
Lee, Hyun-Kyu

.....
요 약

서로 다른 두 재료의 접합면에 균열이 수직으로 위치하고 있을 때, 균열에서의 응력특이성차수는 두 재료의 재료특성치에 따라서 변화하게 된다. 이와 같은 균열문제를 해석하기 위하여 다영역경계요소법을 사용하였다. 균열을 포함하는 등매개 경계요소 중간절점의 위치를 적절히 이동하여 놓음으로써 변위에 대한 정확한 형상함수를 나타내었으며, 아울러 트랙션에 대해서도 정확한 보간차수를 나타내도록 시도하였다. 3절점 경계요소를 이용하여 수치해석을 수행하였으며, 이의 결과를 기존의 해석결과와 비교 검토하였다.

Abstract

In the particular situations where the crack is terminated at an interface of two materials, the order of stress singularity depends on the elastic constants which specify the properties of two materials. A multidomain boundary element technique is used to solve a crack normal to bimaterial interface. A correct order of shape function is used for displacement by using the isoparametric elements by shifting adequately the side nodes adjacent to this crack tip. A shape function containing the same order of singularity as that in the interface crack is also used for the interpolation of traction. Numerical testing of a binaterial with a crack normal to the interface is carried out with three-node elements. The results obtained are compared with the previous solutions.

* 명지대학교 기계공학과 교수
** 대우 중공업(주) 중앙연구소 소재기술실 연구원

이 논문에 대한 토론을 1996년 9월 31일까지 본 학회에 보내주시면 1997년 3월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

1. 서 론

서로 다른 두 탄성재료의 접합면에 수직인 균열에서의 응력특이성 차수는 등방성재료내 균열선단에서의 것과는 달리 항상 0.5가 아니며, 이는 두 재료의 재료특성치, 즉 전단탄성계수와 포와송비의 비율에 따라서 0에서 1까지 변화한다.¹⁾ 만약 균열이 두 재료중 보다 연한 재료에 위치한다면 특이성 차수는 0.5보다 작고, 이와 반대의 위치에 균열이 있는 경우에는 0.5보다 크다. 이러한 특이성의 차수가 변화하는 문제들에 대한 정확한 수치해를 얻기 위해서는 균열선단에서의 정확한 특이성 모델링이 가능한 특이요소가 필요하게 된다.

이와 같이 균열선단요소에 이론적 특이성을 부과하기 위한 연구가 여러 문헌^{2,6)}에 보고되고 있다. 그러나 이들 특이요소들은 균열선단에서 이른바 특이성을 얻기 위하여 많은 수의 요소분할을 요구하고 있지 않으나, 이들이 이웃하는 표준요소와 결합하였을 때의 적합조건과 수렴을 위한 필요조건을 만족하고 있지 않다는 단점이 있다.⁷⁾

한편 Abdi 등⁸⁾은 Barsoum⁹⁾과 Henshell 등¹⁰⁾이 등방성재료내 균열을 해석하기 위하여 제안한 1/4절점 등매개 요소, 즉 등매개 2차 유한요소에서 균열선단을 포함하는 변의 중간절점의 위치를 1/4만큼 균열선단 쪽으로 이동하여 놓음으로써 균열선단에서의 특이성을 간단하게 나타낼 수 있는 수법을 이중재료내의 접합면에 수직인 균열문제에 확장 적용하여, 중간절점의 위치 이동에 따라서 변화하는 특이성의 차수를 효과적으로 나타낼 수 있음을 보였으며, 임원균등^{11,12)}은 변화하는 특이성을 나타내기 위한 중간절점의 최적위치를 보다 간편하게 구할 수 있는 방법을 제안하고 이들 균열에서의 응력확대계수를 구하였다.

이와 같은 변위를 기초로한 유한요소법에서 응력들은 변위에 대한 형상 함수를 미분함으로써 얻어진다. 따라서 위치 이동한 균열요소 중간절점의 등매개 형상함수는 변위 및 응력 모두에 대하여 정확한 보간차수를 나타낸다. 그러나 경계요소 방정식에서는 변위와 표면력이 독립적으로 보간된다.

본 연구에서는 위에서 언급한 적합요소인 등매

개 2차요소를 이용한 경계요소 해법을 적용하여 특이성 차수가 변화하는 이중재료 접합면에 수직인 균열문제를 해석하였다. 이를 위하여 균열을 포함하는 경계요소들이 균열선단에서의 변위와 표면력에 대한 정확한 보간차수를 나타내도록 시도하였다. 그리고 이들의 해석 결과로부터 균열면을 따르는 개구변위의 값과 균열면상의 절점변위를 이용한 응력확대계수를 계산하였으며, 이들의 정확도에 대해서 기존의 해석 결과와 비교 검토하였다.

2. 접합면 균열에서의 응력특이성차수

두개의 서로 다른 탄성재료가 접합되어 있다고 하자. 이들 두 재료의 접합면에 균열이 수직으로 위치하는 경우, 균열에서의 응력특이성차수 β , 즉 $\lambda-1$ 은 다음의 특성방정식으로부터 얻을 수 있다.¹⁾

$$\cos\pi\beta - C_1 - \beta C_2 - \frac{1}{2}\beta(1+\beta)C_3 = 0 \quad (1)$$

$$\text{여기서, } C_1 = -\frac{1}{2} + \frac{3(1-m)}{2(1+mx_1)} + \frac{m(1+x_1)}{2(m+x_2)}$$

$$C_2 = \frac{6(m-1)}{1+mx_1}, \quad C_3 = \frac{4(1-m)}{1+mx_1}$$

$$x_1 = 3 - 4\nu_1, \quad m = \mu_2 / \mu_1$$

x_1 는 평면변형율에서 탄성재료 i에 대한 재료정수이며, μ_1 와 ν_1 는 각각 탄성재료 i에 대한 전단탄성계수와 포와송비를 나타낸다. 식 (1)로부터 응력 특이성의 차수는 두 이중재료들의 특성치, μ_2

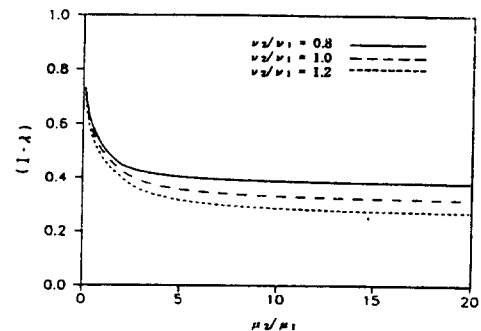


그림 1. Stress singularity exponent terms vs. shear modulus for different Poisson's ratio

μ 과 v_2/v_1 의 비에 따라 달라짐을 알 수 있으며, 이들의 변화하는 모습을 그림 1에 나타내었다.

3. 경계적분 방정식의 수치해석

2차원 탄성문제에 대한 경계적분방정식은 경계면에서의 값만을 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.¹³⁾

$$C_{ij}(S)u_j(S) + \int_{\Gamma} T_{ij}(S, Q)u_j(Q)d\Gamma(Q) = \int_{\Gamma} U_{ij}(S, Q)t_j(Q)d\Gamma(Q) \quad (2)$$

여기서 u_i, t_j 는 물체표면 Γ 상에서의 변위 및 표면력이며, U_{ij}, T_{ij} 는 각각 변위와 표면력에 대한 기본해이다.

위의 경계 적분방정식은 경계표면을 적절한 분할요소로 이산화한 경계요소 해석을 수행하여 풀 수 있다. 3절점 2차 등매개 경계요소로써 이산화되어지는 경우에, 요소내의 좌표 $x_i(\xi)$ 및 표면력 $t_i(\xi)$ 는 각각 다음과 같이 주어진다.(그림 2)

$$\begin{aligned} x_i(\xi) &= A + B\xi + C\xi^2 \\ u_i(\xi) &= A' + B'\xi + C'\xi^2 \\ t_i(\xi) & \end{aligned} \quad (3)$$

여기서 ξ 는 국소좌표로써 -1에서 1사이의 값이며, $i=1, 2$ 이다. 위의 모든 값들은 형상함수의 항으로 다음과 같이 간편하게 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} x_i(\xi) &= \sum_{\ell=1}^3 N_{\ell}(\xi)x_i^{\ell} \\ u_i(\xi) &= \sum_{\ell=1}^3 N_{\ell}(\xi)u_i^{\ell} \\ t_i(\xi) &= \sum_{\ell=1}^3 N_{\ell}(\xi)t_i^{\ell} \end{aligned} \quad (4)$$

여기서 N 은 형상함수로써 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} N_1(\xi) &= -0.5\xi(\xi-1) \\ N_2(\xi) &= (1+\xi)(1-\xi) \\ N_3(\xi) &= 0.5\xi(\xi+1) \end{aligned} \quad (5)$$

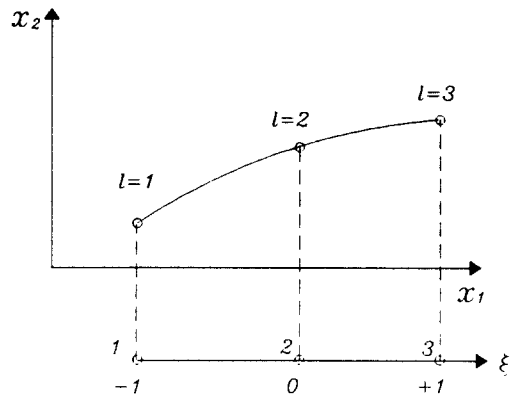


그림 2. Quadratic boundary element

4. 균열요소특이성 모델링

표준경계요소를 사용하여 균열문제를 해석하는 경우에, 균열선단 부근의 국부적인 요소분할 방법 여하에 따라 해석 결과의 정확도에 큰 영향을 준다.¹⁴⁾ 이와 같은 단점을 보완한 특이요소 해석법은 균열요소가 균열선단에서의 변위 및 표면력의 특이성을 나타내어 주도록 하는 수법으로써, 이는 균열선단 주위에서의 요소분할을 줄여줄 뿐만 아니라 수렴의 비율을 크게 향상시켜 주고 있다. 이와 같은 방법은 처음에 유한요소해석에의 적용을 위하여 시도되었으며, Abdi 등은 등매개 유한요소를 이용하여, 균열요소 중간절점의 위치를 적절히 이동시켜 놓음으로써, 이종재료 접합면에 수직으로 위치한 균열에서와 같이 변화하는 응력의 특이성을 효율적으로 나타낼 수 있음을 보이고 있다.

지금 절점 1이 균열선단인 그림 3과 같은 3절점 등매개 요소를 고려하여 보자. 이 때 x 방향의 좌표 x_1 과 변위 u_1 은 식 (4)로부터 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} x_1 &= -0.5\xi(1-\xi)x_1^1 + (1-\xi^2)x_1^2 + 0.5\xi(1+\xi)x_1^3 \\ u_1 &= -0.5\xi(1-\xi)u_1^1 + (1-\xi^2)u_1^2 + 0.5\xi(1+\xi)u_1^3 \end{aligned} \quad (6)$$

절점 1을 원점으로 하고, 요소의 길이를 L 이라 표시하면, $x_1^1=0, x_1^2=\alpha L, x_1^3=L$ 이 된다. 따라서 요

소를 따르는 x_1 좌표는 다음과 같이 된다.

$$x_1 = (1 - \xi^2)\alpha L + 0.5\xi(1 + \xi)L$$

또는 $x_1/L = \alpha + 0.5\xi + (0.5 - \alpha)\xi^2$ (7)

균질등방성체내 균열에서 응력의 특이성은 중간절점의 위치, $\alpha = 0.25$ 에 위치시키므로 얻을 수 있다. 이를 참고하여 변화하는 응력의 특이성을 나타내기 위한 x_1 좌표의 일반식은 λ 의 함으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$x_1/L = [(1 + \xi)/2]^{1/\lambda}$$

또는 $\xi = -1 + 2(x_1/L)^\lambda$ (8)

이 때 x 방향의 변위인 u_1 은 식 (8)을 식 (6)에 대입함으로써, 다음과 같이 변형된 식을 얻을 수 있다.

$$u_1 = A_0 + A_1 r^\lambda + A_2 r^{2\lambda} \quad (9)$$

여기서 $A_0 = u_1^1$, $A_1 = (-3u_1^1 + 4u_1^2 - u_1^3)/L^\lambda$, $A_2 = (2u_1^1 - 4u_1^2 + 2u_1^3)/L^{2\lambda}$ 이고, u_1^1 , u_1^2 , u_1^3 는 각각 절점 1, 2, 3에서 x 방향으로의 변위값이다. x_1 은 균열선단으로부터 임의의 한점까지의 거리 r 로 바꾸어 표시하였다.

따라서 x 방향의 변형을 ϵ_x 는 식 (9)를 r 에 대하여 미분하여 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\epsilon_x = \lambda A_1 r^{\lambda-1} + 2\lambda A_2 r^{2\lambda-1} \quad (10)$$

상기 결과식으로부터 균열선단을 포함하는 요소 1-3을 따르는 변위에 대한 변형을 성분은 $r^{\lambda-1}$ 의 특이성을 나타내고 있음을 알 수 있다.

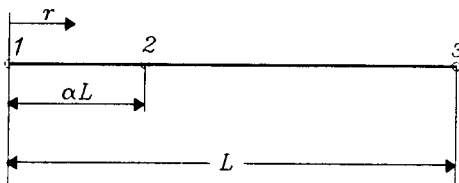


그림 3. Traction singular boundary element

앞에서도 언급하였듯이 유한요소법에서 표면력은 변위에 대한 보간함수를 미분하여 표면력에 대한 정확한 특이차수 $r^{\lambda-1}$ 을 얻을 수 있다. 그러나 경계요소법에서는 변위와 표면력이 각각 독립적으로 표시된다. 따라서 표면력 t 에 대한 식은 식 (3)으로부터 변위에 대한 관계식과 유사하게 나타낼 수 있다. x 방향의 표면력 t_1 을 표시하면 다음과 같이 나타낸다.

$$t_1 = B_0 + B_1 r^\lambda + B_2 r^{2\lambda} \quad (11)$$

여기서 $B_0 = t_1^1$, $B_1 = (-3t_1^1 + 4t_1^2 - t_1^3)/L^\lambda$, $B_2 = (2t_1^1 - 4t_1^2 + 2t_1^3)/L^{2\lambda}$ 이고, t_1^1 , t_1^2 , t_1^3 는 각각 절점 1, 2, 3에서 x 방향으로의 표면력 값이다.

이와 같이 그림 3과 같이 주어진 형상함수를 이용한 변위와 표면력은 모두 r^λ 의 차수를 가지고 있다. 변위의 차수는 균열 선단에서의 이론해의 첫 번째 차수와 일치하여 문제될 것이 없으나, 표면력은 $r^{\lambda-1}$ 의 정확한 차수를 가지고 있지 못하다. 이를 위하여 식 (11)의 우측항에 $(L/r)^{1-\lambda}$ 를 곱하여 줌으로써, 다음과 같이 간단히 표면력의 특이성을 나타내도록 할 수 있다.

$$t_1 = (B_0 + B_1 r^\lambda + B_2 r^{2\lambda})(L/r)^{1-\lambda} = C_0 r^{\lambda-1} + C_1 r^{2\lambda-1} + C_2 r^{3\lambda-1} \quad (12)$$

여기서 C_0 , C_1 , C_2 는 각각 B_0 , B_1 , B_2 에서 균열길이 L 을 곱한 값들이다.

만약 식 (12)에서 $\lambda = 0.5$ 이면, 다음과 같은 균질 등방성체 내에서의 표면력 특이성을 나타낸다.

$$t_1 = C_0 / \sqrt{r} + C_1 + C_2 \sqrt{r} \quad (13)$$

한편 특이차수 λ 에 따른 균열요소 중간절점의 위치 α 는 λ 의 함수인 식 (8)을 식 (7)과 같게 놓음으로써 구할 수 있다. 이는 Barsour이 제안한 1/4절점 특이요소수법을 특이차수가 변화하는 균열문제에 적용하는 형식이 된다. 등방성재료내 균열에서는 식 (8)과 식 (7)이 완전히 일치하여 $\lambda = 0.5$ 에서 $\alpha = 0.25$ 를 얻을 수 있으나, 그 외의 특이차수에서는 식 (8)을 식 (4)와 같은 2차식으로

근사화 해야 한다. 이와 같은 계산에 수정된 최소자승법을 이용함으로써 중간절점의 위치 α 값을 간편하게 구할 수 있다.¹¹⁾

5. 응력확대계수 결정

주어진 응력성분 σ_1 에 따른 균열선단에서의 응력확대계수 K_I 의 이론식은 다음과 같이 정의된다.

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2} r^{1-\lambda} \sigma_1(r, \theta) \quad (14)$$

특히 중요한 것은 균열선단과 인접하는 이중재료에서의 y방향으로의 응력 σ_2 이므로, $\theta=0$ 에서의 응력확대계수 K_I 는 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2} r^{1-\lambda} \sigma_2(r, 0) \quad (15)$$

$\theta=\pi$ 인 균열면을 따르는 y방향의 변위, $u_2(r, \pi)$ 와 응력, $\sigma_2(r, 0)$ 는 다음과 같은 관계를 가진다.¹⁵⁾

$$\sigma_2(r, 0) = \frac{2\lambda\mu^*u_2(r, \pi)}{r} \quad (16)$$

$$\mu^* = \mu_1 m \frac{(1-2\lambda)(m+x_2) + (1+2\lambda)(1+mx_1)}{(m+x_2)(1+mx_1)\sin\pi\lambda}$$

여기서 μ^* 는 두 재료의 특성치와 특이치수와의 대수함수를 나타내는 식이며, x_1 과 x_2 는 평면변형을 상태에서 각각 $3-1$ 과 $3-4\nu_2$ 이다.

따라서 식 (16)을 식 (15)에 대입함으로써 다음과 같이 균열면상의 변위를 성분으로 하는 응력확대계수에 대한 관계식을 얻을 수 있다.

$$K_I = \frac{2\sqrt{2}\lambda\mu^*u_2(r, \pi)}{r^\lambda} \quad (17)$$

6. 경계요소 해석결과 및 고찰

이상화된 균열을 모델링하기 위하여, Blandford 등이 제안한 다영역 경계요소 해석법¹⁶⁾을 적용하였으며, 수치해석을 위한 모델로써는 Tracey 등에 의하여 해석된 단순 평면변형용 상태 하에

있는 2차원 균열문제²⁾를 선택하였다(그림 4). 균열면에서 균일 내압 σ_0 를 받는 균열은 에폭시와 알루미늄의 접합면에 수직으로 위치하며, 이들 두 재료의 특성치인 전단탄성계수 μ 와 포아송비 ν 는 에폭시의 경우에, $\mu_{Ep}=1.149 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$, $\nu_{Ep}=0.35$ 그리고 알루미늄에 대한 값들은 $\mu_{Al}=2.652 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$, $\nu_{Al}=0.3$ 이다. 그림 4에서와 같이 에폭시판 내에 균열이 있는 경우에, 표면력의 특이치수, $\lambda=0.6619$ 이다.

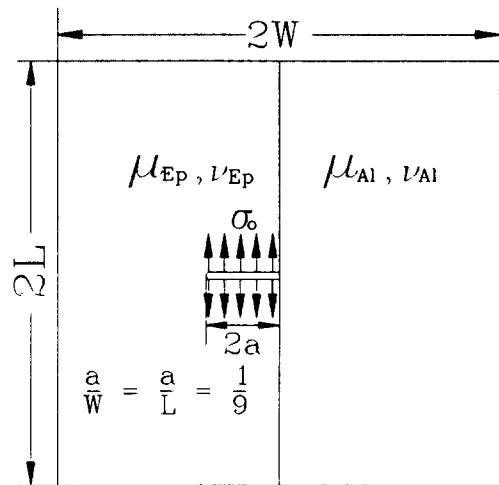


그림 4. Crack normal to bimaterial interface

해석 모델은 균열선을 따라서 서로 대칭이므로 1/2 평판만을 고려하였다. 두 재료의 접합면을 경계로 하여 두 개의 영역으로 나누었으며, 균열선을 따르는 경계와 접합 경계면에서의 분할 요소수는 각 영역 공히 10개로 하여, 전체 경계요소수를 30개로 분할하였다(그림 5). 경계를 이산화하기 위한 경계요소로써는 등매개 2차요소를 사용하였고, 두 재료의 접합면에 위치한 균열선단을 포함하는 모든 요소들은 등매개 2차요소의 중간절점을 적절히 이동시켜 놓음으로써 변위 및 표면력의 특이성이 나타나도록 하였다. 균열길이에 대한 균열선단 요소의 크기, $L/a=0.08$ 로 하여 해석을 수행하였다.

먼저 균열선단으로부터의 거리에 따른 균열개

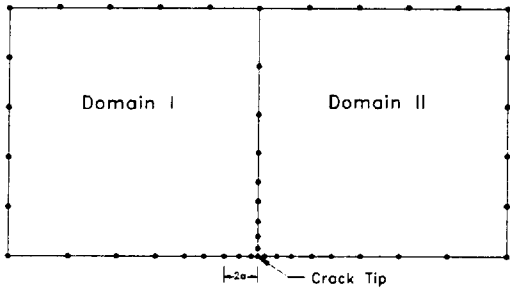


그림 5. Boundary element discretization

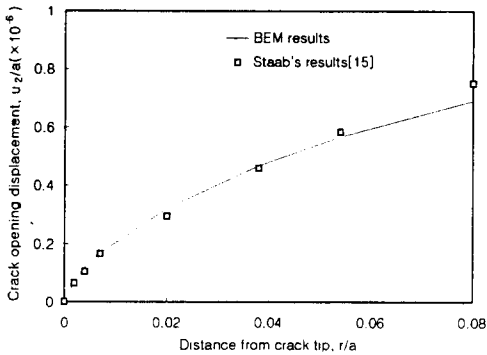


그림 6. Crack opening displacement

구분위의 값을 계산하여 이를 그림 6에 도시하였다. 그림에서 실선으로 나타낸 것은 본 해석으로부터 얻은 결과이며, □표시는 특이요소를 이용한 Staab의 해석결과¹⁷⁾를 나타낸다. 그림에서 보듯이 본 해석으로부터 얻은 결과는 기존의 해석결과와 거의 비슷한 값들을 나타내고 있다. 이들은 균열 선단과 가까운 부근일수록 거의 일치함을 보이는 데, 이는 본 해석 수법이 이종재료 균열선단에서의 변위의 분포를 정확히 나타낼 수 있는 매우 유효한 방법임을 나타내 주고 있다.

다음은 식 (17)을 적용하여 균열면상의 절점 변위를 이용한 응력확대계수를 계산하였다. 이 때의 변위값은 균열요소에서 균열선단과 가장 가까이 근접해 있는 절점에서의 y방향의 변위를 이용하였으며, 계산된 응력확대계수의 값 K_I 은 $\sigma_0 a^{1-\lambda}$ 으로 나누어줌으로써 무차원화 된 값으로 표시하였다. 비교를 위해 Tracey 등의 특이요소를 이용한 해석결과²⁾와 함께 표 1에 나타내었다. 표에서 보

듯이, 본 수치해석으로부터 얻은 해는 기존의 해석결과와의 약 3% 정도의 오차로써 공학적으로 적용 가능한 범위내에 있다.

표 1. Stress intensity factor $K_I / \sigma_0 a^{1-\lambda}$ at the crack normal to bimaterial interface

Tracey and Cook's result ²⁾	2.85
BEM result	2.94

7. 결 론

다영역 경계요소법을 이용하여 서로 다른 두 탄성재료의 접합면에 수직인 균열을 해석하였다. 해석모델은 3절점 2차 등매개요소를 사용하여 경계를 이산화하였으며 균열선단을 포함하는 요소에서는 요소중간절점의 위치를 적절히 이동시켜 놓음으로써, 두 재료의 특성치에 따라 변화하는 변위의 차수 r^λ 와 표면력의 차수 $r^{1-\lambda}$ 을 간단하게 나타낼 수 있음을 제시하였다. 본 해석에서 제안한 균열요소를, 균열내압을 받는 이종재료 접합면에 수직인 균열에 적용하여 본 결과, 기존의 해석결과와 근사적으로 일치하는 매우 효율적인 수법임을 알 수 있었다.

참 고 문 헌

- [1] Lu, M.C. and Erdogan, F., "Stress Intensity Factors in two Bonded Elastic Layers Containing Cracks Perpendicular to and on the Interface I-Analysis," *Engng. Fract. Mech.*, Vol. 18, 1983, pp.491-506.
- [2] Tracey, D.M. and Cook, T.S., "Analysis of Power Type Singularities Using Finite Elements," *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 11, 1977, pp.1225-1233.
- [3] Akin, J.E., "The Generation of Elements with Singularities," *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 10, 1976, pp.1249-1259.
- [4] Hughes, T.J.R. and Akin, J.E., "Techniques for Developing Special Finite Element Shape Functions with Particular Reference to Singularities," *Int. J. Numer. Meth. Engng.*,

- Vol. 15, 1980, pp.733-751.
- [5] Stern, M., "Families of Consistent Conforming Elements with Singular Derivative Fields," *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 14, 1970, pp.409-421.
- [6] Pian, T.H.H. and Tong, P., "On the Convergence of the Finite Element Method for Problems with Singularity", *Int. J. Solids Struct.*, Vol. 9, 1973, pp.313-321.
- [7] Zienkiewicz, O.C., *The Finite Element Method*, 3rd ed., Mc-Graw-Hill, 1977.
- [8] Abdi, R.E. and Valentin, G.V., "Isoparametric Elements for a Crack Normal to the Interface between Two Bonded Layers," *Comput. Struct.*, Vol. 33, 1989, pp.241-248.
- [9] Barsoum, R.S., "On the Use of Isoparametric Finite Elements in Linear Fracture Mechanics," *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 10, 1976, pp.25-37.
- [10] Henshell, R.D. and Shaw, K.G., "Crack Tip Finite Elements Are Unnecessary," *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 19, 1975, pp. 495-507.
- [11] Lim, W.K. and Kim, S.C., "Further Study to Obtain a Variable Power Singularity Using Quadratic Isoparametric Element," *Engng. Fract. Mech.*, Vol. 47, 1994, pp. 223-228.
- [12] Lim, W.K. and Lee, C.S., "Evaluation of Stress Intensity Factors for a Crack Normal to Bimaterial Interface Using Isoparametric Finite Elements," *Engng Fract. Mech.*, Vol. 52, No. 1, 1995, pp.65-70.
- [13] Lachat, J.C. and Watson, J.O., "Effective Numerical Treatment of Boundary Integral Equations: A Formulation for Three-Dimensional Elastostatics," *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 10, 1976, pp.991-1005.
- [14] Chan, S.K., Tuba, I.S. and Wilson, W.C., "On the Finite Element Method in Linear Fracture Mechanics," *Engng. Fract. Mech.*, Vol. 2, 1970, pp.1-7.
- [15] Cook, T.S. and Erdogan, F., "Stresses in Bonded Materials with a Cracks Perpendicular to and on the Interface," *Int. J. Engng. Science*, Vol. 10, 1972, pp.677-698.
- [16] Blandford, G.E., Ingraffea, A.R. and Liggett, J.A., "Two-Dimensional Stress Intensity Factor Computations Using the Boundary Element Method", *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 17, 1981, pp.387-404.
- [17] Staab, G.H., "A Variable Power Singular Element for Analysis of Fracture Mechanics Problems," *Comput. Struct.*, Vol. 17, No. 3, 1983, pp.449-457.

(접수일자 : 1995. 12. 11)