

# 원호형 곡선보의 면외 자유진동에 관한 수치해석적 연구

## Out of Plane Free Vibrations of Circular Curved Beams

이 병 구\*  
 Lee, Byoung-Koo  
 오 상 진\*\*  
 Oh, Sang-Jin

.....

### 요 약

이 논문은 원호형 곡선보의 면외 자유진동에 관한 연구이다. 곡선보 요소의 동적 평형방정식에 Timoshenko 이론을 적용하여 원호형 곡선보의 자유진동을 지배하는 상미분방정식을 유도하고 이를 수치해석하여 고유진동수를 산출할 수 있는 개략해법 중 하나인 수치해석기법을 개발하였다. 수치해석기법에서 미분방정식의 수치적분은 Runge-Kutta method를 이용하였고, 고유진동수의 결정은 Regular-Falsi method를 이용하였다. 실제 수치해석에에서는 회전-회전보, 고정-고정보에 대하여 시행하고, 고유진동수에 미치는 무차원 변수들의 영향을 고찰하였다.

### Abstract

In this paper, an approximate method is developed to obtain the natural frequencies of the out of plane vibration of circular curved beams. The governing differential equations are derived using the dynamic equilibrium equations with the Timoshenko theory, and solved numerically. The Runge-Kutta method and Regula-Falsi method are used to integrate the differential equations and to determine the natural frequencies, respectively. In numerical examples, the hinged-hinged and clamped-clamped end constraints are considered. For each case, the four lowest natural frequencies are reported as functions of four non-dimensional system parameters.

.....

### 1. 서 론

곡선보는 가장 기본이 되는 구조단위 중 하나이므로 곡선보에 관한 동적거동 특히 자유진동에 관한 많은 연구들이 이루어졌다. Archer<sup>1)</sup>는 단면이 매우 작은 원환의 면내 진동에 관한 정확해를 연구하였다. Ojalvo<sup>2)</sup>는 원환의 휨과 비틀림이 연계

된 면외 자유진동에 관한 이론을 정립하였다. Morley<sup>3)</sup>는 얇은 원환에 대하여 휨만을 고려한 자유진동을 해석하였으며, 대칭진동과 역대칭진동으로 구분하여 제10모드까지 고유진동수를 나타내었다. 이상의 연구들은 모두 미분방정식의 정확해에 관한 논문들이다.

고유진동수 산출의 개략적 방법으로는 Rayleigh

\* 원광대학교 토목환경공학과 박사과정

\*\* 원광대학교 대학원 박사과정

이 논문에 대한 토론을 1996년 9월 31일까지 본 학회에 보내주시면 1997년 3월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

Ritz method를 이용하여 양단이 고정된 원호형 곡선보의 면내 진동을 해석한 Den Hartog<sup>4)</sup>의 논문을 들 수 있다. Volterra와 Morell<sup>5)</sup>은 Den Hartog의 연구를 응용하여 포물선, 현수선 및 파선 곡선보의 고유진동수를 산출하였다. 또한, Nelson<sup>6)</sup>은 단순지지 원호형 곡선보에 대하여 급수해를 이용한 개략적인 고유진동수 방정식을 제안하였다.

곡선보의 진동이론을 실제 구조물에 이용한 연구로는 Tan과 Shore<sup>7)</sup> 및 Culver와 Oestel<sup>8)</sup>의 논문이 있다. 문헌[7]에서는 단순지지 곡선보에 일정속도의 이동하중이 작용할 때 곡선보의 동적 거동을 연구하였다. 문헌[8]은 교량으로 이용되는 다경간 곡선보에서 가능한 고유진동수의 범위를 보고하였다.

동적 평형방정식의 유도에서 회전관성 및 전단 변형효과를 고려하면 더 정확한 구조물의 동적 거동을 해석할 수 있다. 곡선보의 동적 해석에서 회전관성 및 전단변형효과를 고려한 논문들로는 Rao와 Sundararajan<sup>9)</sup>, Philipson<sup>10)</sup>, Seidel과 Erdelyi<sup>17)</sup>의 논문을 들 수 있다. 문헌[9,10]은 원환의 면내 자유진동에 관한 연구이며, 문헌[11]은 두꺼운 원환에서 축방향의 압축성을 고려한 논문이다.

본 논문은 원호형 곡선보의 면의 자유진동에 관한 연구로서 곡선보의 동적 평형미분방정식을 직접 수치적분하여 고유진동수를 산출할 수 있는 개략해법 중의 하나인 수치해석기법을 개발하는데 연구목적이 있다. 이제까지 개략해법은 자유진동의 진동형을 가정하고 이를 미분방정식에 대입하여 고유진동수를 산출하는 Rayleigh-Ritz method가 이용되었다. 저자들의 문헌조사로는 진동형을 가정하지 않고 미분방정식을 직접 수치적분하여 곡선보의 고유진동수를 산출한 연구는 찾아볼 수 없었다. 이러한 관점에서 이 논문에서는 곡선보 요소의 동적 평형방정식을 진동형만의 상미분방정식으로 유도하였으며, 이를 수치적분기법을 이용하여 직접 수치적분하고 행렬값 탐사법에 의하여 고유진동수를 산출할 수 있는 개략해법을 개발하였다. 미분방정식 유도에서는 회전관성과 전단 변형효과를 고려한 Timoshenko 이론을 이용하므로 더욱 정확한 고유진동수를 산출할 수 있도록

하였다. 수치해석 예에서는 양단힌지 및 양단고정 곡선보에서 무차원변수(non-dimensional system parameter)들이 고유진동수에 미치는 영향을 분석하였다.

본 논문에서는 다음의 기본가정을 따랐다. (1) 보의 질량은 균일하게 분포되어 있다. (2) 미분방정식에서 고차항은 무시한다. (3) 구조물의 감쇠 효과는 고려하지 않는다. (4) 워핑(warping)은 무시한다. (5) 보의 도심, 전단중심 및 비틀림 중심은 일치한다.

## 2. 수학적 모형

그림 1은 공간 좌표계(x,y,z)에서 (x,y)평면상에 존재하는 반경이 a이고 중심각이  $\alpha$ 인 원호형 곡선보를 나타내고 있다. 곡선보의 양단부는 회전지점 또는 고정지점으로 지지되어 있다. 이 그림에서 곡선보의 임의점은 좌단으로부터 각도  $\theta$ 로 정의되며, 이 임의점의 z방향과 일치하는 수직 처짐 v, 휨에 의한 단면회전각  $\psi$ , 전단변형에 의한 단면회전각  $\beta$  및 곡선보 축의 비틀림각  $\phi$ 가 이 그림에 나타나 있다.

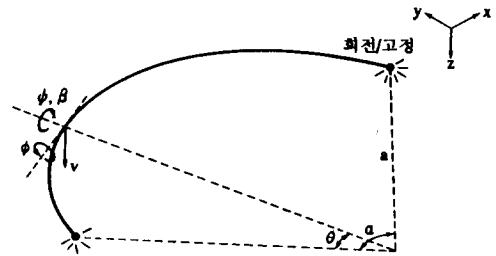


그림 1. 곡선보의 형상 및 변위

그림 2는 중심각이  $d\theta$ 이고 원호길이가 ds인 미소한 곡선보 요소를 나타내고 있다. 곡선보가 자유진동하게 되면 곡선보의 단면에는 이 그림에서와 같이 휨 모멘트 M, 전단력 Q 및 비틀림 모멘트 T의 합응력이 발생하고 질량을 갖는 미소 요소에는 수직방향 관성력  $F_v$  및 회전관성우력  $C_\psi$ 가 발생한다. 이 합응력 M, Q, T 및 관성력  $F_v$ ,  $C_\psi$ 를 정적인 양 측 자유진동의 진폭으로 나타내어 동적 평형방정식을 세우면 다음과 같다.

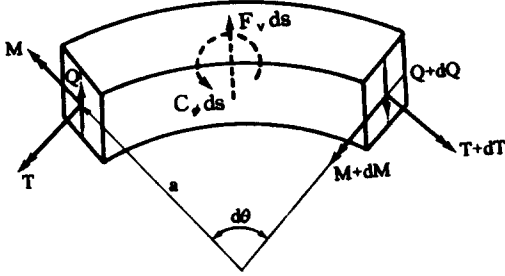


그림 2. 곡선보 요소에 작용하는 합응력 및 관성력

$$F_v \sin \omega t = m \frac{d^2(v \sin \omega t)}{dt^2} \quad (8)$$

$$C_\psi \sin \omega t = m r^2 \frac{d^2(\psi \sin \omega t)}{dt^2} \quad (9)$$

위의 (8), (9)식에서  $F_v$  및  $C_\psi$ 를 구하면 다음 식들과 같다.

$$F_v = -m \omega^2 v \quad (10)$$

$$C_\psi = -m \omega^2 r^2 \psi \quad (11)$$

위의 식에서  $m$ 은 보 재료의 단위 길이당 질량이고 따라서  $F_v$ ,  $C_\psi$ 는 단위 길이당 관성력이다. 또한  $r$ 은 단면 회전반경이다.

단면에 발생하는 합응력인 (4), (5), (7)식의  $M$ ,  $T$ ,  $Q$ 를  $\theta$ 에 관하여 한 번 미분하면 다음과 같다.

$$\frac{dM}{d\theta} = \frac{EI}{a} \left( \frac{d\phi}{d\theta} - \frac{d^2\psi}{d\theta^2} \right) \quad (12)$$

$$\frac{dT}{d\theta} = \frac{JG}{a} \left( \frac{d\psi}{d\theta} - \frac{d^2\phi}{d\theta^2} \right) \quad (13)$$

$$\frac{dQ}{d\theta} = kAG \left( \frac{1}{a} \frac{d^2v}{d\theta} - \frac{d^2\psi}{d\theta^2} \right) \quad (14)$$

자유진동을 지배하는 미분방정식을 무차원으로 유도하기 위하여 다음의 무차원 변수들을 도입한다.

$$\eta = v/a \quad (15)$$

$$\lambda = a/r \quad (16)$$

$$\gamma = kG/E \quad (17)$$

$$\varepsilon = JG/EI \quad (18)$$

위의 식에서  $\eta$ 는 수직처점  $v$ 를 곡선보의 반경  $a$ 로 정규화한 것이고  $\lambda$ 는 단면의 세장비,  $\gamma$ 는 전단 변형변수,  $\varepsilon$ 는 강성변수이다.

(1)식에서 (14), (10)식을 대입하고 (15)~(18)식을 이용하면 다음의 무차원 미분방정식 (19)식을 얻는다.

$$\frac{d^2\eta}{d\theta^2} = -\frac{P_i}{\gamma\lambda^2}\eta + \frac{d\psi}{d\theta} \quad (19)$$

(2)식에 (12), (7), (5), (11)식을 대입하고

$$\frac{dQ}{d\theta} - aF_v = 0 \quad (1)$$

$$\frac{dM}{d\theta} - aQ + T + aC_\psi = 0 \quad (2)$$

$$M - \frac{dT}{d\theta} = 0 \quad (3)$$

단면에 발생하는 합응력  $M$ ,  $T$ 는 다음과 같이 회전각  $\psi$ 와 비틀림각  $\phi$ 로 나타낼 수 있다.<sup>12)</sup>

$$M = \frac{EI}{a} \left( \phi - \frac{d\psi}{d\theta} \right) \quad (4)$$

$$T = \frac{JG}{a} \left( \psi + \frac{d\phi}{d\theta} \right) \quad (5)$$

위의 식에서  $E$ 는 탄성계수,  $G$ 는 전단탄성계수,  $I$ 는 단면이차모멘트,  $J$ 는 극관성모멘트이다.

곡선보의 단면회전각은 휨에 의한 회전각  $\psi$ 와 전단변형에 의한 회전각  $\beta$ 로 구성되므로 다음식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{dv}{ds} &= \frac{1}{a} \frac{dv}{d\theta} \\ &= \psi + \beta \end{aligned} \quad (6)$$

따라서 전단력  $Q$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} Q &= k\beta AG \\ &= kAG \left( \frac{1}{a} - \psi \right) \end{aligned} \quad (7)$$

위의 식에서  $k$ 는 단면형상계수이다.

곡선보의 자유진동은 조화진동을 한다고 가정하면, 곡선보의 자유진동에서 모든 동적변수는  $\sin \omega t$ 에 비례한다. 여기서  $\omega$ 는 고유각진동수이고  $t$ 는 시간이다. 따라서 관성력  $F_v$  및 회전관성우력  $C_\psi$ 의 조화진동식은 다음과 같이 표시된다.<sup>13)</sup>

(16)~(18)식을 이용하면 다음의 무차원 미분방정식 (20)식을 얻는다.

$$\frac{d^2\psi}{d\theta^2} = -\gamma\lambda^2 \frac{d\eta}{d\theta} + (\gamma\lambda^2 + \varepsilon - \frac{p_i^2}{\lambda^2})\psi + (1+\varepsilon) \frac{d\phi}{d\theta} \quad (20)$$

(3)식에 (4), (13)식을 대입하고 (16)~(18)식을 이용하면 다음의 무차원 미분방정식 (21)식을 얻는다.

$$\frac{d^2\phi}{d\theta^2} = -(1 + \frac{1}{\varepsilon}) \frac{d\psi}{d\theta} + \frac{1}{\varepsilon} \phi \quad (21)$$

위의 식(19), (20)식에서  $p_i$ 는 다음 식과 같은 무차원 고유진동수이다.

$$p_i = \omega_i a^2 (m/EI)^{1/2}, \quad i=1,2,3,4,\dots \quad (22)$$

위의 식에서  $i$ 는 모드번호이다.

곡선보의 경계조건은 다음과 같다. 먼저, 회전단에서 수직처짐  $v$ , 휨모멘트  $M$ , 비틀림각  $\phi$ 는 각각 "0"이어야 하므로 무차원 변수식인 (15)식과 휨모멘트식인 (4)식을 이용하면 다음의 무차원 경계조건을 얻을 수 있다.

$$\eta=0, \theta=0 \text{ 또는 } \alpha \text{에서}, \quad (23)$$

$$d\psi/d\theta=0, \theta=0 \text{ 또는 } \alpha \text{에서}, \quad (24)$$

$$\phi=0, \theta=0 \text{ 또는 } \alpha \text{에서}, \quad (25)$$

다음, 고정단에서 수직처짐  $v$ , 회전각  $\psi$ , 비틀림각  $\phi$ 는 각각 "0"이어야 하므로 다음의 무차원 경계조건이 유도된다.

$$\eta=0, \theta=0 \text{ 또는 } \alpha \text{에서}, \quad (26)$$

$$\psi=0, \theta=0 \text{ 또는 } \alpha \text{에서}, \quad (27)$$

$$\phi=0, \theta=0 \text{ 또는 } \alpha \text{에서}, \quad (28)$$

이상에서 (19)~(21)식의 곡선보의 자유진동을 지배하는 무차원 미분방정식과 회전단의 경계조건 (23)~(25)식 및 고정단의 경계조건 (26)~(28)식을 유도하였다.

### 3. 수치해석 방법 및 검증

곡선보의 형상 즉 단부조건, 중심각  $\alpha$ , 세장비  $\lambda$ , 전단변수  $\gamma$  및 강성변수  $\varepsilon$ 이 주어지면 (19)~(21)식의 미분방정식과 회전지점의 (23)~(25)식 또는 고정지점의 (26)~(28)식의 경계조건을 이용하여 무차원 고유진동수  $p_i$ 를 구할 수 있다. (19)~(21)식의 미분방정식의 엄밀해는 존재하지 않으므로 수치해석법에 의하여 수치해를 구하여야 한다. 본 연구에서 개발한 수치해석법을 간단히 설명하면 다음과 같다. 미분방정식에는 미지수인 무차원 고유진동수  $p_i$ 가 포함되어 있으므로  $p_i$  값을 가정하여 미분방정식에 대입한 후에 수치적분을 시행한다. 미분방정식의 수치적분 문제는 초기치 문제이므로  $\theta=0$ 에서  $\eta, d\eta/d\theta, \psi, d\psi/d\theta, \phi, d\phi/d\theta$ 의 6개의 값이 필요하다. 그러나  $\theta=0$ 에서의 경계조건은 (23)~(25)식 또는 (26)~(28)식에서와 같이 3개의 초기치뿐이므로 나머지 3개의 초기치를 가정하여 수치적분을 시작한다. 초기치의 가정은 후술할 선형결합에 적용시키기 위하여 단부 조건별로 각각 3쌍 가정한다. 본 논문에서는 표 1과 같이 초기치를 가정하였으며 미분방정식의 수치적분은 Runge-Kutta method<sup>14)</sup>를 이용하였다.

표 1. 초기치의 가정

· 회전단( $\theta=0$ )인 경우

구 분	$\eta$	$\eta'$	$\psi$	$\psi'$	$\phi$	$\phi'$
가정1	0	1	2	0	0	0
가정2	0	3	0	0	0	4
가정3	0	0	5	0	0	6

· 고정단( $\theta=0$ )인 경우

구 분	$\eta$	$\eta'$	$\psi$	$\psi'$	$\phi$	$\phi'$
가정1	0	1	0	2	0	0
가정2	0	3	0	0	0	4
가정3	0	0	0	5	0	6

표에서 (')은  $d/d\theta$ 의 미분연산자임.

표 1에서의 초기치를 이용하여  $\theta=0$ 에서  $\theta=\alpha$ 까지 수치적분을 시행한 결과로  $\theta=\alpha$ 에서  $\eta, \eta', \psi, \psi', \phi, \phi'$  값이 계산된다. 이 때 앞에서 가정한  $p_i$  값이 곡선보 자유진동의 고유한 값이면 경계조건

(23)~(25)식 또는 (26)~(28)식에 의하여 다음 식과 같은 선형결합의 관계를 만족하여야 한다.

· 회전단( $\theta=\alpha$ )인 경우 :

$$\eta = \eta_1 + C_1\eta_2 + C_2\eta_3 = 0 \quad (29)$$

$$\psi' = \psi_1 + C_1\psi_2 + C_2\psi_3 = 0 \quad (30)$$

$$\phi = \phi_1 + C_1\phi_2 + C_2\phi_3 = 0 \quad (31)$$

· 고정단( $\theta=\alpha$ )인 경우 :

$$\eta = \eta_1 + C_1\eta_2 + C_2\eta_3 = 0 \quad (32)$$

$$\psi = \psi_1 + C_1\psi_2 + C_2\psi_3 = 0 \quad (33)$$

$$\phi = \phi_1 + C_1\phi_2 + C_2\phi_3 = 0 \quad (34)$$

위의 식들에서 첨자 1, 2, 3은 표 1에서 가정 1, 2, 3을 의미하며,  $C_1, C_2$ 는 선형결합의 관계에서 결정되는 상수값이다.

선형결합의 관계에서  $C_1, C_2$  값은 "0"이 아니므로 (29)~(31)식 또는 (32)~(34)식이 만족되기 위해서는 다음과 같은 행렬값  $D$ 가 "0"이 되어야 한다.

· 회전단인 경우 :

$$D = \begin{bmatrix} \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \\ \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 \\ \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 \end{bmatrix} \quad (35)$$

· 고정단인 경우 :

$$D = \begin{bmatrix} \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \\ \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 \\ \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 \end{bmatrix} \quad (36)$$

식(35), (36)식의 행렬값  $D=0$ 를 만족시키는  $p_i$  값이 곡선보의 무차원 고유진동수가 된다. 이 논문에서는  $p_i$  값을 가정하여 수치적분을 반복시행하는 과정에서  $D=0$ 되는  $p_i$  값을 찾는 행렬값 탐사법을 이용하였다. 행렬값 탐사법을 적용하는 과정에서 Regula-Falsi method<sup>15)</sup>를 이용하여  $D=0$ 되는  $p_i$  값을 찾았다. 이상의 수치해석 과정을 단부조건,  $\alpha, \lambda, \gamma, \varepsilon$ 의 값을 입력하면 무차원 고유진동수  $p_i$  값이 출력되도록 컴퓨터 프로그램하였다. 본 논문에

서는 회전-회전 및 고정-고정 보에 대하여 제4모드까지 무차원 고유진동수를 계산하였다.

수치해석 예를 실행하기 전에 수치적분을 하기 위한 Runge-Kutta method에서 단계길이(step size)  $\Delta\theta$ 를 결정하여야 한다. 그림 3은  $\Delta\theta$ 를 결정하기 위하여  $\Delta\theta$  값을 변화시키면서 수치해석한 결과이며  $\alpha/\Delta\theta$  값이 20이상이면  $p_i$  값은 좋은 수렴성을 보였다. 본 연구에서  $\alpha/\Delta\theta$  값은 50을 이용하였으며 이 경우  $p_i$  값은 유효숫자 3자리까지 수렴하였다.

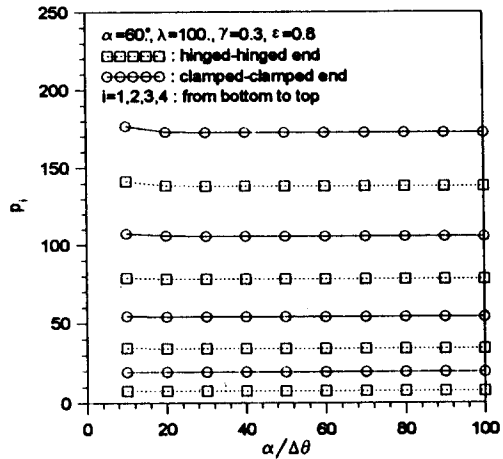


그림 3. 수치해의 수렴해석

표 2는 본 연구 결과를 검증하기 위하여 본 연구의 결과와 SAP90의 결과를 비교한 표이며 두 결과가 아주 우수하게 접근하여 본 연구 결과의 타당성을 입증할 수 있다.

표 2. 본 연구 결과의 검증

단부조건	비교분원	무차원 고유진동수 $p_i$			
		$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$
회전-회전 $\alpha=90^\circ, \lambda=50,$ $\gamma=0.30, \varepsilon=0.75$	본연구	2.593	14.24	33.42	59.33
	SAP90	2.575	14.10	32.85	58.20
	차이(%)	0.70	0.99	1.7	1.9
고정-고정 $\alpha=60^\circ, \lambda=80,$ $\gamma=0.28, \varepsilon=0.77$	본연구	19.36	53.50	103.7	165.8
	SAP90	19.24	52.93	102.0	163.2
	차이(%)	0.62	1.0	1.6	1.6

$$\text{차이(}\%) = |1 - \text{본연구} / \text{SAP90}| \times 100$$

4. 수치해석 예 및 토의

그림 4~그림 7은 곡선보의 무차원 변수  $\alpha$ ,  $\lambda$ ,  $\gamma$ ,  $\varepsilon$ 이 무차원 고유진동수  $p_i$ 에 미치는 영향을 분석한 그림들이다. 그림 4는 중심각  $\alpha$ 와 무차원 고유진동수  $p_i$ 의 관계를 나타낸 것으로 다른 무차원 변수가 같을 때  $\alpha$ 는  $p_i$ 를 감소시키는 요인임을 알 수 있다.  $\alpha$ 값이 클 때보다는 작을 때에 진동수 감소율이 훨씬 더 커서 작은  $\alpha$ 값에서  $p_i$ 에 미치는 영향이 더 크다. 또한 고정-고정보가 회전-회전보의 고유진동수 보다 더 큰 것을 알 수 있다.

그림 5는  $p_i$ 와  $\lambda$ 의 관계를 나타낸 것이다. 이 그림에서 세장비  $\lambda$ 는  $p_i$ 를 증가시키는 요인이며  $\lambda$ 가 증가함에 따라서  $p_i$ 는 어떤 일정한 값에 수렴하는 것을 알 수 있다. 또한 작은 모드에서 보다는 큰 모드에서 진동수의 증가율이 커서 큰 모드에서  $\lambda$ 의 영향력이 더 크게 나타나고 있다.

그림 6은  $p_i$ 와  $\gamma$ 의 관계를 나타낸 것으로 전단변형변수  $\gamma$ 값은  $p_i$ 값을 증가시키는 요인이다. 그러나  $\gamma$ 값이  $p_i$ 에 미치는 영향은 매우 작으며 작은 모드에서는  $\gamma$ 값의 영향을 거의 받지 않는다.

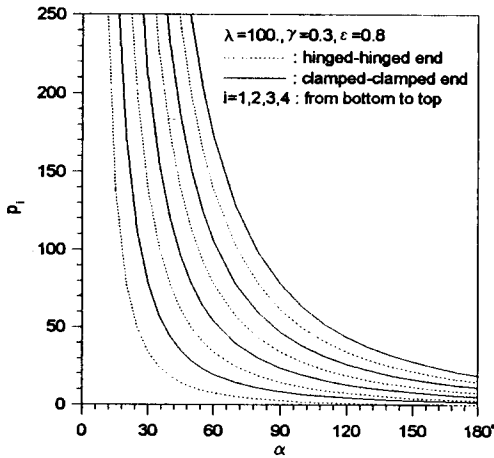


그림 4.  $p_i$ 와  $\alpha$  관계

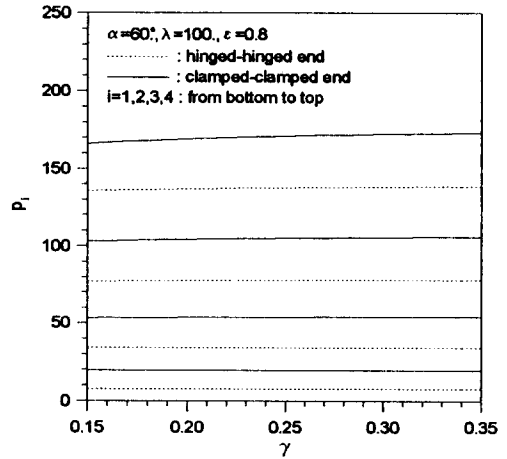


그림 6.  $p_i$ 와  $\gamma$  관계

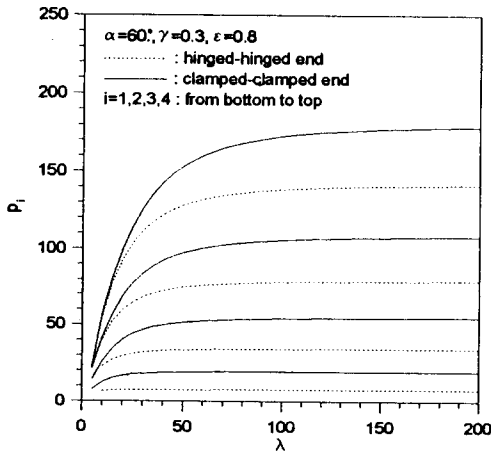


그림 5.  $p_i$ 와  $\lambda$  관계

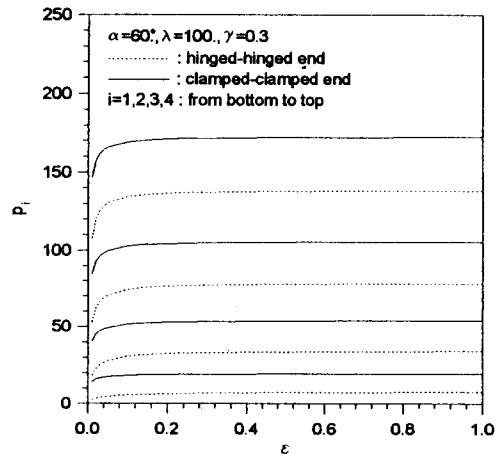


그림 7.  $p_i$ 와  $\varepsilon$  관계

그림 7은  $p_1$ 와  $\epsilon$ 의 관계를 나타낸 것이다. 강성 변수  $\epsilon$ 값이 증가하면  $p_1$ 값이 증가하며,  $\epsilon$ 값이 0.2정도 보다 작을 때에는 그 증가율이 매우 커서 영향력이 매우 크지만  $\epsilon$ 값이 0.2정도를 넘어서면  $p_1$ 값은 거의 일정한 값에 수렴하고 있어 영향력이 매우 작음을 알 수 있다.

### 5. 결 론

이 논문은 곡선보의 자유진동에 관한 연구로서, 곡선보의 고유진동수를 산출할 수 있는 수치해석적 방법을 개발하였다. 회전관성과 단단변형효과를 고려한 Timoshenko이론을 곡선보에 적용하여 자유진동을 지배하는 상미분방정식을 유도하고 단부조건에 따른 경계조건을 유도하였다. 이 미분방정식을 Runge-Kutta method를 이용하여 직접 수치적분하고 Regula-Falsi method를 이용하여 고유진동수를 산출할 수 있는 수치해석적 방법을 개발하였다. 본 논문의 연구결과와 SAP90의 결과가 잘 일치하여 본 연구결과의 타당성을 보였고 곡선보의 무차원  $\alpha, \lambda, \gamma, \epsilon$ 등이 무차원 고유진동수  $p_1$ 에 미치는 영향을 분석하였다.

앞으로의 연구과제로는 변화곡률 곡선보, 변화 단면 곡선보 및 다경간 연속 곡선보의 자유진동을 지배하는 미분방정식의 유도과 수치해석적 방법의 개발이 필요하다고 생각한다.

### 감사의 글

이 논문은 1994년도 한국학술진흥재단의 공모 과제 연구비에 의하여 연구된 논문으로 재단당국에 진심으로 감사드립니다.

### 참 고 문 헌

[ 1 ] Archer, R.R., "Small Vibrations of Thin Incomplete Circular Rings," *International Journal of Mechanical Science*, Vol.1, 1960, pp.45-46.  
 [ 2 ] Ojalvo, T.V., "Coupled Twist-Bending Vibrations of Incomplete Elastic Rings," *International Journal of Mechanical Science*, Vol.4,

1962, pp.53-72.  
 [ 3 ] Morley, L.S.D., "The Flexural Vibrations of a Cut Thin Ring," *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, Vol.11, 1934, pp.429-449.  
 [ 4 ] Den Hartog, J.P., "The Lowest Natural Frequency of Circular Arcs," *Philosophical Magazine*, Series 7, Vol.5, 1928, pp.400-408.  
 [ 5 ] Volterra, E. and Morell, J.D., "A Note on the Lowest Natural Frequency of Elastic Arcs," *Journal of the Applied Mechanics*, Vol. 27, 1960, pp.744-746.  
 [ 6 ] Nelson, F.C., "In-Plane Vibration of a Simply Supported Circular Ring Segment," *International Journal of Mechanical Science*, Vol.4, 1962, pp.517-527.  
 [ 7 ] Tan, C.P. and Shore, S., "Dynamic Response of a Horizontally Curved Bridge," *Journal of the Structural Division, ASCE*, Vol. 94, No.ST3, 1968, pp.761-781.  
 [ 8 ] Culver, C.G. and Oestel, D.J., "Natural Frequencies of Multispan Curved Beams," *Journal of Sound and Vibration*, Vol.10, 1969, pp. 380-389.  
 [ 9 ] Rao and Sundararajan, "In-Plane Flexural Vibrations of Circular Rings," *Journal of Applied Mechanics*, Vol.36, Transactions ASME, 1969, pp.620-625.  
 [10] Philipson, L.L., "On the Role of Extension in the Flexural Vibration of Rings," *Journal of Applied Mechanics*, Vol.23, Transactions ASME, Vol.78, 1956, p.864.  
 [11] Seidel, B.S. and Erdelyi, E.A., "On the Vibration of A Thick Ring in Its Own Plane," *Journal of Engineering for Industry*, Transactions ASME, Series B, Vol.86, 1964, pp.240-244.  
 [12] Volterra, E. and Gaines, J.H., *Advanced Strength of Materials*, Prentice-Hall., pp.356-358.  
 [13] Biggs, J.M., *Introduction to Structural Dynamics*, Elsevier, 1981.  
 [14] Al-Khafaji, A.W. and Tooley, J.R., *Numerical Methods in Engineering Practice*, Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1986.  
 [15] Mathews, J.H., *Numerical Methods*, Prentice-Hall, 1987. (접수일자 : 1996. 2. 4)