

다구찌의 SN 비와 BOX의 변수변환방법

정 은 영¹⁾, 김 지 현²⁾

요 약

일본의 품질 전문가 다구찌가 제안한 파라미터 설계의 장단점에 대해 많은 논의가 있어 왔다. 본 연구에서는 신호 대 잡음 비율에 초점을 두어, 이론적 쟁점이 무엇인지를 요약하고, 그 문제점을 모의실험을 통해 구체적으로 지적하였다. 한편 신호 대 잡음 비율에 대한 대안 중에서 Box의 변수변환 방법을 소개하였다.

1. 서 론

일본의 품질 전문가(quality consultant) 다구찌(田口)가 제안한 파라미터 설계(parameter design)는, 품질 향상을 위해 제품의 설계 (또는 제조 공정의 설계) 단계에서 적용되는 실험계획 방법으로서, 그 목적은 적은 비용으로 제품의 변동을 줄이는 데에 있다. 제품의 변동은 제조 공정상의 제어하기 어려운 조건과, 제품이 실제 사용될 때 그 성능에 영향을 미치는 환경 인자들의 변화에 의하여 발생한다. 이 때 제품의 변동에 영향을 주지만, 제어하기 어렵거나 제어하는 데에 비용이 많이 드는 인자들을 잡음인자(noise factors)라고 한다. 한편 생산자가 제품 제조 시에 그 조건을 비교적 쉽게 조절할 수 있는 인자를 제어인자(control parameters or control factors)라고 한다. 파라미터 설계는 잡음인자에 의한 제품의 변동을 최소화하기 위해 제어인자의 최적 조건을 정하는 실험계획 방법이라고 할 수 있다. 기존의 통계적 실험계획은 성능특성치의 목표값을 만족시키는 제어인자의 최적조건을 찾는 데에 초점을 두었으나, 파라미터 설계는 잡음인자의 영향에 의한 변동의 최소화를 같이 고려한다는 점에서 로버스트 설계(robust design)라고도 불린다.

이 파라미터 설계는 실제 현장에서 많이 쓰이고 있으면서도 한편으로는 그 이론적 정당성과 효율성에 대하여 많은 논란이 있어왔다 (Nair, V. N. (1992) 참조). 본 논문에서는 다구찌의 파라미터 설계에 대한 이론적 쟁점 중에서 신호 대 잡음 비율(signal-to-noise ratio, SN 비)의 문제점을 모의실험을 통해 지적하였다.

본 논문의 제2절에서는 다구찌의 SN 비에 대한 논란을 요약하고, 그 대안들 중에서 Box의 변수변환 방법에 대해 간략히 설명하였다. 제3절에서는 SN 비가 몇 가지 가정된 모형 하에서 최적 조건을 제대로 찾아내는가를, 모의 실험을 통해 알아보았다.

1) (135-080) 서울시 강남구 역삼동 648-19 현대정보기술주식회사 응용정보기술연구소 GIS팀.
2) (156-743) 서울시 동작구 상도동 숭실대학교 통계학과 부교수.

2. 다구찌의 SN 비와 BOX의 변수변환

다구찌의 파라미터 설계의 개요는 Kackar (1985)에 잘 소개되어 있으며, 파라미터 설계에 대한 논란과 다양한 대안들에 관한 논의는 Nair (1992)에 잘 정리되어 있다. 다구찌의 파라미터 설계에 관한 주된 이론적 쟁점들로서, 시스템에 대한 이해보다는 최적조건 찾는 데에만 목적을 둔다는 점, SN 비의 성능, 곱배열(Product Array)에 의한 과도한 실험횟수, 그리고 제어인자들 간의 교호작용을 무시한 점 등을 들 수 있다. 본 논문에서는 이 중에서 SN 비의 성능에만 관심을 두기로 한다.

2.1절에서는 Leon 등 (1987)의 논문을 주로 참조하여 SN 비에 대한 논란을 정리해 보았다. 2.2절에서는 SN 비에 대한 대안들 중에서 Box (1988)의 변수변환 방법을 요약하였다.

2.1 SN 비와 PerMIA

제품의 품질을 결정하는 성능특성치 Y 는, 그 값이 작을수록 좋은 경우와 클수록 좋은 경우, 그리고 목표값 τ 가 있는 경우, 이상 세 가지를 생각할 수 있으나, 본 논문에서는 목표값이 있는 경우로 한정한다. 이 때 제품의 품질을 개선하기 위해서는 제품의 성능특성치의 평균을 목표값 τ 에 근접시켜야 하며, 동시에 평균으로부터의 변동인 분산도 작게 하여야 한다. 다구찌는 품질 또는 손실의 정량화를 위해 이차 손실함수 $L(Y, \tau) = K(Y - \tau)^2$ (단, K 는 상수)를 사용할 것을 제안했는데, 상수 K 를 1로 두었을 때 이차 손실함수의 기대값인 평균제곱오차(MSE)는 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} \text{MSE} &= E(L(Y, \tau)) \\ &= V(Y) + (E(Y) - \tau)^2 \\ &= \sigma^2 + (\mu - \tau)^2 \end{aligned} \quad (1)$$

그런데, 손실을 최소화하기 위한 제어인자의 최적조건을 찾을 때, 다구찌는 논리적 규명을 하지 않고 신호 대 잡음 비율이라고 하는 다른 척도(measure)를 사용하였다. 기대 손실을 최소화하는 문제에서, 다구찌는 제어인자 θ 를 $\theta = (d, a)$ 와 같이 두 부분으로 나눌 수 있다고 가정하였는데, 이 때 a 는 성능특성치의 평균값을 목표값으로 조정하는데 사용되는 조정 인자(adjustment parameters)이다. 다구찌가 제안한 제어인자의 최적조건을 찾는 방법을 다음과 같이 두 단계 과정으로 설명할 수 있다.

< 최적조건을 찾는 방법 1 >

1 단계. 신호 대 잡음 비율을 최대화하는 최적조건 $d = d^*$ 를 찾는다.

2 단계. d 를 d^* 에 고정시키고, a 를 a^* 로 조정하여 목표값에 일치시킨다.

다구찌는 기대손실을 최소화하는 문제를, SN 비 $= 10 \log_{10}(E^2(Y)/V(Y))$ 를 최대화하는 문제로 바꾸어 생각하였는데, 그 이유를 설명하지 않았다. 단계 2에서 조정인자 a 의 조건을 바꿀 때 만약 신호 대 잡음 비율이 같이 변화한다면 d^* 는 더 이상 최적조건이 아닐 수 있다.

이러한 문제를 해결하기 위해서 Leon 등 (1987)은 조정인자와 무관한 새로운 산포의 측도를 생각하였다. 제어인자의 최적조건을 찾는 그들의 방법을 간략히 소개하기로 한다. $R(d, a) = \text{MSE}$ 를 제어인자 d 와 a 의 영향을 받는 기대손실 또는 평균제곱오차라고 할 때:

<최적조건을 찾는 방법 2>

단계 1. $P(d) = \min_a R(d, a)$ 를 최소로 하는 최적조건 $d = d^*$ 를 찾는다.

단계 2. $R(d^*, a)$ 를 최소로 하는 $a = a^*$ 를 찾는다.

$R(d, a)$ 를 최소로 하는 (d^*, a^*) 가 존재하기만 하면 위 방법에 의해 그 최적조건을 찾는 것이 항상 가능하며, 만약 조정인자 a 에 영향을 받지 않는 $P(d)$ 를 간단히 계산할 수 있다면, 위 방법은 최적조건 (d^*, a^*) 를 찾는 매우 유용한 방법이 될 것이다. 이 때, $P(d)$ 는 조정인자 a 에 무관하므로, 조정불변측도 (PerMIA, Performance Measure Independent of Adjustment)라고 명명하였다. 한편 Leon 등 (1987)은 다음과 같은 경우에 SN 비를 최대화하는 것은 실제로 기대손실을 최소화하는 것과 같다는 것을 증명하였다. 그 경우는 아래와 같은 전이함수(transfer function)가 만족될 때이다.

$$Y = \mu(d, a)\epsilon(N, d). \tag{2}$$

위 식에서 $\epsilon(N, d)$ 는 제어인자 중의 조정인자 a 와는 무관하며, 또 다른 제어인자인 d 와 확률 변수(또는 확률벡터)인 잡음인자 N 에 의해 결정되는 오차항을 나타낸다. 한편 $E(Y) = \mu(d, a)$ 이고 $V(Y) = \mu^2(d, a) V(\epsilon(N, d))$ 로서, $\mu \propto \sigma$ 의 관계가 성립한다.

그러나 (2)와 다른 전이함수를 가정했을 때에는 일반적으로 SN 비가 PerMIA가 되지 않는데, 이 때 잡음인자에 의한 변동을 줄이는 제어인자와 그 최적조건을 찾기 위한 방법으로, Box(1988)는 변수변환에 의한 방법을 제안하였다.

2.2 BOX의 변수변환 방법

만약 평균과는 독립적으로 분산을 줄일 수 있다면, 그리고 그 분산과 무관한 조정인자 a 가 존재한다면, PerMIA는 곧 분산이 될 것이다. Box(1988)는 이 점에 착안하여, 변수변환을 통해 분산을 안정시키면, 변환된 변수의 분산이 PerMIA가 된다는 것을 논증하였다. 그 논증은 다음의 가정에 바탕을 둔다.

<가정>

1. 변수변환 $Y^* = h(Y)$ 에 의해 Y^* 의 분산은 평균과 독립이 된다.
2. $\sigma_{Y^*}^2$ 는 제어인자 (d, a) 에서 d 만의 함수이다.

이러한 가정 하에서 식 (1)은 다음과 같이 된다.

$$\text{MSE} \approx [h'(\mu(d, a))]^{-2} \sigma_{Y^*}^2(d) + (\mu(d, a) - \tau)^2$$

따라서 $\sigma_{Y^*}^2(d)$ 는 PerMIA임을 알 수 있다. 왜냐하면 $\sigma_{Y^*}^2(d)$ 를 최소화하는 d 가 주어졌을 때 μ

는 α 만의 함수이고, 가정에 의해 σ_y^2 는 α 와 무관하기 때문이다.

여기에서 $\sigma \propto \mu^a$ 일 때, 위 가정을 만족시키는 멱변환(power transformation) h 를 찾기 위한 방법으로 Box (1988)는 λ 그래프(λ plot)의 사용을 제안하였다. λ 그래프는 변환의 형태를 나타내는 파라미터 λ 의 값을 변화시키면서, 각 λ 의 값에 대해 위치 및 산포 효과(location, dispersion effect)에 대한 t 값(또는 F 값)을 나타낸 그래프인데, 분산을 안정시키는 동시에 위치와 산포 효과를 분리할 수 있는 변환을 찾아내는 효과적인 방법으로 제안되었다. 위치와 산포 효과가 분리된다면, 변동을 최소화하는 제어인자의 조건을 찾을 수 있음과 동시에 조정인자도 알아낼 수 있을 것이다.

이러한 변수변환의 방법은 이론적 뒷받침이 있고, SN 비보다는 더 일반적으로 적용할 수 있다는 장점이 있지만, 적절한 변환을 찾아야 하는 번거로움이 따른다.

3. 다구찌의 SN 비에 대한 모의실험

이 절에서는 모의 실험을 통하여, 여러 가지 모형에서 다구찌의 SN 비가 변동을 줄이는 최적조건을 제대로 찾아내는지 알아보았다.

모의 실험에 이용된 실험 설계는 다음과 같으며, 성능특성치의 목표값이 있는 경우만 고려하였다.

실험조건

실험번호	d_1	d_2	d_3	a
1	0	0	0	0
2	1	0	0	1
3	0	1	0	1
4	1	1	0	0
5	0	0	1	1
6	1	0	1	0
7	0	1	1	0
8	1	1	1	1

여기에서 d_1 , d_2 , d_3 , a 는 제어인자를 나타내며, 특히 a 는 조정인자라고 가정한다. 모의실험을 위해 S-Plus를 사용하였으며, 각각의 실험조건에서 6개의 무작위 수(random number)를 다음의 각 절에서 설명할 정규분포로부터 추출하여, 잡음인자의 영향을 받는 Y 의 관측값으로 간주하였다. 총 48개의 관측값으로부터 8개의 SN 비를 계산하여 최적조건에서 SN 비가 가장 커지는가를 알아보았다. 이러한 모의실험을 아래의 여러 가지 모형 하에서 각각 100번 실시하였다.

3.1 $Y = \mu(d,a)\varepsilon(N,d)$ 인 경우

먼저, 전이함수로서 $Y = \mu(d,a)\varepsilon(N,d)$ 를 가정하여 다구찌의 SN 비인 $10\log_{10}(\bar{y}^2/S_y^2)$ 가 최적조건을 얼마나 잘 찾아내는지 알아보았다. 위 전이함수를 가정하면 Y 의 표준편차는 평균에 비례하게 되고, 따라서 분산을 안정시키는 변환은 로그변환이다. 이 때 Box는 로그변환된 변수의 분

산을 나타내는 적절한 통계량으로 $\log S_{\log Y}$ (단, $S_{\log Y}^2 = \log Y$ 의 표본분산)를 제안하였는데, 이 통계량이 최적조건을 얼마나 잘 찾아내는지 같이 알아보았다.

위 전이함수에서 $\mu(\mathbf{d}, \mathbf{a}) = 1 + \alpha_1(\alpha_3 d_1 + \alpha_4 a)$ 이고 $\varepsilon(\mathbf{N}, \mathbf{d}) \sim N(1, \{\alpha_2(1 + \alpha_5 d_1 + \alpha_6 d_2 + \alpha_7 d_3)\}^2)$ 이라고 가정한다. $\mu(\mathbf{d}, \mathbf{a})$ 와 $\varepsilon(\mathbf{N}, \mathbf{d})$ 를 이와 같이 가정하면, 각 제어인자의 수준을 나타내는 0, 1 값을 모의실험에서 제어인자의 실제값으로 바로 이용할 수 있으며, 각 제어인자의 효과의 크기를 계수 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7)$ 를 통해 쉽게 조정할 수 있다. 이상과 같이 가정했을 때, Y의 분산을 최소화하는 \mathbf{d} 의 최적조건은 실험번호 1이다. 조정인자 a의 최적조건은, 가정된 모형에 의해 \mathbf{d} 의 최적조건과는 독립적으로 찾을 수 있으므로, 무시하기로 한다.

아래 <실험 1>에서, 다구찌의 신호 대 잡음 비율과 Box의 $\log S_{\log Y}$ 가 각각 100번 중에서 92번을 찾아내었다. 표본오차를 고려한다면 두 통계량이 모두 예상대로 \mathbf{d} 의 최적조건을 제대로 찾아낼 수 있다.

<실험 1>

계수 값	:	$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7) = (0.1, 0.005, 1, 2, 1, 2, 3)$
실험번호	:	1 2 3 4 5 6 7 8
SN 비	:	92 8 0 0 0 0 0 0
$\log S_{\log Y}$:	92 8 0 0 0 0 0 0

3.2 Y = $\mu(\mathbf{d}, \mathbf{a}) + \varepsilon(\mathbf{N}, \mathbf{d})$ 인 경우

전이함수로서 $Y = \mu(\mathbf{d}, \mathbf{a}) + \varepsilon(\mathbf{N}, \mathbf{d})$ 를 가정하여 다구찌의 SN 비와 Box의 $\log S_Y$ (단, $S_Y^2 = Y$ 의 표본분산)에 대해 알아본다. 이 때 Y의 분산은 평균과 독립이다. 여기에서 $\mu(\mathbf{d}, \mathbf{a})$ 는 3.1절에서와 같으며, $\varepsilon(\mathbf{N}, \mathbf{d}) \sim N(0, \{\alpha_2(1 + \alpha_5 d_1 + \alpha_6 d_2 + \alpha_7 d_3)\}^2)$ 이라고 가정한다. $\log S_Y$ 를 사용한 이유는 분산이 평균과 독립일 때는 변수변환이 필요하지 않기 때문이다. 그러므로 PerMIA가 아닌 SN 비를 사용하였을 때보다 $\log S_Y$ 를 사용하였을 때 \mathbf{d} 의 최적조건을 더 잘 찾아낼 수 있을 것으로 기대된다.

두 통계량 이외에 통계량 $\log S_{\log Y}$ 도 적용해 보았으나, 신호 대 잡음 비율을 사용하였을 때와 같은 결과를 나타내므로 표에는 나타내지 않았다. 그런데 SN 비와 $\log S_{\log Y}$ 가 3.1절의 모형이 아닌 경우에도 같은 결과를 갖는 이유를 다음과 같이 생각해 볼 수 있다. \log 함수는 좁은 관심영역 내에서는 선형 함수로 잘 근사되므로 $\log(Y) \approx \log(\mu) + (Y - \mu)/\mu$ 라 들 수 있다. 그러면 $\sigma_{\log Y}^2 \approx \sigma^2/\mu^2$ 이고, 따라서 $\log \sigma_{\log Y} \propto \log(\mu^2/\sigma^2)$ 이므로, 두 측도의 추정량들이 같은 결과를 가진다고 볼 수 있다.

<실험 2>

계수 값	:	(0.1 0.005 1 2 1 2 3)
실험번호	:	1 2 3 4 5 6 7 8
SN 비	:	79 18 2 1 0 0 0 0
$\log S_Y$:	84 13 2 1 0 0 0 0

<실험 2>에서 실험조건에 따른 분산의 범위는 $((0.005)^2, (0.035)^2)$ 이며 평균의 범위는 (1, 1.3)이다. 두 통계량이 비슷한 결과를 보이지만, Box의 $\log S_Y$ 를 사용한 방법이 좀 더 바람직한 결과를 가져왔음을 알 수 있다. 그런데 SN 비가 PerMIA가 아님에도 불구하고 최적조건을 제대로 찾아내는 이유는, 실험번호 1의 조건에서 분산이 최소이며 평균은 다른 실험번호에 비해 그다지 작지 않기 때문이다. 이제 실험 3과 4에서 분산은 그대로 두고 (즉, 실험번호 1에서 분산이 가장 작도록 한다) 평균의 변화 폭을 크게 하면 어떤 결과가 나타나는지 살펴보기로 하자.

<실험 3>

계수 값	:	(0.1 0.005 5 1 1 2 3)
실험번호	:	1 2 3 4 5 6 7 8
SN 비	:	64 31 1 1 1 2 0 0
$\log S_Y$:	90 8 1 0 1 0 0 0

<실험 3>에서 평균 값의 범위는 (1, 1.6)으로 <실험 2>보다 변화의 정도가 더 크다. 이 때, SN 비를 사용하면 최적조건을 제대로 찾아내지 못함을 알 수 있다. 그 이유는 실험번호 1에서의 평균이 다른 실험조건에 비해 작고 따라서 SN 비의 값이 크지 않게 되기 때문이다.

<실험 4>

계수 값	:	(0.1 0.005 10 1 1 2 3)
실험번호	:	1 2 3 4 5 6 7 8
SN 비	:	42 50 0 5 1 0 0 2
$\log S_Y$:	91 7 0 1 1 0 0 0

<실험 4>에서 평균 값의 범위는 (1, 2.1)로 앞의 실험들보다 변화의 정도가 더 크다. 예상대로 $\log S_Y$ 를 사용하였을 때는 최적조건을 제대로 찾아내지만, SN 비를 사용하였을 때는 분산이 작은 실험조건보다는 평균이 크게 되는 실험조건인 실험번호 2를 더 많이 선정하게 됨을 알 수 있다.

3.3 $Y = \mu(d,a) + \mu^2(d,a)\varepsilon(N,d)$ 인 경우

전이함수로서 $Y = \mu(d,a) + \mu^2(d,a)\varepsilon(N,d)$ 를 가정하여 다구찌의 SN 비와 Box의 $\log S_{1/Y}$ (단, $S^2_{1/Y} = (1/Y)$ 의 표본분산)에 대해 알아본다. 이 때 Y의 표준편차는 평균의 제곱에 비례한다. $\mu(d,a)$ 와 $\varepsilon(N,d)$ 는 3.2절에서와 같이 가정한다. $\log S_{1/Y}$ 를 사용한 이유는, 표준편차가 평균의 제곱에 비례할 때는 Y를 $(1/Y)$ 로 변수변환 하여야 분산이 안정되기 때문이다.

<실험 5>

계수 값	:	(0.1 0.005 1 2 1 2 3)
실험번호	:	1 2 3 4 5 6 7 8
SN 비	:	97 1 0 1 0 0 1 0
$\log S_{1/Y}$:	87 11 0 1 0 0 1 0

<실험 5>에서는 PerMIA가 아닌 SN 비가 오히려 d 의 최적조건을 더 잘 찾아내었다. 그 이유는 SN 비 = $10\log_{10}\{\mu^2(d,a)/\mu^4(d,a)\sigma^2(d)\} = 10\log_{10}\{1/\mu^2(d,a)\sigma^2(d)\}$ 이므로 평균과 분산이 각각 최소일 때 SN 비가 가장 커지게 된다. 그런데 <실험 5>에서 d 의 최적조건인 실험번호 1에서 $\sigma^2(d)$ 가 최소이며 동시에 $\mu^2(d,a)$ 도 최소이므로, SN 비가 최적조건을 더 잘 찾게 된다.

이제 <실험 6>에서, 두 방법의 차이가 명확히 나타나도록 하기 위해, $\sigma^2(d)$ 가 최소일 때 $\mu^2(d,a)$

가 최대가 되도록 계수를 정하여 보자.

<실험 6>

계수 값	:	(0.1 0.005 -2 -4 1 2 3)
실험번호	:	1 2 3 4 5 6 7 8
SN 비	:	27 67 2 1 3 0 0 0
logS _{1/Y}	:	93 5 1 0 1 0 0 0

기대했던 것과 같이 두 방법은 차이가 많이 났으며, 실험번호 1에서 분산이 가장 작음에도 불구하고, SN 비를 사용하면 평균이 최소가 되는 실험번호 2를 최적조건으로 선정하게 됨을 알 수 있다.

4. 결 론

제 3 절의 모의 실험에서, 분산(또는 표준편차)과 평균이 $\sigma \propto \mu$ 인 관계가 아닐 때에는 SN 비가 최적조건을 제대로 찾아내지 못함을 구체적으로 알 수 있었다. 다구찌의 SN 비는 성능특성치의 분산과 평균, 두 값의 크기에 모두 영향을 받으므로 분산과 평균의 관계에 따라서는 정확하지 못한 판단을 내리게 되며, 상황에 따라서는 잘못 판단하게 되는 정도가 아주 심각하게 됨을 알 수 있었다.

반면에 분산을 안정시키는 변수변환을 한 다음, 변환된 변수의 분산을 산포의 측도로 이용하면 최적조건을 제대로 찾아냄을 알 수 있었다. 하지만 모의 실험에서는 모형에 따른 적절한 변환을 알고 있고 이 변환을 적용하였으므로, SN 비와 공정한 비교가 될 수 없음이 지적되어야 할 것이다. 만약 모의실험을 통해, SN 비의 결함을 알아보는 데에만 그치지 않고, SN 비와 Box의 변수변환 방법을 비교하고자 한다면, 모의실험에서 λ 그래프 등을 통해 적절한 변환을 자료로부터 직접 찾아야 할 것이다.

참고문헌

- [1] Box, G. (1988). Signal-to-Noise Ratios, Performance Criteria, and Transformation (with discussion), *Technometrics*, Vol. 30, No. 1, 1-40.
- [2] Kacker, R. N. (1985). Off-Line Quality Control, Parameter Design, and Taguchi Method (with discussion), *Journal of Quality Technology*, Vol. 17, No. 4, 176-209.
- [3] Leon, R. V., Shoemaker, A. C., and Kacker, R. N. (1987). Performance Measures Independent of Adjustment(with discussion), *Technometrics*, Vol. 29, No. 3, 253-285.
- [4] Nair, V. N. (1992). Taguchi's Parameter Design: A Panel Discussion, *Technometrics*, Vol. 34, No. 2, 127-161.