

# 기호 다치 논리 함수를 이용한 적응오토마타

## Adaptive Automata using Symbolic Multi-Valued Logic Function

정 환 목\*, 손 병 성\*\*

Hwanmook Chung\*, Byoungsung Shon\*\*

※본 논문은 1996년도 대구효성가톨릭대학교 학술 연구비에 의하여 연구되었음

### 요 약

본 논문에서는 입력, 상태, 그리고 상태 변화에 따른 오토마타의 상태표를 구성하고 그 상태표를 기호 다치 논리식으로 변환한다. 또한, 기호 다치 논리 함수 미분의 성질을 이용하여 오토마타의 입력 스트링 따라 상태의 변화 및 출력이 동적으로 적용할 수 있는 적응오토마타를 제안하고 그 성질을 해석한다.

### ABSTRACT

In this paper, we construct the state table of the automata according to input, state, and change of state and transform that state table into symbolic multi-valued logic formula. Also, we propose an adaptive automata which adapts dynamically change of state according to the input string of automata by using the properties of derivative about the symbolic multi-valued logic function. And we analyze the properties of the adaptive automata.

### I. 서 론

오토마타는 수학적으로 추상화된 기계로 순차적이고 전기적인 회로의 특성을 모델링하는데 사용되면서 그 응용의 범위가 점차 확대되어 컴퓨터 게임, 인간지능, 기계처리, 신경 시스템 동작(nervous system activity), 그리고 로봇 이동 시스템(robotic motion system)과 같은 행동 상황과 지능 시스템(intelligent systems)을 모델링하는데 사용된다[1, 2].

오토마타의 여러 형태들은 이러한 응용의 여러 분

야에서 모델링으로 이용되어지고 몇가지 방법으로 분류되어진다. 분류의 한 방법은 오토마타와 언어 사이에 대응되는 언어의 복잡성에 따른 것이며, 또 다른 방법은 언어들을 받아들이고, 생성하고, 변환하는 것과 같이 언어를 이용하는 방법이다. 좀 더 효과적인 방법은 오토마타가 같은 입력에 대해 다양한 출력을 생성할 수 있는가에 따라 나누는 방법이며 결정적인 것과 비결정적인 것으로 나눌 수 있다[2, 3].

본 논문에서는 기호 다치 논리 함수를 이용하여 오토마타를 하나의 기호 다치 논리식으로 표현한다[4, 5]. 이와같이 표현된 논리식을 기호 다치 논리 함수의 미분의 성질을 이용하여 입력 스트링의 변화에 따라

\*대구효성가톨릭대학교 전자정보공학부 교수

\*\*상지전문대학 전산정보처리과 부교수

상태의 변화 및 출력이 동적으로 적용할 수 있는 적용오토마타를 제안하고 그 성질을 해석한다.

## II. 오토마타

오토마타는 다음과 같이 다섯 가지 요소로 구성된다.

$$A = (Q, q_0, I, \delta, F)$$

$Q$ : 상태들의 공집합이 아닌 유한집합

$q_0$ :  $q_0 \in Q$ 인 초기 상태

$I$ : 입력 알파벳으로서 공집합이 아닌 유한 집합

$\delta$ :  $Q \times I$ 로 정의되는 전이 함수

$F$ :  $F \in Q$ 인 최종 상태들의 집합

여기서 상태  $q$ 에서  $q'$ 로의 화살표가  $a$ 에 의해 존재한다면  $\delta(q, a, q') = 1$ 이며, 그래프적 표현은 그림 1과 같다.

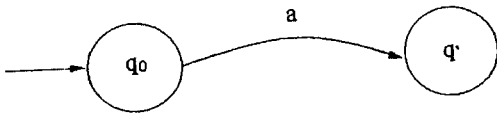
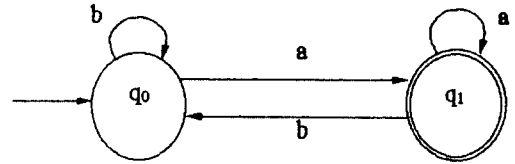


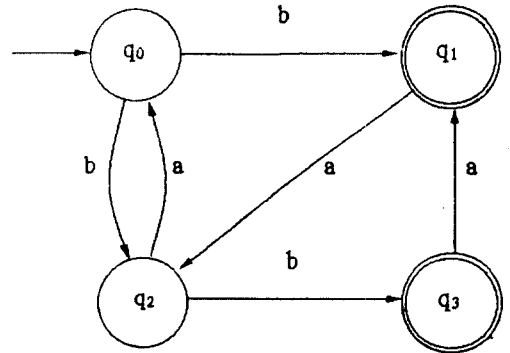
그림 1. 상태  $q$ 에서  $a$ 에 의한 상태  $q'$ 로의 전이

$\delta(q, b, q') = 0$ 이면  $q$ 에서  $q'$ 로  $b$ 라고 이름붙여진 화살표가 없음을 의미한다. 여기서  $q$ 는 원시 상태(source state)라 하고,  $q'$ 는 목표 상태(destination state)라 한다. 또  $f(q) = 1$ 이면 상태  $q$ 가 최종상태임을 의미하고  $f(q) = 0$ 이면  $q$ 는 최종 상태가 아님을 의미한다.

결정적 오토마타는 어떤 상태에서 한개의 입력 기호에 대하여 한개의 다음 상태를 갖는 오토마타를 말하며, 비결정적 오토마타는 어떤 상태에서 주어진 입력 기호를 보고 갈 수 있는 다음 상태가 하나 이상 존재할 수 있는 오토마타를 말한다. 결정적 오토마타는 비결정적 오토마타의 특별한 형태로, 임의의 고정된 상태  $q$ 와 입력  $a$ 에 대해 목표 상태  $q'$ 가 단지 하나 존재하는 비결정적 오토마타이다. 즉,  $q'$ 는 주어진 상태  $q$ 와  $a$ 에 대한  $\delta(q, a, q') = 1$ 인 유일한 상태이다.



(a) 결정적 오토마타



(b) 비결정적 오토마타

그림 2. 결정적 오토마타와 비결정적 오토마타

## III. 기호 다치 논리 함수의 변화에 따른 성질 분석

기호 다치 논리 함수의  $f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$ 에서 기호 다치 변수  $x_i$ 의 값을  $a$ 에서  $b$ 로 변화시켰을 때 함수  $f$ 의 값의 변화를 기호 다치 논리 함수로의 변화라 하고,  $f'_{x_i}(a, b)$  또는  $f'_{x_i}(b) |_{x_i=a}$ 로 표시한다[4, 5, 6, 7, 8, 9, 10].

$$f'_{x_i}(a, b) = f(x_i, (a)) \oplus f(x_i, (b)) \\ = f(x_1, \dots, a, \dots, x_n) \oplus f(x_1, \dots, b, \dots, x_n) \quad (1)$$

표 1. 진리표

$x_2$	$x_1$	a	b	c
	a	c	c	b
	b	a	c	a
	c	a	c	c

[표 1]의 진리표를 논리식으로 구성하고 기호 다치 변수 값의 변화에 따라 기호 다치 논리 함수의 변화를 유도하여 그 결과를 해석하면 다음과 같다.

(1) 논리식

[표 1]의 진리표를 만족하는 기호 다치 논리함수를 식으로 표현하면 (식 2)와 같다.

$$f = a(x_1^{aa}x_2^{bc} + x_1^{bb}x_2^{bb}) + b(x_1^{cc}x_2^{aa}) + c(x_1^{ab}x_2^{aa} + x_1^{bb}x_2^{bc} + x_1^{cc}x_2^{cc}) \quad (2)$$

(2) 함수의 변화

기호 다치 변수  $x_1$ 의 값이 a에서 c로 변할 때 그 변화를 식으로 표현하면 (식 3)과 같다.

$$f'x_1(a, c) = \{ax_2^{bc} + cx_2^{aa}\} \oplus \{ax_2^{bb} + bx_2^{aa} + cx_2^{cc}\} \quad (3)$$

(3) 결과 해석

$x_1$ 의 값이 a에서 c로 변할 때 값이 어떻게 변하는지 그 결과를 분석하면 다음과 같다.

①  $x_2 = a$ 인 경우

$f'x_1(a, c) = c \oplus b$ : c에서 b상태로의 변화를 나타낸다.

②  $x_2 = b$ 인 경우

$f'x_1(a, c) = a \oplus a$ : f는 변화하지 않고 그상태를 유지한다.

③  $x_2 = c$ 인 경우

$f'x_1(a, c) = a \oplus c$ : a에서 c상태로의 변화를 나타낸다.

IV. 오토마타의 상태 해석

오토마타는 다음과 같이 하여 문자열을 처리한다. 는 어떤 특정의 초기 상태에서 시작하여 입력 문자열  $\sigma = \sigma_1\sigma_2 \dots \sigma_n$ 의 기호를 왼쪽에서 오른쪽으로 읽고, 어느 원시 상태와 그 때 읽은 문자에만 의존하여 상태를 바꾼다.  $\sigma_n$ 의 문자를 읽은 후,  $\alpha$ 가 최종 상태에 들어 있으면  $\alpha$ 는  $\sigma$ 를 인식한다. 그렇지 않으면  $\alpha$ 는  $\sigma$ 를 인식하지 않는다.

본 논문에서는 오토마타를 기호 다치 논리 함수에 대한 변화의 성질을 이용하여 전이 과정과 입력 문자

열  $\sigma$ 에 대한 인식여부를 결정적 오토마타와 비결정적 오토마타로 나누어 해석할 것이다.

4.1 결정적 오토마타

결정적 오토마타는 어떤 상태에서 하나의 입력 기호에 대하여 하나의 다음 상태를 갖는 오토마타를 말한다.

4.1.1 결정적 오토마타  $\alpha_0$

$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}$ ,  $q_0 =$  초기 상태,  $I = \{a, b, c\}$ .

$f(q_3) = f(q_4) = f(q_5) = 0$ ,  $f(q_0) = f(q_1) = f(q_2) = 1$  이므로  $q_0, q_1, 2$ 가 최종 상태(인식 상태)이다.

$\delta(q_0, b, q_0) = \delta(q_0, c, q_0) = \delta(q_0, a, q_1) = \delta(q_1, a, q_1) = \delta(q_1, c, q_0) = \delta(q_1, b, q_2) = \delta(q_2, a, q_1) = \delta(q_2, b, q_0) = \delta(q_1, c, q_0) = \delta(q_3, b, q_3) = \delta(q_3, c, q_3) = \delta(q_3, a, q_4) = \delta(q_4, a, q_4) = \delta(q_4, b, q_5) = \delta(q_4, c, q_3) = \delta(q_5, a, q_4) = \delta(q_5, b, q_3) = \delta(q_5, c, q_0) = 1$ 고, 나머지 전이 함수값들은 0이다.

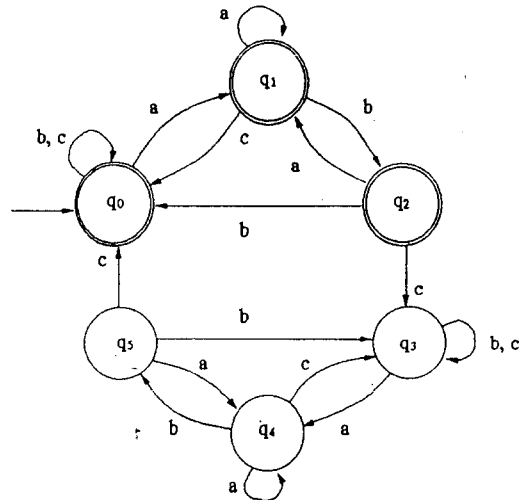


그림 3. 결정적 오토마타  $\alpha_0$

[표 2]는 그림 3에서 고려한 오토마타 0를 상태표로 나타낸 것이다.

표 2.  $\alpha_0$ 의 상태표

$x_2$ (input)	$x_1$ (input)	a	b	c
$q_0$	$q_0$	$q_1$	$q_0$	$q_0$
$q_1$	$q_1$	$q_1$	$q_2$	$q_0$
$q_2$	$q_1$	$q_1$	$q_0$	$q_3$
$q_3$	$q_4$	$q_4$	$q_3$	$q_3$
$q_4$	$q_4$	$q_4$	$q_5$	$q_3$
$q_5$	$q_4$	$q_4$	$q_3$	$q_0$

[표 2]로부터 다음과 같은 논리식을 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 f = & q_0(X_1 X_2 + X_1 X_2 + X_1 X_2 + X_1 X_2) \\
 & + q_1(X_1 X_2 + X_1 X_2) \\
 & + q_2(X_1 X_2) + q_3(X_1 X_2 + X_1 X_2 + X_1 X_2 + X_1 X_2) \\
 & + q_4(X_1 X_2 + X_1 X_2) + q_5(X_1 X_2)
 \end{aligned} \tag{4}$$

(1) 특정 상태에서 입력 변화에 따른 상태 변화

어느 특정 상태에서 입력 변화에 따라 전이되는 다음 상태를 논리식의 변화로 알 수 있다. (식 5)로부터 입력 a에서 입력 c로 바뀔 경우 어느 특정상태에서의 상태 변화를 알 수 있다.

$$\begin{aligned}
 f'(a, c) = & \{q_1(X_2) + q_1(X_2) + q_4(X_2) + q_4(X_2)\} \\
 & \oplus \{q_0(X_2) + q_0(X_2) + q_0(X_2) + q_3(X_2) + q_3(X_2) + q_3(X_2)\}
 \end{aligned} \tag{5}$$

- $x_2 = q_0$ 인 경우  $q_1 \oplus q_0 \dots \textcircled{1}$
- $x_2 = q_1$ 인 경우  $q_1 \oplus q_0 \dots \textcircled{2}$
- $x_2 = q_2$ 인 경우  $q_1 \oplus q_3 \dots \textcircled{3}$
- $x_2 = q_3$ 인 경우  $q_4 \oplus q_3 \dots \textcircled{4}$
- $x_2 = q_4$ 인 경우  $q_4 \oplus q_3 \dots \textcircled{5}$
- $x_2 = q_5$ 인 경우  $q_4 \oplus q_0 \dots \textcircled{6}$

①은 상태  $q_0$ 에서 a를 읽으면 상태  $q_1$ 으로 전이하며 c를 읽으면  $q_0$ 으로 전이됨을 의미하고, ②는 상태  $q_1$ 에서 a를 읽으면 상태  $q_1$ 로, c를 읽으면  $q_0$ 으로 전이

됨을 의미한다. 그리고, ③은 상태  $q_2$ 에서 a를 읽으면 상태  $q_1$ 로, c를 읽으면  $q_3$ 으로 전이됨을 의미한다. ④는 상태  $q_3$ 에서 a를 읽으면 상태  $q_4$ 로, c를 읽으면  $q_3$ 으로, ⑤는 상태  $q_4$ 에서 a를 읽으면  $q_4$ 로, c를 읽으면  $q_3$ 으로, ⑥은 상태  $q_5$ 에서 a를 읽으면  $q_4$ 로, c를 읽으면  $q_0$ 으로 전이됨을 의미한다.

(2) 연속 입력 문자열에 의한 상태 변화

오토마타  $\alpha_0$ 의 입력 문자열 가 abcabc인 경우 상태 변화에 대한 논리식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 f'(a, b, c, a, b, c) = & \{q_1(X_2) + q_1(X_2) + q_4(X_2) + q_4(X_2)\} \\
 & \oplus \{q_0(X_2) + q_0(X_2) + q_2(X_2) + q_3(X_2) + q_3(X_2) + q_5(X_2)\} \\
 & \oplus \{q_0(X_2) + q_0(X_2) + q_0(X_2) + q_3(X_2) + q_3(X_2) + q_3(X_2)\} \\
 & \oplus \{q_1(X_2) + q_1(X_2) + q_4(X_2) + q_4(X_2)\} \\
 & \oplus \{q_0(X_2) + q_0(X_2) + q_2(X_2) + q_3(X_2) + q_3(X_2) + q_5(X_2)\} \\
 & \oplus \{q_0(X_2) + q_0(X_2) + q_0(X_2) + q_3(X_2) + q_3(X_2) + q_3(X_2)\}
 \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
 abcabc \\
 q_0 \Rightarrow & q_1 \oplus q_2 \oplus q_3 \oplus q_4 \oplus q_5 \oplus q_0
 \end{aligned} \tag{7}$$

(식 6)으로부터 초기 상태  $q_0$ 가 a의 입력을 받아 상태  $q_1$ 으로,  $q_1$ 에서 다시 b를 받아  $q_2$ 로,  $q_2$ 에서 c를 받아  $q_3$ 로,  $q_3$ 에서 a를 받아  $q_4$ 로,  $q_4$ 에서 b를 받아  $q_5$ 로,  $q_5$ 에서는 c를 받아  $q_0$ 으로 전이됨을 알 수 있다. 마지막 상태인  $q_0$ 가 최종 상태이기 때문에 이 입력 문자열은 승인된다.

4.2 비결정적 오토마타

비결정적 오토마타는 어떤 상태에서 주어진 입력 기호를 보고 갈 수 있는 다음 상태가 하나 이상 존재할 수 있는 오토마타이다. 따라서 비결정적 오토마타는 다음 상태를 결정하기 위하여 여러가지 가능성을 고려해야 되기 때문에 비결정적이다. 비결정적 오토마타  $\alpha$ 는 결정적 오토마타와 같이 입력 문자열  $\sigma$ 를 처리한다.

비결정적 오토마타  $\alpha$ 는 입력  $\sigma$ 로부터 오토마타를 돌아가게 하는 가능한 방법 중 적어도 하나가  $\sigma$ 의 최

중 기호를 읽은 후 최종 상태에 들어간다면 입력 문자열을 인식한다.

4.2.1 비결정적 오토마타  $\alpha_1$

$Q = \{q_0, q_1, q_2\}$ ,  $q_0 =$  초기 상태,  $I = \{a, b\}$ .

$f(q_0) = f(q_1) = 0$ ,  $f(q_2) = 1$  이므로  $q_2$ 가 최종 상태(승인 상태)이다.

$\delta(q_0, a, q_1) = \delta(q_0, a, q_2) = \delta(q_1, a, q_2) = \delta(q_1, b, q_1) = \delta(q_2, b, q_0) = 1$ 이고, 나머지 전이 함수값들은 0이다.

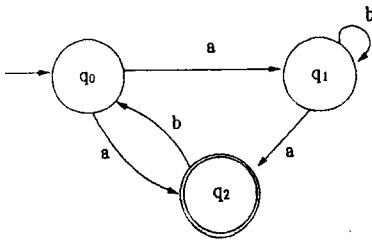


그림 4. 비결정적 오토마타  $\alpha_1$

[표 3]은 그림 4에서 고려한 오토마타 1을 상태표로 나타

표 3.  $\alpha_1$ 의 상태표

$X_2$ (state)	$X_1$ (input)	
	a	b
$q_0$	$\{q_1, q_2\}$	$\{\emptyset\}$
$q_1$	$\{q_2\}$	$\{q_1\}$
$q_2$	$\{\emptyset\}$	$\{q_0\}$

[표 3]로 부터 다음과 같은 논리식을 유도할 수 있다.

$$f = q_0(X_1 X_2) + q_1(X_1 X_2 + X_1 X_2) + q_2(X_1 X_2 + X_1 X_2) \quad (8)$$

(1) 특정 상태에서 입력 변화에 따른 상태 변화

(식 9)은 입력이 a에서 b로 바뀔 경우 상태 변화를 논리식으로 표현한 것이다.

$$f'(a, b) = \{q_1(X_2) + q_2(X_2) + q_2(X_2)\} \oplus \{q_0(X_2) + q_1(X_2)\} \quad (9)$$

- $x_2 = q_0$ 인 경우  $(q_1 + q_2) \oplus \emptyset$  ①
- $x_2 = q_1$ 인 경우  $q_2 \oplus q_1$  ②
- $x_2 = q_2$ 인 경우  $\emptyset \oplus q_0$  ③

①은 상태  $q_0$ 에서 a를 읽으면  $q_1$ 나  $q_2$ 로 전이될 수 있음을 의미하고 b를 읽으면 어느 상태로든 전이될 수 없음을 의미한다. ②는 상태  $q_1$ 에서 a를 읽으면  $q_2$ 로 전이됨을 의미하고 b를 읽으면  $q_1$ 로, ③은 상태  $q_2$ 에서 a를 읽으면 전이되지 않음을 의미하고 b를 읽으면  $q_0$ 로 전이됨을 의미한다.

(2) 연속 입력 문자열에 의한 상태 변화

(식 10)은 입력 문자열  $\sigma = abaa$ 에 대한 논리식의 변화를 보여주며, (식 11)은 (식 10)로 부터 초기 상태  $q_0$ 에서  $abaa$ 에 의해 각각 전이되는 상태들을 보여준다.

$$f'(a, b, a, a) = \{q_1(X_2) + q_2(X_2) + q_2(X_2)\} \oplus \{q_0(X_2) + q_1(X_2)\} \oplus \{q_1(X_2) + q_2(X_2) + q_2(X_2)\} \oplus \{q_1(X_2) + q_2(X_2) + q_2(X_2)\} \quad (10)$$

$$abaa \Rightarrow \underbrace{(q_1 + q_2)}_{\text{㉠}} \oplus \underbrace{(q_1 + q_0)}_{\text{㉡}} \oplus \underbrace{(q_1 + q_2)}_{\text{㉢}} \oplus \underbrace{(q_2)}_{\text{㉣}} \quad (11)$$

표 4. 입력 문자열 abaa에 대한 전이표

Initial state	Input string			
	a	b	a	a
$q_0$	$q_1$	$q_1$	$q_2$	$\emptyset$
			$q_1$	$q_2$
	$q_2$	$q_0$	$q_2$	$\emptyset$

초기 상태  $q_0$ 에서  $\sigma = abaa$ 를 읽을 경우 [표 4]와 같이 서로 다른 3가지 이동 방법이 있다. ①과 ③은 입력 문자열이 마지막에서 어느 상태로도 전이 될 수 없음을 나타내고 ②는 모든 문자들이 다 읽히고 마지막 상태가 승인 상태이다. 따라서 입력 문자열은 승인된다.

㉠, ㉡, ㉢, ㉣은 각각 하나의 입력 문자를 읽은 후 전이된 상태들을 나타내고 있다. 즉, 초기 상태  $q_0$ 에서 입력  $a$ 를 받아 ㉠상태로, ㉠상태에서 입력  $b$ 를 받아 ㉡상태로, ㉡상태에서 입력  $a$ 를 받아 ㉢상태로, ㉢상태에서 입력  $a$ 를 받아 ㉣상태로 전이됨을 의미한다. ㉣상태중에 최종상태  $q_2$ 가 있으므로 이 문자열이 승인됨을 알 수 있다.

4.2.2.1에 대응하는 결정적 오토마타  $\alpha_1'$

비결정적 오토마타에 대해서 같은 문자열을 승인하는 결정적 오토마타가 존재한다. 여기서는 비결정적 오토마타를 결정적 오토마타로 변환한 후 앞절에서 전개한 바와 같이 상태를 해석해 보려 한다. 그림 5는 그림 4의 비결정적 오토마타에 대응하는 결정적 오토마타이다.

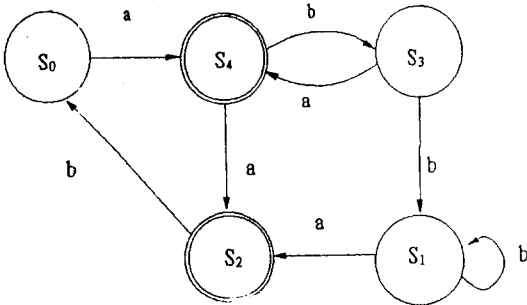


그림 5. 비결정적 오토마타  $\alpha_1$ 에 대응하는 결정적 오토마타  $\alpha_1'$

[표 5]는  $\alpha_1'$ 을 상태표로 나타낸 것이다.

[표 5]는 (식 12)와 같은 논리식으로 유도할 수 있다.

$$f = s_0(X_1 X_2) + s_1(X_1 X_2 + X_1 X_2) + s_2(X_1 X_2 + X_1 X_2) + s_3(X_1 X_2) + s_4(X_1 X_2 + X_1 X_2) \quad (12)$$

표 5.  $\alpha_1'$ 의 상태표

$x_2$ (state)	$x_1$ (input)	a	b
$s_0 = \{q_0\}$		$s_4$	$\emptyset$
$s_1 = \{q_1\}$		$s_2$	$s_1$
$s_2 = \{q_2\}$		$\emptyset$	$s_0$
$s_3 = \{q_0, q_1\}$		$s_4$	$s_1$
$s_4 = \{q_1, q_2\}$		$s_2$	$s_3$

(1) 특정 상태에서 입력 변화에 따른 상태 변화

다음은 어느 특정상태에서 입력  $a$ 에서 입력  $b$ 로 바뀔 경우의 상태 변화를 나타내고 있다.

$$f'(a, b) = \{s_2(X_2 + X_2) + s_4(X_2 + X_2)\} \oplus \{s_0(X_2) + s_1(X_2 + X_2) + s_3(X_2)\} \quad (13)$$

- $x_2 = s_0$ 인 경우       $s_4 \oplus \emptyset$
- $x_2 = s_1$ 인 경우       $s_2 \oplus s_1$
- $x_2 = s_2$ 인 경우       $\emptyset \oplus s_0$
- $x_2 = s_3$ 인 경우       $s_4 \oplus s_1$
- $x_2 = s_4$ 인 경우       $s_2 \oplus s_3$

(2) 연속 입력 문자열에 의한 상태 변화

입력 문자열이  $abaa$ 인 경우 상태 전이는 다음과 같다.

$$f'(a, b, a, a) = \{s_2(X_2 + X_2) + s_4(X_2 + X_2)\} \oplus \{s_0(X_2) + s_1(X_2 + X_2) + s_3(X_2)\} \oplus \{s_2(X_2 + X_2) + s_4(X_2 + X_2)\} \oplus \{s_2(X_2 + X_2) + s_4(X_2 + X_2)\} \quad (14)$$

$abaa$

$$s_0 \Rightarrow s_4 \oplus s_3 \oplus s_4 \oplus s_2 \quad (15)$$

여기서  $s_0$ 에서 입력 문자열  $abaa$ 를 입력 받아  $s_4, s_3, s_4, s_2$ 로 차례로 전이됨을 알 수 있다. 또한  $s_0 = \{q_0\}, s_2 = \{q_2\}, s_3 = \{q_0, q_1\}, s_4 = \{q_1, q_2\}$  이므로 입력 문자열  $abaa$ 인 경우 앞절의 비결정적 오토마타 1에서의 전이 과정과 같음을 알 수 있다.

