

회전체의 비선형 정규 모드에 관한 연구

김 용 철*
(95년 11월 30일 접수)

A study on the Nonlinear Normal Modes of Rotors

Yong Chul Kim*

Key Words : Nonlinear Normal Modes, Nonlinear Rotor System, Modal Dynamics, Center Manifold Reduction, Nonlinear Elastic Supports

Abstract

In the present paper nonlinear normal modes of a rotor system is studied. The methodology to obtain the nonlinear normal modes is based on center manifold reduction technique. It also provides a way of nonlinear coordinate transform from the physical coordinates to the modal coordinates and an idea of individual nonlinear modal dynamics. In order to apply the present method to a rotor dynamics a single mass rotor system on nonlinear elastic supports is employed and the nonlinear normal modes of the system are obtained.

1. 서 론

선형 동적시스템에서 정규 모드의 개념과 구하는 방법은 이미 잘 알려져 있으며 현재 여러 진동해석분야에서 많이 사용되고 있다. 그러나 비선형 동적시스템에서의 비선형 정규 모드에 대한 개념은 1960년대 Rosenberg¹⁾에 의하여 소개, 발전되어 왔으나 선형 정규모드에 비하여 덜 알려져 있으며 연구도 최근에서야 활발히 진행되고 있다.

비선형 정규모드는 원래의 물리적 좌표계와 모달 좌표계의 비선형 좌표변환방법을 제공해 줄

뿐만 아니라, 모달 좌표계에서 각각의 비선형 모드의 특성을 파악할 수 있고, 나아가 효율적인 비선형 모드제어를 가능하게 해 준다.

비선형 정규모드에 대한 연구를 간단히 살펴보면 1960년대 후반 Rosenberg¹⁾등에 의하여 개념이 소개된 후 Rand²⁾, Vakakis와 Caughey³⁾등에 의하여 발전되어 왔다. 최근에 Benamar와 Bennouna⁴⁾는 대변위 진동이 고유진동수와 고유진동형에 미치는 영향에 대하여 연구하였고, Shaw와 Pierre^{5,6)}는 다자유도계 및 연속체 시스템에서의 CMR (center manifold reduction)방법을 사용하여 정규

* 영남대학교 공과대학 기계공학과

모우드를 구하는 방법을 발표하였으며, Nayfeh⁷⁾ 등은 다중 척도법(multiple scale)을 사용하여 연속체 시스템의 비선형 정규 모우드를 구하는 방법을 발표하였다.

비선형 정규 모우드를 구하는 방법은 크게 3 가지로 분류할 수 있으며, 첫번째 방법은 원래의 비선형 방정식으로 부터 시간과 공간의 함수를 분리한 후 harmonic balance 방법을 사용하여 구하는 방법이고⁴⁾, 두번째 방법은 Galerkin 방법을 사용하여 지배방정식을 이산화 시킨후 얻은 모달 진폭에 대한 비선형 2차 연립방정식을 섭동법 또는 invariant manifold 이론등을 이용하여 구하는 방법이다. 세번째 방법은 지배방정식인 비선형 편미분 방정식에다 다중 척도법을 직접 사용하는 방법이다.

본 연구에서는 다중 척도법과 CMR 방법을 서로 비교해 보았으며, 특히 비선형 회전체 시스템의 비선형 정규 모우드를 구하기 위하여 CMR 방법을 사용하여 비선형 정규 모우드와 비선형 모달 방정식을 구하였다. 회전체 시스템에서 비선형 정규 모우드를 구하려는 시도는 아직까지 초기 단계이며 앞으로 비선형 모달 제어 방법 개발에 필수적이라 판단된다.

2. 해석방법

우선 일반적인 다자유도계 시스템에 대한 비선형 정규 모우드를 구하는 방법을 간단히 설명하고 그 결과를 회전체 시스템에 적용시켰다. 이 시스템은 내부공진이 없고, 고유치가 중복되지 않는다고 가정한다.

2.1 CMR 방법

다자유도계의 운동방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{cases} \ddot{x}_i = y_i \\ \dot{y}_i = f_i(x, y) \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

$$\text{여기서, } x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$\text{또는 벡터형태로 나타내면 } \dot{z} = A(z)z \quad (2)$$

$$\text{여기서, } z = [x_1 \ y_1 \ x_2 \ y_2 \ \dots \ x_n \ y_n]^T$$

모든 점에서의 변위와 속도가 한 지점에서의 위치와 속도값과 함수적으로 연관될 수 있는 최소한의 한 운동이 존재한다고 가정하면, 우선 $x_1 = y$, $y_1 = v$ 라 놓고 다른 지점에서의 변위와 속도는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{cases} x_i = X_i(u, v) \\ y_i = Y_i(u, v) \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3)$$

특히 $i = 1$ 일때 $X_1 = u$, $Y_1 = v$ 를 말한다. 식(3)을 미분하면

$$\begin{cases} \dot{x}_i = \frac{\partial X_i}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial X_i}{\partial v} \dot{v} = \frac{\partial X_i}{\partial u} v + \frac{\partial X_i}{\partial v} f_1 = Y_i(u, v) \\ \dot{y}_i = \frac{\partial Y_i}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial Y_i}{\partial v} \dot{v} = \frac{\partial Y_i}{\partial u} v + \frac{\partial Y_i}{\partial v} f_1 = Y_i(u, v) \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4)$$

2.2 모우드

비선형 모우드를 시스템의 평형위치로 부터 Taylor 급수 전개 하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{cases} X_i(u, v) = a_{1i}u + a_{2i}v + a_{3i}u^2 + a_{4i}uv + a_{5i}v^2 \\ \quad + a_{6i}u^3 + a_{7i}u^2v + a_{8i}v^2 + a_{9i}v^3 + \dots \\ Y_i(u, v) = b_{1i}u + b_{2i}v + b_{3i}u^2 + b_{4i}uv + b_{5i}v^2 \\ \quad + b_{6i}u^3 + b_{7i}u^2v + b_{8i}v^2 + b_{9i}v^3 + \dots \end{cases} \quad (5)$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

식(5)를 식(4)에 대입하고, 정리하면

$$\begin{cases}
 Y_i(u, v) = b_{1i}u + b_{2i}v + b_{3i}u^2 + b_{4i}uv + b_{5i}v^2 \\
 \quad + b_{6i}u^3 + b_{7i}u^2v + b_{8i}uv^2 + b_{9i}v^3 + \dots \\
 \quad (a_{1i} + 2a_{3i}u + a_{4i}v + 3a_{6i}u^2 + 2a_{7i}uv + a_{8i}v^2)v \\
 \quad + (a_{2i} + a_{4i}u + 2a_{5i}v + a_{7i}u^2 + 2a_{8i}uv + 3a_{9i}v^2)f_1(u, v) \\
 f_i(u, v) = (b_{1i} + 2b_{3i}u + b_{4i}v + 3b_{6i}u^2 + 2b_{7i}uv + 6b_{8i}v^2)v \\
 \quad (b_{2i} + b_{4i}u + 2b_{5i}v + b_{7i}u^2 + 2b_{8i}uv + 3b_{9i}v^2)f_1(u, v)
 \end{cases}$$

, $i=1, 2, \dots, n$

(6)

식(6)으로부터 각각의 항들 ($u, v, u^2, uv, v^2, \dots$)을 비교함으로써 계수들을 구할 수 있다.

2.3 좌표계 변환

식 (3)과 (5)를 벡터형태로 나타내면

$$\begin{aligned}
 z &= [x_1 \ y_1 \ x_2 \ y_2 \ \dots \ x_n \ y_n]^T \\
 &= [m_0 + m_1(u, v) + m_2(u, v)] \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + \dots
 \end{aligned}$$

(7)

여기서, m_0 는 선형요소, m_1 과 m_2 는 각각 2차 및 3차항의 영향을 나타내는 행렬이다. 모달벡터 w 를 각각의 모우드를 사용하여 다음과 같이 정의하자.

$$w = [u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2 \ \dots \ u_n \ v_n]^T$$

그러면 비선형 모달행렬 M 은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}
 z &= M(w)w = [M_0 + M_1(w) + M_2(w)] w + \dots \\
 &\equiv \tilde{M}(w)
 \end{aligned}$$

(8)

여기서, M_0, M_1, M_2 는 각 모우드의 요소를 결합한 선형, 2차, 3차 모달행렬이다.

식(8)을 미분하면

$$\dot{z} = \frac{\partial \tilde{M}(w)}{\partial w} \dot{w} \quad (9)$$

그런데 식(2)에서

$$\dot{z} = A(z)z = A(\tilde{M}(w))\tilde{M}(w) \quad (10)$$

식(9)와 식(10)에서

$$\dot{w} = \left[\frac{\partial \tilde{M}(w)}{\partial w} \right]^{-1} A(\tilde{M}(w))\tilde{M}(w) \quad (11)$$

식(11)로부터 비선형 모달발정식을 구할 수 있다. 또한 모달좌표계로 부터 원래의 시스템 좌표계로 바꿀 수 있다.⁵⁾

2.4 다중 척도법

비선형 시스템의 정규모우드를 구하기 위하여 비선형항에 무차원 배개변수 ε 을 도입하면 운동방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\ddot{x}_i + w_i^2 x_i = \varepsilon N_i(\underline{x}, \dot{\underline{x}}, \ddot{\underline{x}}) = 0 \quad i=1, 2, \dots, n \quad (12)$$

여기서, \underline{x} 는 벡터이고 N_i 는 비선형 함수를 나타낸다. 해를 시간에 대한 다중척도를 사용하면 다음과 같이 가정할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 x_i(t; \varepsilon) &= x_{i0}(T_0, T_1) + \varepsilon x_{i1}(T_0, T_1) + \dots \\
 & \quad i=1, 2, \dots, n
 \end{aligned}$$

(13)

여기서, $T_0 = t$ 로서 빠른 시간척도를 나타내고, $T_1 = \varepsilon t$ 로 느린 척도를 나타낸다. 또한

$$\frac{d}{dt} = D_0 + \varepsilon D_1 + \dots \quad (14)$$

식(14)와 식(13)을 식(12)에 대입하여 ε 의 차수에 따라 정리하면

$$\varepsilon^0; D_0^2 x_{i0} + w_i^2 x_{i0} = 0 \quad (15)$$

$$\varepsilon^1; D_1^2 x_{i0} + w_i^2 x_{i1} = -2D_0 D_1 x_{i0} + N_i(\underline{x}, D_0 \underline{x}, D_0^2 \underline{x})$$

$$i=1, 2, \dots, n$$

(16)

우선 식(15)를 풀어서 1차해(선형 해)를 구한 후 이 식을 식(16)에 대입한 후 Solvability condition

을 적용함으로써 2차 근사해를 구할 수 있다. 이러한 방법은 실제로 시스템의 자유진동에 대한 해를 구하는 방법과 같으며, 구한 해로부터 어떤 시간에 모든 질점이 동시에 최대 변위에 도달 한다는 조건으로부터 시간의 함수를 소거함으로써 정규 모우드를 구할 수 있다. 이러한 방법은 내부공진이 있는 경우에도 사용할 수 있는 장점은 있으나, 자유진동 해 이외에 정규 모우드 및 변환된 비선형 모달방정식을 구하는데 있어서는 추가적인 계산이 요구되고 있다.

3. 비선형 회전체의 비선형 정규모우드

본 연구에서는 CMR방법을 사용하여 Fig. 1과 같은 회전체시스템의 비선형 정규모우드를 구하였다. 이 회전체 시스템은 베어링 시스템이 비선형 탄성지지되어 있는 경우이고, 비선형 탄성특성은

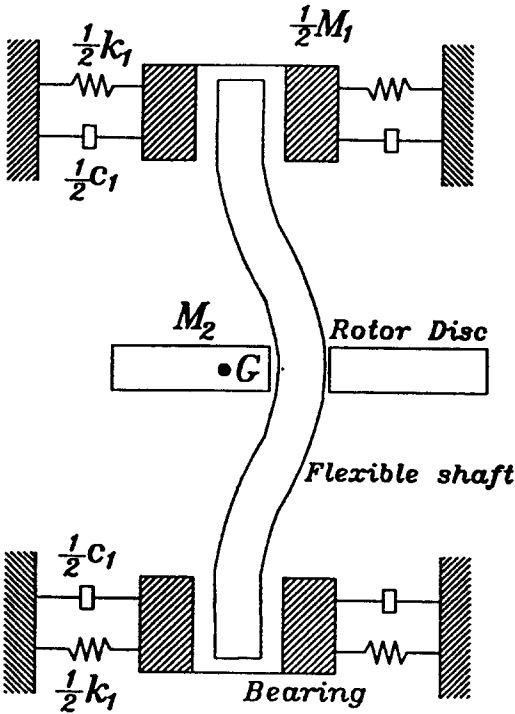


Fig. 1 Schematic Diagram of Single Mass Rotor on Nonlinear Elastic Supports

hardening 형태로 가정하였다. 이 시스템은 Fig. 2와 같이 2자유도계로 모델링 하였으며 운동방정식은 다음과 같은 형태이다. 비선형 정규모우드를 구하기 위하여 시스템에서 감쇠 및 외력을 영으로 놓고 $k_1 + k_2 = \beta_1 + \beta_2 x_1^2$ 라 가정하면, 운동방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

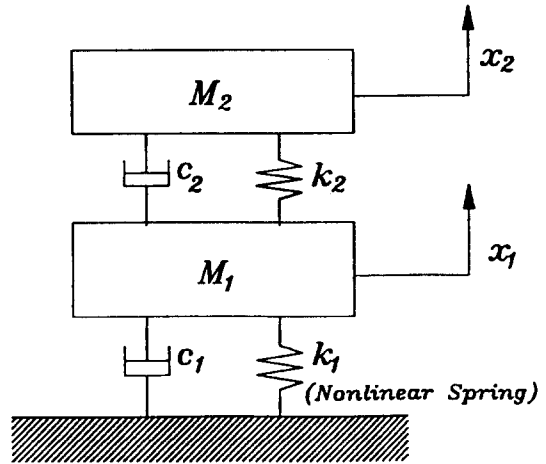


Fig. 2 Two Degree of Freedom Model For the Rotor on Nonlinear Elastic Supports

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = y_1 \\ \dot{y}_1 = f_1(x_1, x_2; y_1, y_2) = -\frac{(k_1 + k_2)}{M_1} x_1 + \frac{k_2 x_2}{M_1} \\ = -\alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_1^3 + \alpha_3 x_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = y_2 \\ \dot{y}_2 = f_2(x_1, x_2; y_1, y_2) = \frac{k_2}{M_2} x_1 - \frac{k_2}{M_2} x_2 \\ = \alpha_4 x_1 - \alpha_4 x_2 \end{cases}$$

여기서, $\alpha_1 = \frac{\beta_1}{M_1}$, $\alpha_2 = \frac{\beta_2}{M_1}$, $\alpha_3 = \frac{k_2}{M_1}$, $\alpha_4 = \frac{k_2}{M_2}$

행렬식으로 나타내면

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ y_1 \\ \dot{x}_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\alpha & 0 & \alpha_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \alpha_4 & 0 & -\alpha_4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a_2 x_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} \\ = [A_0 + A_2(z)] z \quad (18)$$

또한

$$\begin{cases} x_1 = u \\ y_1 = v \\ x_2 = X_2(u, v) \\ y_2 = Y_2(u, v) \end{cases} \quad (19)$$

식 (6), (17), (19)를 사용하여 다음과 같은 식을 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} Y_2(u, v) &= b_{12}u + b_{22}v + b_{32}u^2 + b_{42}uv + b_{52}v^2 + b_{62}u^3 \\ &\quad + b_{72}u^2v + b_{82}uv^2 + b_{92}v^3 + \dots \\ &= (a_{12} + 2a_{32}u + a_{42}v + 3a_{62}u^2 + 2a_{72}uv + a_{82}v^2)v \\ &\quad + (a_{22} + a_{42}u + 2a_{52}v + a_{72}u^2 + 2a_{82}uv + 3a_{92}v^2) \\ &\quad \left[-a_1u - a_2u^3 + a_3(a_{12}u + a_{22}v + a_{32}u^2 + a_{42}uv \right. \\ &\quad \left. + a_{52}v^2 + a_{62}u^3 + a_{72}u^2v + a_{82}uv^2 + a_{92}v^3) + \dots \right] \end{aligned} \quad (20)$$

또한

$$\begin{aligned} f_2(u, v) &= \alpha_4u - \alpha_4(a_{12}u + a_{22}v + a_{32}u^2 + a_{42}uv + a_{52}v^2 \\ &\quad + a_{62}u^3 + a_{72}u^2v + a_{82}uv^2 + a_{92}v^3) \\ &= (b_{12} + 2b_{32}u + b_{42}v + 3b_{62}u^2 + 2b_{72}uv + b_{82}v^2)v \\ &\quad + (b_{22} + b_{42}u + 2b_{52}v + b_{72}u^2 + 2b_{82}uv + 3b_{92}v^2) \\ &\quad \left[-a_1u - a_2u^3 + a_3(a_{12}u + a_{22}v + a_{32}u^2 + a_{42}uv \right. \\ &\quad \left. + a_{52}v^2 + a_{62}u^3 + a_{72}u^2v + a_{82}uv^2 + a_{92}v^3) + \dots \right] \end{aligned} \quad (21)$$

식 (20)과 (21)로부터 각 항을 서로 비교함으로써 계수들을 구할 수 있다.

 u 항 :

$$\begin{cases} b_{12} = -a_{22}\alpha_1 + a_{22}a_{12}\alpha_3 \\ \alpha_4 - a_{12}\alpha_4 = -b_{22}\alpha_1 + b_{22}a_{12}\alpha_3 \end{cases}$$

 v 항 :

$$\begin{cases} b_{22} = a_{12} + a_{22}^2\alpha_3 \\ -a_{22}\alpha_4 = b_{12} + a_{22}b_{22}\alpha_3 \end{cases}$$

 u^2 항 :

$$\begin{cases} b_{32} = -a_{42}\alpha_1 + a_{42}a_{12}\alpha_3 + a_{22}a_{32}\alpha_3 \\ -a_{32}\alpha_4 = -b_{42}\alpha_1 + b_{42}a_{12}\alpha_3 + b_{22}a_{32}\alpha_3 \end{cases}$$

 uv 항 :

$$\begin{cases} b_{42} = 2a_{32} - 2a_{52}\alpha_1 + 2a_{52}a_{12}\alpha_3 + 2a_{42}a_{22}\alpha_3 \\ -\alpha_4a_{42} = 2b_{32}\alpha_1 - 2b_{52}\alpha_1 + 2b_{52}a_{12}\alpha_3 \\ \quad + b_{42}a_{22}\alpha_3 + b_{22}a_{42}\alpha_3 \end{cases}$$

 v^2 항 :

$$\begin{cases} b_{52} = a_{42} + 3a_{52}a_{22}\alpha_3 \\ -\alpha_4a_{42} = b_{42} + 2b_{52}a_{22}\alpha_3 + b_{22}a_{52}\alpha_3 \end{cases}$$

 u^2 항 :

$$\begin{cases} b_{62} = -a_{72}\alpha_1 - a_{22}\alpha_2 + a_{42}a_{32}\alpha_3 + a_{72}a_{12}\alpha_3 \\ \quad + a_{22}a_{62}\alpha_3 \\ -\alpha_4a_{62} = -b_{72}\alpha_1 - b_{22}\alpha_2 + b_{42}a_{32}\alpha_3 + b_{72}a_{12}\alpha_3 \\ \quad + b_{22}a_{62}\alpha_3 \end{cases}$$

 u^2v 항 :

$$\begin{cases} b_{72} = 3a_{62} - 2a_{82}\alpha_1 + a_{72}a_{22}\alpha_3 + 2a_{52}a_{32}\alpha_3 \\ \quad + a_{42}^2\alpha_3 + a_{22}a_{72}\alpha_3 \\ -\alpha_4a_{72} = 3b_{62} - 2a_{82}\alpha_1 + 2b_{52}a_{32}\alpha_3 + b_{42}a_{42}\alpha_3 \\ \quad + 2b_{82}a_{12}\alpha_3 + b_{22}a_{72}\alpha_3 + b_{72}a_{22}\alpha_3 \end{cases}$$

uv^2 항 :

$$\begin{cases} b_{82} = 2a_{72} - 3a_{92}a_1 + 3a_{92}a_{12}a_3 + 2a_{82}a_{22}a_3 \\ \quad + 2a_{52}a_{42}a_3 + a_{42}a_{52}a_3 + a_{22}a_{82}a_3 \\ -a_4a_{82} = 2b_{72} - 3b_{92}a_1 + 3b_{92}a_{12}a_3 + 2b_{82}a_{22}a_3 \\ \quad + 2b_{52}a_{42}a_3 + b_{42}a_{52}a_3 + b_{22}a_{82}a_3 \end{cases}$$

v^3 항 :

$$\begin{cases} b_{92} = a_{82} + 3a_{22}a_{92}a_3 + 2a_{52}^2a_3 + a_{22}a_{92}a_3 \\ -a_4a_{92} = b_{82} + 3b_{92}a_{22}a_3 + 2b_{52}a_{52}a_3 + b_{22}a_{92}a_3 \end{cases} \quad (22)$$

3차항까지만 택한 근사해를 구해보면, 우선 첫 번째 4식으로부터 비선형 연립방정식을 풀어서 계수 a_{12} , a_{22} , b_{12} , b_{22} 를 구함으로써 선형 모우드를 구할 수 있다. 수치계산을 통해서 그 해를 구해보면 6개의 해군(solution set)이 나오는데 그 중 2개는 실수해이고 나머지 4개는 허수를 포함하는 해이다. 여기서 구하는 모우드는 실수해 2개에 해당한다. 그 다음 6개식은 선형 연립방정식이며 또한 제차(homogeneous)방정식이므로 a_{32} , a_{42} , a_{52} , b_{32} , b_{42} , b_{52} 의 값은 영이다. 마지막 8개식은 선형 연립방정식이며 비제차형 방정식이므로 수치계산을 통하여 나머지 계수 값을 쉽게 구할 수 있다. 계산을 위하여 본 연구에서 사용된 회전체의 제원은 다음과 같다.

Table 1 Detail of Rotor-Bearing System

Shaft	
Young's modulus(E)	$2 \times 10^{11} \text{N/m}^2$
Shear modulus(G)	$7 \times 10^{10} \text{N/m}^2$
Density(ρ)	7750kg/mg^3
Length(l)	0.3m
Diameter(d)	0.01m
Area(A)	$7.9 \times 10^{-4} \text{mm}^2$
Mass	
Mass(M1)	0.1kg
Mass2(M2)	0.1827kg

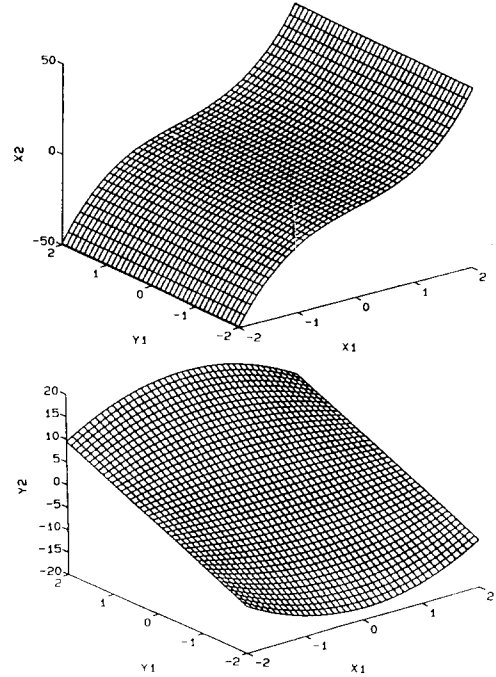


Fig. 3 First Nonlinear Normal Mode as a function of X1 and Y1

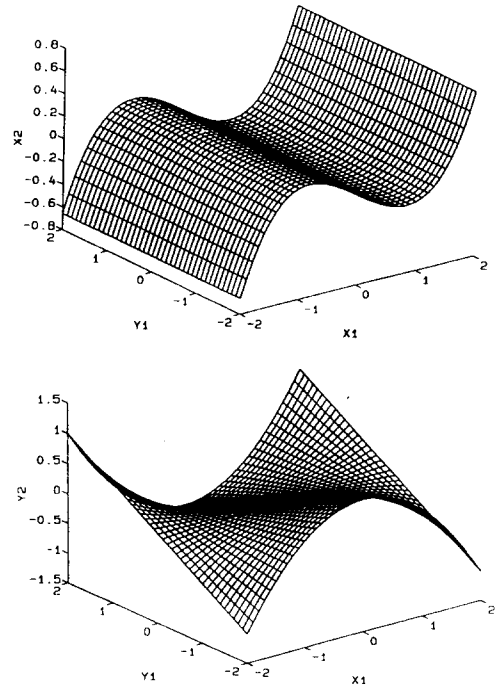


Fig. 4 Second Nonlinear Normal Mode as a function of X1 and Y1

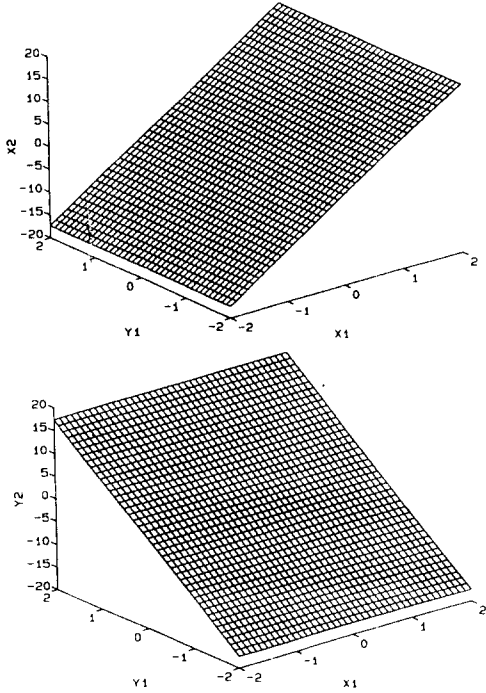


Fig. 5 First Linear Normal Mode

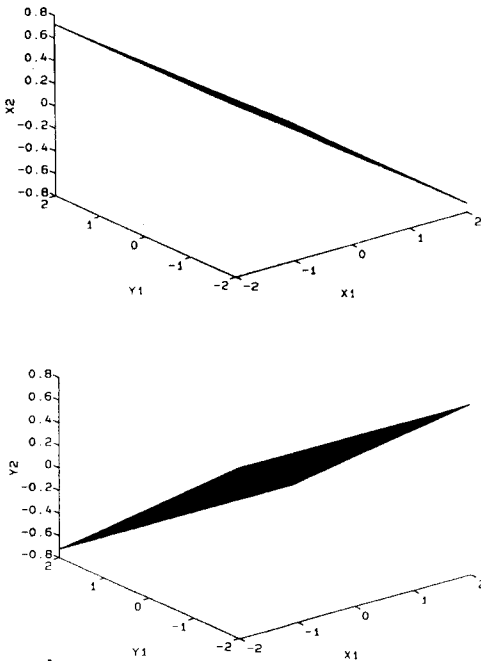


Fig. 6 Second Linear Normal Mode

Fig. 3은 회전체의 첫번째 비선형 모드를 나타내고 있고, Fig. 4는 두번째 비선형 모드를 나타내고 있다. 여기서 X_2, Y_2 는 X_1, Y_1 의 함수로 나타내고 있으며 X_1, Y_1 의 값에 따라 X_2, Y_2 의 값이 달라지며 그 비율도 선형이 아니다. Fig. 5는 비교의 목적으로 근사해인 선형모드를 그렸다. 예상한 대로 X_2, Y_2 의 값이 X_1, Y_1 의 값에 따라 선형적으로 변하며, 선형모드를 나타내는 평면은 원점에서 비선형 모드를 나타내는 곡면에 서로 접하고 있다. 한편 비선형 모달 방정식은 식(17)로부터 다음과 같이 쉽게 구할 수 있다.

$$\ddot{u} + a_1 u + a_2 u^3 - a_3(a_{12} u + a_{62} u^3 + a_{82} u \dot{u}^2) = 0 \quad (23)$$

$$\ddot{u} + (a_1 - a_3 a_{12}) u + (a_2 - a_3 a_{62}) u^3 - a_3 a_{82} u \dot{u}^2 = 0 \quad (24)$$

따라서 첫번째 모달 방정식은

$$\dot{u}_1 + 4.882 \cdot 10^6 u_1 - 5.925 \cdot 10^6 u_1^3 + 5.623 \cdot 10^{-1} u_1 \dot{u}_1^2 = 0 \quad (25)$$

두 번째 모달 방정식은 다음과 같다.

$$\dot{u}_2 + 2.063 \cdot 10^7 u_2 + 0.699 \cdot 10^6 u_2^3 - 1.319 \cdot 10^{-2} u_2 \dot{u}_2^2 = 0 \quad (26)$$

또한 식(25)과 (26)에서 섭동법을 이용하면 각 모드에 있어서 주파수와 운동진폭에 관한 비선형관계식을 구할 수 있다. 본 연구에서는 회전체 시스템을 편의상 2자유도계로 모델링 하였으나, 다자유도계로 모델링 하여도 이 방법을 똑같이 사용할 수 있다.

4. 결론

본 연구에서는 CMR방법을 사용하여 회전체의 비선형 정규 모드를 구하였다. 다중척도법은 시스템의 내부공진이 있는 경우에도 사용할 수 있는 장점이 있으나 자유진동해가 아닌 정규 모드 및 변환된 모달방정식을 구하는데 있어서 추가적인 계산이 요구되는 단점이 있다. 따라서 내부공진이

없는 경우에는 CMR방법을 사용하여 효과적으로 비선형 정규 모우드 및 모달방정식을 구할 수 있다. 이러한 방법은 원래 물리적 좌표계와 모달 좌표계간의 비선형 좌표변환을 가능하게 하여 줄 뿐만 아니라 각각의 모달 좌표계에서의 비선형 모우드 특성을 파악하는데 도움을 주며, 더우기 구한 정규 모우드는 비선형 시스템의 진동제어시 비선형 정규 모우드를 이용한 제어 방법개발에 직접 이용될 수 있다. 또한 회전체 시스템에 적용함으로써 이러한 방법이 회전체의 비선형 운동특성 파악및 제어에 사용될 수 있음을 보였다. 한편 회전체의 비선형 특성은 주로 베어링의 특성 및 베어링 지지부의 비선형성으로 인하여 유발된다. 따라서 정확한 모우드를 구하기 위해서는 베어링의 강성계수를 좀 더 정확히 추정할 수 있는 체계적 연구가 필요하다.

후 기

본 연구는 한국 학술진흥재단 지원 '94 교수 국비해외파견 연구과제 "회전체의 비선형 운동 특성에 관한 연구" 중 일부임을 밝혀둔다.

참 고 문 헌

- 1) Rosenberg, R.M., "On Non-linear Vibrations of Systems with Many Degrees of Freedom", *Advances in Applied Mechanics*, Vol. 9, pp. 155- 242, 1966
- 2) Rand, R.H., "A Direct Method for nonlinear Normal Modes", *International Journal of Nonlinear Mechanics*, Vol. 9, pp. 363-368, 1974
- 3) Vakakis, A., "Analysis and Identification of Linear and Nonlinear Normal Modes in Vibrating Systems", Ph.D. Thesis, California Institute of Technology, Pasadena, CA, 1990
- 4) enamar, R., Bennouna, M.M.K., and White, R.G., "The Effects of Large Vibration Amplitudes on the Mode Shapes and Natural Frequencies of Thin Elastic Structure, Part I : Simply Supported and Clamped-Clamped Beams", *Journal of sound and Vibration*, Vol. 149, pp. 179-195, 1991
- 5) Shaw, S.W. and Pierre, C., "Normal Modes for Nonlinear Vibrating Systems", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 164(1) pp. 85-124, 1993
- 6) Shaw, S.W. and Pierre, C., "Normal modes of Vibration for Nonlinear Continuous Systems", *Journal of Sound and Vibrations*, Vol. 169, pp. 319-347, 1994
- 7) Nayfeh, A.H. and Nayfeh, S.A., "On nonlinear Modes of Continous Systems", *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 116, pp. 129-136, 1994
- 8) Nayfeh, A.h., "Applied Nonlinear Dynamics", Wiley, New York, 1994
- 9) King, M.E. and Vakakis, A., "An Energy Based Formulation for Computing Nonlinear Normal Modes in undamped Continuous Systems", *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 116, pp. 332-340, 1993