

최소자승법을 이용한 타원의 검출

이 주 용*, 서 요 한**, 이 용 기***

Detection of Ellipses using Least Square Method

Joo Yong Lee*, Yo Han Seo**, Woong Gi Lee***

요 약

하프변환은 영상에서 직선을 검출하는데 유용하고 강력한 기법이다. 그러나, 전통적인 하프변환의 확장은 원과 타원을 복구하는데 낮은 속도와 과도한 메모리로 인해 제한되어 왔다.

본 논문은 최소자승법을 이용하여 영상에서 타원을 검출하는 방법을 제안한다. 이 방법은 계산 비용과 메모리 요구를 감소시킨다. 타원을 검출할 때, 타원의 매개변수를 결정하기 위해서 하프변환의 누적을 이용하지 않고 타원의 기하학적 특징을 포함하는 특별한 점을 선택했다. 타원의 매개변수는 그 특별한 점을 사용한 최소자승법으로 계산된다.

ABSTRACT

The Hough transform is a robust technique which is useful in detecting straight lines in an picture. However, the extension of the conventional Hough transform to recover circles and ellipses has been limited by slow speed and excessive memory.

This paper presents a method of detecting ellipses from the image by using Least Square Method. This method is reduced calculation cost and memory requirement.

When detecting ellipse, instead of obtaining accumulation of Hough transform for determination of ellipse parameters, particular points containing geometric properties of ellipse are selected. Parameters of the ellipse are calculated by Least Square Method using those particular points.

I. 서 론

영상으로부터 물체의 위치나 동작을 계산하고 물체의 형상을 찾는 것은 컴퓨터 그래픽스,

로봇, 방위 산업체, 공장 제어, 의학 분야 등의 산업에 널리 적용되고 있다.

물체의 위치 측정과 형상 결정 등은 패턴 인식에도 해결해야 할 중요한 문제이기 때문

* 서강전문대학 전자계산과
*** 조선대학교 자연과학대학 전산통계학과

** 서강전문대학 사무자동화과

에 수많은 접근법이 제시되었으나, 하프 공간에서 누적되는 피크 수가 매개변수 수에 따라서 거의 지수 함수적으로 증가하여 기억 용량과 계산 시간을 대단히 많이 요구하게 된다. 또한, 매개변수 수를 줄이기 위한 노력도 계속되어 왔지만 영상이 복잡하고 겹쳐져 있는 경우 등은 특징을 검출하기 어렵다^[1]. 하프변환은 디지털 영상에서 직선 검출에 강력하여 동일선 상의 점이나 복잡한 영상에서 거의 동일선 상에 가까운 직선성분을 잘 검출해 낸다. 잡음이나 각종 곡선이 섞여 있는 경우에도 쉽게 직선을 검출하고 이 직선을 제거함으로써 다른 곡선을 검출해 낸다. 또한, 모서리 강조 그림에서 직선을 검출하는데 유용하고 강력한 기법이다. 그렇지만 원과 타원을 복원하기 위한 전통적인 하프변환의 확장은 과도한 메모리와 늦은 속도에 의해 제한되어 있다^[2].

본 논문은 타원의 특징을 결정하는 ρ 와 θ 를 이용하여 타원을 검출했으며, 타원 내부의 잡음에 영향을 받지 않도록 하기 위해 타원에 대한 접선의 접점을 택하였다. 오차를 줄이기 위해 누적값을 이용하지 않고 최소자승법으로 타원을 결정하여 연산 횟수를 크게 감소시켰다.

II. 하프변환

디지털 영상으로부터의 원과 타원의 경계선 검출은 산업 응용면에서 중요하다. 이러한 문제를 해결하기 위한 중요한 기법이 하프변환이다. 하프변환은 영상에 있어서 정의된 형상을 부분적으로 검출하는데 있어서 강력한 기법으로 오랫동안 인정되어져 왔다. 하프변환은 부분적으로 폐쇄된(흐릿한) 상과 잡음이 있는 상을 처리하는데 사용할 수 있다.

2.1 하프변환 방법

최초의 하프변환은 1962년에 Paul Hough가 소개하였으며 영상에서의 직선 에지점들은 $x - y$ 평면 y 에서 기울기(a)와 y 축과의 절편(b)의 두 가지 정보로 표현할 수 있다는 것이다. 그러나, 수직선이거나 수직선에 가까운 경우 기울기와 절편이 무한대가 되어 표현하기가 곤란하였다. 1972년에 Duda와 Hart는 직선의 식 $y = ax + b$ 를 수정하여 $\rho = x \cos \theta$ 로 표현함으로써 매개변수 공간을 일정한 값 이내의 수로 영상내의 모든 직선을 표현할 수 있게 하였다.

직선과 원, 타원을 검출하기 위한 전통적인 하프변환은 3차원 배열(X_0, Y_0, r)과 5차원 배열(X_0, Y_0, a, b, θ)을 필요로 한다. 그러나, 단지 2차원 배열만이 필요한 직선 검출과는 달리 전통적인 하프변환의 직접적인 응용은 매개변수의 수와 함께 지수적으로 증가하는 계산 메모리 공간 때문에 제한되었다.

전통적인 하프변환과 일반화된 하프변환을 사용하여 직선과 타원을 검출하는데 있어서 이들 문제들을 해결하기 위해 많은 알고리즘과 수정된 방법이 제안되어 왔다.

Tsuji와 Mastsumoto^[3]의 초기 논문은 중심 좌표(X_0, Y_0)를 옮겨서 반대쪽 병렬 모서리 점의 쌍을 사용함으로써 하나의 타원을 검출하는 방법을 제안했으며, 그 후 영상에서 반복적으로 탐색하기 위해 타원의 기하학적 성질을 이용하고, 남아 있는 매개변수수를 계산하는데 최소자승법을 사용했다. Davies에 의해 제안되었던 수정된 GHT 타원을 검출하기 위해 매개변수의 여러 개 공간에서 단지 하나의 공간만을 사용하려고 시도했다.

Muammar와 Nixon^[4]은 원과 타원의 검출을 위해 배열을 감소시키는데 중점을 둔 두가지 접근 방법을 제안했다.

Leavers^[5]는 원 검출을 위한 동적 조합 하프변환(DCHT)를 제안했는데 원의 반경 r 과

중심점 (X_0, Y_0) 을 찾기 위해 현의 수직 이등분선을 이용했다. 대부분의 방법은 5차원 배열을 더 낮은 배열로 낮춤으로써 타원 검출의 배열 계산을 감소시켰다.

Ⅲ. 직선 검출

영상에서 형상은 다양한 형태지만 보통 직선과 곡선으로 표현할 수 있다. 이러한 직선과 곡선은 형상의 특징값이며 형상의 질을 좌우한다. 영상공간에서 모든 직선의 집합은 2개의 매개변수군으로 대체된다. 그 군에 매개변수군을 고정한다면 그때 임의의 직선은 매개변수 공간에서 한 점으로 표현된다. 이를 정규 매개변수라 한다. 그림 1에서 이 매개변수는 원점으로부터 거리가 ρ 이고 그 직선과 법선을 이루는 각도 θ 에 의해 직선을 표현할 수 있다.

기울기-절편을 이용한 매개변수 변환에서는 영상공간의 직선이 거의 수직 위치에 있으면 기울기가 무한대이기 때문에 직선을 표현하기 어렵다. 수직 위치에 있는 직선을 표현하기 위해서 Duda와 Hart는 매개변수 공간을 제한하는 정규 매개변수 공간을 도입하였는데 기하학적으로 다음과 같이 표현된다.

$$p = x \cos \theta + y \sin \theta \quad (3.1)$$

여기서 ρ 는 원점에서 직선까지 수직으로 만나는 수선의 길이이며 θ 는 ρ 와 x 축과 이루는 각이다. 구간은 $(0 < \theta < \rho)$ 이고 그때 한 선의 정규 매개변수는 유일하다. 이런 제약으로 인해 x - y 공간에서 모든 선은 θ - ρ 공간에서 유일점과 일치된다. n 개의 영상점 집합 $\{(X_1, Y_1) \dots (X_n, Y_n)\}$ 이 있고, 그 고정된 집합 중에서 직선의 집합을 찾는다고 가정하면, 점 (x_i, y_i) 는 아래의 (3.2)식으로 정의되는 θ - ρ 공간에서 사인 곡선으로 변환된다.

$$p = x_i \cos \theta + y_i \sin \theta \quad (3.2)$$

그 곡선은 공통의 교점을 갖는 같은 선상의 영상점과 일치한다는 것을 알 수 있다. θ - ρ 공간에서 이점 (θ_i, ρ_i) 은 같은 선상의 점을 지나는 선으로 정의된다. 그러므로 같은 선의 점을 찾는 문제는 한 점에 모이는 곡선을 찾는 문제로 바뀌어진다. θ - ρ 공간에서 점의 집합이 $\{(\theta_1, \rho_1) \dots (\theta_n, \rho_n)\}$ 일 때 모든 곡선이 식(3.2) 위에 있다고 가정해 보자.

$$p = x_i \cos \theta + y_i \sin \theta \quad (3.3)$$

그것은 모든 점이 점 (X_0, Y_0) 를 통과하는 x - y 공간의 선과 일치한다는 것을 알 수 있다. 일반적으로 $n(n-1)/2$ 점과 교차하는 n 곡선은 영상점들의 모든 쌍 사이의 선과 선과 일치한다. 하프의 기본 제안에 따라 θ 와 ρ 의 에러를 명시하고 θ - ρ 공간을 쌍격자로 양자화해야 하는데 양자화는 $0 < \theta < \pi$, $-R < \rho < R$ 이다. 여기서 R 는 망막의 크기이며, 이 사각형 밖에 있는 점들은 망막을 교차하지 않는 영상 공간의 선과 일치하며 양자화 영역 누산기의 2차원 배열이다.

식(3.1)에 주어진 곡선과 일치하는 영상 공간의 각 점 (x_i, y_i) 은 곡선을 따라 각 셀에 있는 카운터를 증가함으로써 배열로 축적된다. 그리하여 2차원 누산기에 주어진 셀은 배열을 통과하는 곡선의 총수가 기록된다. 결국 배열은 영상점을 통하여 높은 카운터를 갖는 셀을 찾기 위해 검사를 한다.

만약 주어진 셀 (θ_i, ρ_i) 의 카운터가 k 이면 그때 k 영상점은 정규 매개변수가 (θ_i, ρ_i) 인 선에 위치한다. 점-곡선 변환으로 해석하면 점 (x_i, y_i) 의 투영은 기울기 각을 갖고 원점을 지나는 한 선에 고정되어 식(3.1)로부터 ρ 를 계산함으로써 얻을 수 있다.

θ - ρ 와 누산기에서 주어진 열은 이들 투영을 위한 히스토그램(histogram)이고 주어진 셀

의 높은 카운터는 영상점에서 거의 같은 선의 부분 집합이다. 이 방법의 변환은 Griffith가 사용했다.^[6]

양자화 과정에서 θ 가 일정하게 구간 $(0 < \theta < \pi)$ 에서 d 값을 갖는다고 하고, 구간 $(n-R, R)$ 에서 ρ 축이 d_2 와 cell로 양자화된다고 하자. n 개 영상점이 있을 때 계산은 nd_1 번 실행해야 한다. 이들 계산이 완료될 때 2차원 누산기의 d_1d_2 셀은 높은 count를 찾음으로서 계산된다.

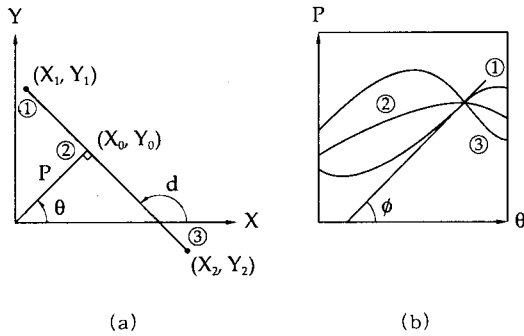


그림1. 정규 매개변수 공간

Fig.1. The normal parameter space

영상공간에서 3점을 지나는 직선을 매개변수 공간에 대응시키면 그림1 (b)와 과 같은 점으로 표현된다. 즉 3점인 ①, ②, ③을 각각 통과하는 모든 방향의 직선은 매개변수 공간에서 3개의 곡선 궤적을 나타내며 ①, ②, ③을 잇는 선분이 매개변수 공간에서 곡선 궤적의 교점이다. 직선의 길이를 분할하여 L 로 하고 끝점을 (X_1, Y_1) 과 (X_2, Y_2) 로 하면 (X, Y) 값은 식(3.4)에서 구한다.

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \rho \cos \alpha \\ x &= y_0 + \rho \sin \alpha \end{aligned} \quad (3.4)$$

여기서 $\tan \alpha$ 와 ρ 는 식(3.5)와 같고 $\tan \phi = \rho$ 이다.

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= (y_1 - y_0) / (x_2 - x_1) \\ \rho &= \pm \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \end{aligned} \quad (3.5)$$

IV. 타원의 검출

원은 3개의 매개변수인 중심좌표 (x_0, y_0) 와 반경 r 이 결정되어야 하며, 타원은 5개의 매개변수인 장축과 단축, 그리고 중심좌표 (x_0, y_0) 와 회전각 ϕ 가 필요하다. 그러나 매개변수 수에 따라서 기억 용량의 요구와 계산 시간이 거의 지수함수적으로 증가한다.

따라서 기억 용량과 계산 시간의 요구를 감소시키기 위한 방법들이 연구되고 있다.^[7]

4.1 곡선 검출

하프변환을 확장하여 곡선 형상을 검출하는 식은 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} H(p, \xi) &= \iint_D (A(x, y) \delta(r - C(x, y, \psi)) \delta(p - (x, y, \xi)) dx dy \end{aligned} \quad (4.1)$$

여기서 델타 함수항은 p 와 벡터 $\xi = (\cos \theta, \sin \theta)$ 이며 새로운 델타 함수는 영상 공간에 곡선 형상이 존재할 때만 r 과 ψ 로 표현한다. $A(x, y)$ 는 단위밀도를 갖는 델타함수항의 밀도 함수이다. 식(4.1)에서 곡선 형상은 다음 식으로 나타낸다.

$$r = C(x, y, \psi) \quad (4.2)$$

하프변환은 2차원 함수이기 때문에 곡선의 접선에 따른 밀도함수가 형성된다. 따라서 곡선 형상에 따른 최대 피크 값은 검출되지 않는다. 만약 곡선 형상이 원이라면 탐사선과 원을 이루는 에지점들이 교차되는 부분만을 하프평면에 누적하게 되지만 최대 피크 값은 형

성되지 않는다. 그러므로 하프평면에 직선을 이루고 있는 부분을 검출하여 다시 한 번 하프변환을 하면 θ 축에 대칭인 2개의 최대 피크 값이 검출된다. 이 값은 원의 기하학적 성질을 이용하면 원이라는 것을 알 수 있다. 원의 기하학적 성질은 3차원 매개변수를 갖고 있으며 원을 표현하는 식은 다음과 같다.

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \quad (4.3)$$

여기서 (x_0, y_0) 는 원의 중심이고, r 은 반경이다.

4.2 타원의 기하학적 성질

하나의 원은 중심점과 반경에 의해 표현되고 타원은 중심점과 장반경, 단반경, 기울기에 의해 표현된다. 일반적으로 원은 타원의 특별한 경우로서 기울기가 없는 경우이다. 그러므로 원의 속성과 검출 알고리즘은 타원의 특별한 경우이다. 일반적인 타원의 극 좌표 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{r^2 \cos^2(\psi - \theta)}{a^2} + \frac{r^2 \sin^2(\psi - \theta)}{b^2} = 1 \quad (4.4)$$

여기서 $r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$, $\psi = \tan^{-1}((y - y_0)/(x - x_0))$, θ 는 타원의 기울기, (x_0, y_0) 는 타원의 중심 좌표이다. 그림2(b)는 타원에서 네 점 P, Q, R, S를 고려할 때 이들 네 점은 다음과 같은 기하학적 성질을 갖는다.^[8]

- (1) Q에서의 접선과 S에서의 접선은 평행이고, P에서의 접선은 R에서의 접선과 평행이다.
- (2) PC, QC, RC, SC = r (4.5)
- (3) C(x_0, y_0)에서 좌표는 다음과 같은 관계를 가진다.

$\{P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2), R(x_3, y_3), S(x_4, y_4)\}$:

$$x_0 = \frac{(x_1 + x_3)}{2} = \frac{(x_2 + x_4)}{2} \quad (4.6)$$

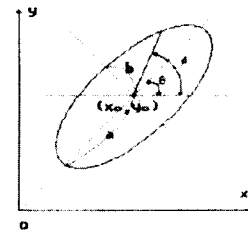
$$y_0 = \frac{(y_1 + y_3)}{2} = \frac{(y_2 + y_4)}{2} \quad (4.7)$$

- (4) 선분 CP와 P에서 접선에 의해 형성된 각을 ϕ_p 라 하고, 같은 방법으로 ϕ_q, ϕ_r, ϕ_s 는 점 Q, R, S에 의해서 형성된 각이며, 이들 각들은 다음과 같은 관계를 가진다.

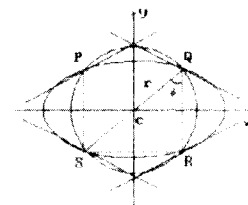
$$\phi_p = \phi_q = \phi_r = \phi_s \quad (4.8)$$

- (5) P, Q, R, S는 타원에 있어서 같은 기울기를 가진 직사각형으로 형성된다.

$$\begin{aligned} \theta &= \tan^{-1} \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right) \\ &= \tan^{-1} \left(\frac{y_3 - y_4}{x_3 - x_4} \right) \end{aligned} \quad (4.9)$$



(a) 일반적인 타원에서 위치와 방향
(a) Position and orientation in a general ellipse.



(b) 타원의 기하학적 성질
(b) Geometric properties of an ellipse.

그림2
Fig.2

4.3 타원 검출

타원의 일반식은 아래와 같이 직각 좌표와 극 좌표 식으로 표현된다.

$$A_x^2 + B_{xy} + C_y^2 + D_x + E_y = 1 \quad (4.10)$$

$$\frac{r^2 \cos^2(\phi - \theta)}{a^2} + \frac{r^2 \sin^2(\phi - \theta)}{b^2} = 1 \quad (4.11)$$

여기서, $r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$, $\phi = \tan^{-1} \{(y - y_0)/(x - x_0)\}$ 이므로 타원이 결정되기 위해서는 식(4.10)에서 A, B, C, D, E나 식(4.11)에서 x_0, y_0, a, b, θ 의 5개 매개 변수를 알아야 한다. 매개변수를 구하기 위해서는 최소한 5개 이상의 식이 필요하므로 5개 이상의 정보가 필요하다. 이러한 정보는 보통 타원을 이루고 있는 에지 접선들의 접점에서 구한다. 그러나 모든 접점에서 구하려면 계산 시간이 많이 소요되며, 하프변환한 매개변수 공간에서 타원의 확실한 정보를 제공해 주는 점은 그림 3(a), (b)에서 ① ~ ⑧까지의 8개 점이다. 따라서 타원상의 점을 거의 균등한 간격으로 8개의 점을 선택하고 최소자승법을 이용하여 타원을 검출하는 방법을 제안한다. 다음은 중심, 타원의 장축, 단축과 방향각을 결정하는 알고리즘이다.

$$A = B = C = D = E = 0$$

for k = 0 to k - 1

$$p_{max} = \text{초기값 (충분히 작은값)}$$

$$p_{min} = \text{초기값 (충분히 큰값)}$$

for l = 0 to N - 1

$$p = x_l \cos \theta_k + y_l \sin \theta_k \text{을 계산}$$

$$p > p_{max} \text{ 이면 } p_{max} = p$$

$$p > p_{min} \text{ 이면 } p_{min} = p$$

next i

$$p_{mid} = (p_{max} + p_{min})/2$$

$$d_k = p_{max} - p_{min}$$

$$A = A + \cos^2 \theta_k$$

$$B = B + \cos^2 \theta_k \cdot \sin \theta_k$$

$$C = C + p_{min} \cdot \cos \theta_k$$

$$D = D + \sin^2 \theta_k$$

$$E = E + p_{min} \cdot \sin \theta_k$$

next k

$$x_0 = (BE - CD)/(B^2 - AD)$$

$$y_0 = (BC - AE)/(B^2 - AD)$$

$$p = \text{초기값 (충분히 큰값)}$$

for m = 0 to M - 1

$$F = G = H = I = J = 0$$

for k = 0 to k - 1

$$F = F + \cos^4(\theta_k - \phi_m)$$

$$G = G + \cos^2(\theta_k - \phi_m) \sin^2(\theta_k - \phi_m)$$

$$H = H + d_k \cos^4(\theta_k - \phi_m)$$

$$I = I + \sin^4(\theta_k - \phi_m)$$

$$J = J + d_k \sin^2(\theta_k - \phi_m)$$

next k

$$am = (GJ - HI)/(G^2 - FI)$$

$$bm = (GH - FJ)/(G^2 - FI)$$

$$pm = 0$$

$$k = 0$$

while($p_m < p$ and $k < K$)

$$pm = pm + [dk_1 - (a_m \cdot \cos^2(\theta_k - \phi_m) + b_m \cdot \sin^2(\theta_k - \phi_m))]^2$$

$$k = k + 1$$

end while

$$p_m < p \text{이면}$$

$$p = p_m : a = a_m : b = b_m : \phi = \phi_m$$

next m

output x_0, y_0, a, b, ϕ

타원의 접선간 거리는 하프평면에서 검색하여 매개변수를 결정할 수 있으나 실제로는 최대와 최소치가 정확하지 않으므로 장축과 단축의 거리 오차를 최소로 하는 최소자승법을

이용하여 정확한 ϕ 를 구하기 위해 타원의 모든 에지점을 사용한다. 만약 장축이나 단축 방향으로 형상 부분이 없어졌다면 검출하기 어려워진다.

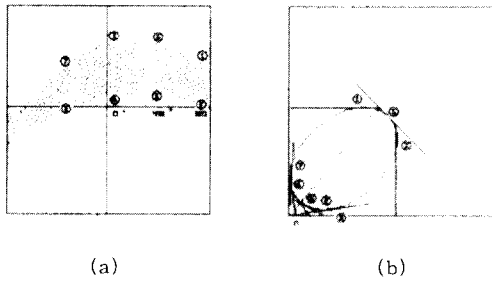


그림3. 타원을 검출하기 위한 특징점들

Fig.3. Feature points for ellipse detection.

①, ②는 $\theta = 90^\circ$ 에서 P_{MAX} , P_{MAX} 이 되는 $x_1, y_1)(x_2, y_2)$ ③, ④는 $\theta = 0^\circ$ 에서 P_{MAX} , P_{MAX} 이 되는 $(x_3, y_3)(x_4, y_4)$ ⑤, ⑥은 $\theta = 45^\circ$ 에서 P_{MAX} , P_{MAX} 이 되는 $(x_5, y_5)(x_6, y_6)$ ⑦, ⑧은 $\theta = -45^\circ$ 에서 P_{MAX} , P_{MAX} 이 되는 $(x_7, y_7)(x_8, y_8)$ 이다.

타원의 중심 좌표는 ①, ②로부터

$$y_0 = (y_1 + y_2)/2 \quad (4.12)$$

을 구하고, ③, ④로부터

$$x_0 = (x_3 + x_4)/2 \quad (4.13)$$

을 구한다.

중심 x_0, y_0 의 두 매개변수가 결정되면 식(4.11)에서 a, b, θ 를 식(4.10)에서는 A, B, C 를 결정하면 되므로 3개의 정보가 필요하다. 그러나 ①, ②, ③, ④는 중심을 구하는데 사용하였고 중심점에 대하여 점대칭 관계에 있으므로 나머지 매개변수를 구하는데 적합하지 않다. 따라서 적어도 ①, ②, ③, ④ 이외의 한 정보를 사용해야 한다. 타원 외부의 잡음이 적을 때나 타원이 심하게 손상되지 않을 때는 3개

의 점으로 필요한 3개의 매개변수 값을 결정할 수 있지만 잡음이 있거나 정확한 타원이 아니면 오차가 큰 타원이 얻어지므로 가능한 오차를 줄이기 위해 ① ~ ⑧전부를 이용한 최소자승법을 사용한다. 이때 계산을 간단히 하기 위하여 중심 (x_0, y_0) 을 원점으로 이동시킨다. 모든 좌표 값을 $(-x_0, -y_0)$ 만큼 이동시키면, 타원의 식은

$$A_x^2 + B_{xy} + C_y^2 = 1 \quad (4.14)$$

이 되고 A, B, C 를 구하기 위한 정규방정식은 식(4.17)인데 식(4.14)를 식(4.15)로 변형하고

$$xy = 1/B - (A/B)^2 - (C/B)y^2 \quad (4.15)$$

여기서, $C_1 = 1/B, C_2 = -A/B, C_3 = -C/B, g_1 = xy, g_2 = x^2, g_3 = y^2$ 로 놓으면 식(4.16)을 식(4.17)의 형태로 쓸 수 있다.

$$g_1 = C_1 g_1 + C_2 g_2 + C_3 g_3 \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} \sum g_1 g_1 &= C_1 \sum g_1^2 + C_2 \sum g_2 g_2 + C_3 \sum g_3 g_3 \\ \sum g_1 g_2 &= C_1 \sum g_1 g_2 + C_2 \sum g_2^2 + C_3 \sum g_2 g_3 \\ \sum g_1 g_3 &= C_1 \sum g_1 g_3 + C_2 \sum g_2 g_3 + C_3 \sum g_3^2 \end{aligned} \quad (4.17)$$

C_1, C_2, C_3 를 구하면 식(4.18)로부터 A, B, C 를 구할 수 있다.

$$B = 1/C_1, A = -BC_2, C = -BC_3 \quad (4.18)$$

타원의 매개변수 회전각 θ , 장축 a , 단축 b 는

$$\theta = (1/2)\tan^{-1} (B/A - C) \quad (4.19)$$

$$a = \left(\frac{(\tan^2 \theta - 1)}{(C \tan^2 \theta - A)} \right)^{1/2} \quad (4.20)$$

$$b = \left(\frac{\sin \theta}{(A - \cos^2 \theta)/a^2} \right)^{1/2} \quad (4.21)$$

이다. 이 때 $A < C$ 이면 반지름이 식(4.22)인 원이 된다.

$$r = 1 \sqrt{A} \quad (4.22)$$

A, B, C를 구하기 위한 정규 방정식은 식 (4.14)를 식(4.23), 식(4.24) 등의 형태로부터 얻을 수 있으나 변수가 분모에 포함될 때는 분모가 0이 되는 경우를 주의해야 한다.

$$x^2 = 1/A - (B/A)_{xy} - (C/A)y^2 \quad (4.23)$$

$$y^2 = 1/(B/x) - (A/B)_x - Cy^2/Bx \quad (4.24)$$

V. 실험 및 고찰

완전한 타원의 검출은 어느 방법을 사용하든지 정확히 검출된다. 따라서 결손이 있는 타원을 택하여 실험을 하였다. 이 검출 실험은 8점법으로 하였고 계산시간과 메모리를 고려하여 공간 영역과 매개변수 영역의 크기를 96x96으로 하였다.

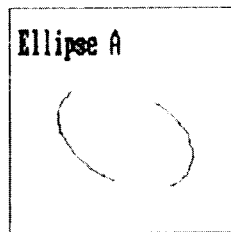
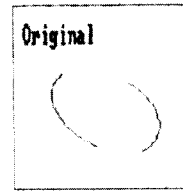
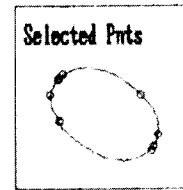


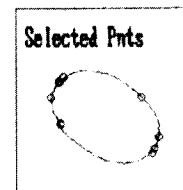
그림4. 검출 실험을 위한 타원의 형태
Fig.4. Type of ellipse for detection test



(a) 타원 영상
(a) Ellipse image



(b) 선택된 8점
(b) 8 selected points



(c) (a)에서 검출된 타원
(c) The ellipse detected from (a)

그림5. 8점법으로 검출된 타원
Fig.5. The ellipse detected by 8 points method.

그림5(a)의 에지 점을 계수하고 2차원 배열로 만들어 하프변환을 한다. 이때는 누적값을 구하지 않고 타원의 결정에 필요한 특징점을

표1. 8점법으로 검출된 타원의 매개변수

Table1. Parameters of ellipse detected by 8 points method.

	a	b	x ⁰	y ⁰	rot
Exact value	40,0	20,0	9,5	- 4,5	- 30,0
Determined	40,6	20,2	9,5	- 4,5	- 29,9
Error(%)	1,4	0,9	0,0	0,0	0,1

찾아야 하는데, 이 점들은 그림 2(b)에서 조그만 원으로 표시된 8개의 점이다. 그림5(a)의 경우 에지점의 수는 93개이고, 직선 검출 하프변환에 의해 구한 특징점의 좌표는 표1과 같다.

실험에서는 4개의 특정 각도에서만 하프변환을 하므로 연산 횟수를 많이 줄일 수 있다. 양자화 크기를 96으로 했기 때문에 모든 각에서 하프변환을 해야 할 것을 4개의 각에서만 수행하므로 92회의 변환을 생략할 수 있고, 하프변환에서만 $92/4 = 23$ 배의 시간 단축을 한 것이다. 또한 중심은 최소자승법을 사용하지 않고 선택된 점에서 바로 얻을 수 있으므로 연산 횟수를 줄일 수 있다. 이 방법의 가장 큰 장점은 타원을 이루고 있는 에지의 점을 직접 최소자승법에 적용할 수 있는 것이며, 최소자승법은 장축, 단축의 길이와 회전각 3개만을 구하는데 적용되므로 연산 횟수를 줄이게 된다.

VI. 결 론

하프변환은 직선 검출에 강하여 잡음이나 각종 곡선이 섞여 있는 경우에도 직선을 잘 검출해 낸다. 하프변환은 직선뿐만 아니라 타원, 원 등을 검출하는데도 이용할 수 있으나 구해야 할 매개변수 수에 따라 계산 횟수와 기억 공간이 지수함수적으로 증가하여 많은 제한을 받고 있다.

본 논문에서는 하프변환시 누적값을 이용하지 않고 특징점으로서 타원의 점점을 택하였기 때문에 타원 내부의 잡음에는 영향을 받지 않았다. 또한 타원을 검출하는데 타원의 기하학적 성질을 이용하므로 연산 횟수를 크게 감소시켰고, 누산을 구하지 않기 때문에 기억용량이 요구되지 않는다.

최소자승법은 타원의 외부 잡음이 없고 단독으로 있을 때 유용하며, 타원이나 원에 결손이 있을 때도 잘 검출되었다. 8점법은 4방향에

서만 하프변환하므로 각 방향의 양자화 크기 N보다 N-4회 즉, $4/(N-1)$ 배의 하프변환 계산을 생략할 수 있으며, $N = 96$ 을 취하였으므로 23배의 하프변환 속도를 상승시킬 수 있다.

앞으로 외부잡음이 심할 때나 교차하는 타원의 효과적인 검출법의 연구가 기대된다.

참 고 문 헌

- [1] E.R.Davies, "A High Speed Algorithm for Circular Object Location", *Pattern Recognition Lett.* 6, pp.323-333, 1987
- [2] H.MAITER, "Contribution to the Prediction of performance of the Hough Transform", *IEEE Trans. on Pattern Anal and Machine Intell.*, Vol. PAME-8, NO. 5, Sept., 1986.
- [3] S.Tsuji and F.Matsumoto, "Direction of ellipses by a modified Hough Transform", *IEEE Trans. Computer*, C-27(8), pp.777-787, 1978.
- [4] H.Muammar and M.Nixon, "Approaches to Extending The Hough Transform", *Proc. ICASSP 89*, pp.1556-1559, 1989.
- [5] V.F.Leavers and M.B.Sandler, "A dynamic combinatorial Hough Transform for Straight Lines and Circles", *Proc. 5th Alvey Vision Conf.*, 1989.
- [6] J.Illingworth and J.Kittler, "A Survey of The Hough Transforms", *Comput. Vision Graphics Image Process.* 44, pp.87-166, 1988.
- [7] K.R.Sloan, "Dynamically quantized pyramid", *Proc. 7th Int. Joint conf.*, pp734-746, 1980.

- [8] S.D.Shapiro, "Transform for the computer detection of curves in noisy pictures", *Compt.Graphics Image process.*, 4, pp.328-338, 1975
- [9] D.H.Ballard, and C.M.Brown, *Computer Vision*, Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice-Hall, 1982.
- [10] M.G.Albanesi and M.Ferretti, Shape detection with limited memory, *Pattern Recognition 24*, pp.1153-1166, 1991.
- [11] C.Rafael and E.Richard, *Digital Image Processing*, Wesley, pp.27-29, 1992.
- [12] K.K.Raymond, K.S.Peter, "Modification of Hough Transform for Circles and Ellipses Detection Using a 2-Dimensional Array", *Pattern Recognition*, 25, 9, pp.1007-1022, 1992.

□ 著者紹介



이 주 용

1984년 조선대학교 컴퓨터공학과 졸업
1986년 조선대학교 대학원 전자공학과 졸업
1993년 - 현재 조선대학교 대학원 전산통계학과 박사과정
1986년 - 현재 서강전문대학 전자계산과 조교수

※ 관심분야 : 컴퓨터 그래픽스, 패턴 인식, Neural Network



서 요 한

1984년 조선대학교 컴퓨터공학과 졸업
1986년 조선대학교 대학원 전자공학과 졸업
1990년 - 현재 서강전문대학 사무자동화과 조교수

※ 관심분야 : 컴퓨터그래픽스, 소프트웨어공학, 병렬처리

이 용 기

1975년 조선대학교 전자공학과 졸업
1981년 명지대학교 대학원 전자공학과 졸업
1980년 - 1988년 조선대학교 컴퓨터공학과 조교수
1985년 - 1986년 미국 Oregon Graduate Center 객원교수
1988년 - 현재 조선대학교 전산통계학과 부교수

※ 관심분야 : 소프트웨어공학, 병렬처리, 컴퓨터구조