

최적 관측중단시간을 고려한 가속수명시험 설계 -Accelerated life test plans with optimum censoring time-

강 창 원*

Kang, Chang-Won

강 창 욱**

Kang, Chang-Wook

Abstract

Previous researches on optimum ALT plans have shown how to find optimum allocation, lowest stress and sample size subject to minimizing the variance of mean life estimate. Those researches have assumed the censoring time constant. But under certain circumstances such assumptions may not be reasonable.

In this paper the constraint on constant censoring time is relaxed, and censoring time is considered variable. If all other test parameters remain unvaried, the variance of the mean life estimate reciprocally increases of the censoring time. This idea in this paper extends to the optimum censoring time.

Thus, this paper presents the optimal censoring time in such situations, and finds the optimal lowest stress and allocation based on that optimal censoring time.

1. 서론

가속수명시험을 하는 목적은 제품의 신뢰도에 대한 정확한 정보를 얻기 위한 것이다. 하지만 또 다른 상황에서는 테스트의 목적이 다른 것일 수도 있다. 즉 테스트의 대상이 되는 제품의 수명이 시험자가 원하는 일정한 수명(required life)을 만족하는지의 여부를 판단하는 것이다. 예를 들면 어떤 제품에 대해서 정부나 소비자단체가 정한 규격에 도달하는지를 생산자의 입장에서 입증하기 위해서는 가속수명시험이 필요한 경우가 있다.

일반적으로 기존의 가속수명시험에 대한 연구들은 대부분 관측중단시간 τ 를 이미 주어진 고정된 값으로 가정하고 최적 계획, 질충 계획 등을 구했다.

예를 들어 다음과 같은 상황을 가정해 볼 수 있다. 어떤 제품을 설계하여 제품을 양산하려고 한다. 설계자는 이 제품의 관심의 대상이 되는 특성치가 제품의 규격에 명시된 어느 일정한 수준을 넘는지를 테스트하고 싶어한다. 이 제품에 대해서 가속수명시험을 하려고 한다. 그러나 기존의 정보가 별로 없어서 어느 정도 시간동안 가속수명시험을 수행해야 할 지 모르기 때문에 충분한 시간 t 동안 수행을 했다.

* 한양대학교 대학원 산업공학과

**한양대학교 산업공학과 교수

위와 같은 상황에서 그렇게 충분한 시간의 ALT를 시행하면 불필요하게 긴 시간동안 테스트를 할 경우가 생기게 된다. 그러나 실제 소요된 시간보다 더 짧은 시간 t^* 동안 일정한 신뢰수준으로 시험자가 원하는 정보를 얻을 수 있는 상황에서 이것은 식 (1.1) 에 나타난 것처럼 비용의 손실을 발생시키는 것이다.

$$Loss = c(t - t^*), \quad c \text{ 는 단위시간 동안의 시험비용} \quad (1.1)$$

따라서 어떤 제품의 수명이 미리 정한 값을 넘는지 일정한 신뢰수준으로 테스트하는 상황에서 최적의 관측중단시간을 구하는 것이 가능하다.

2. 최적의 관측중단시간

2.1 모델 및 기본가정

본 논문에서 사용되는 기호들을 다음과 같이 정의하기로 한다.

- a : 관측중단시간의 표준화된 값
- a^* : a 의 최적값
- b : 표준(standardized) slope
- x_H : (변환을 거친) 최고(highest) 테스트 스트레스
- x_L : (변환을 거친) 최소(lowest) 테스트 스트레스
- T_L^* : 최적 최소 테스트 스트레스
- x_L^* : (변환을 거친) 최적 최소 테스트 스트레스
- x_0 : 사용(design) 스트레스
- τ : 관측중단시간
- τ^* : 최적 관측중단시간
- η : $\log(\tau)$
- η^* : $\log(\tau^*)$
- μ : μ 의 assumed value
- σ : σ 의 assumed value
- μ_{req} : 평균 요구수명(required mean life)
- μ_0 : x_0 에서의 평균수명
- μ : 수명분포의 위치 파라미터(location parameter)
- σ : 수명분포의 스케일 파라미터(scale parameter)
- V^* : 기존 최적 계획의 variance factor
- $V_{\eta^*}^*$: 최적 관측중단시간 η^* 에서의 variance factor
- d^* : x_L^* 수준에서의 최적 할당비율

최적의 관측중단시간을 구하기 위해 사용되는 모델은 다음과 같다.

- 1) 스트레스 x 와 수명분포의 위치 파라미터 μ 간에는 선형의 관계가 존재한다.
즉, $\mu(x) = \gamma_0 + \gamma_1 x$ 과 같은 모델을 설정한다.
- 2) 시험에는 두개의 스트레스 수준, 즉 x_L, x_H 만이 사용된다.
평균수명 추정치의 오차를 최소화 시키는 것을 최적화 척도(criterion)로 하는 최적 설계와 일관성을 유지하기 위해 두 개의 스트레스 수준을 사용하기로 한다.
- 3) 모든 스트레스 수준에서 수명분포의 스케일 파라미터 σ 는 일정하다.

2.2 최적 관측중단시간의 이론

다른 조건들이 일정할 때 관측중단시간 η 가 감소하면 위치 파라미터 μ 의 추정치는 부정확하게 된다. 즉, $x = x_0$ 에서의 추정치 $\hat{\mu}_0$ 의 분산 $\sigma^2(\hat{\mu}_0)$, 또는 표준편차 $\sigma(\hat{\mu}_0)$ 는 증가하게 된다. 한편 μ 의 일반적인 신뢰구간(confidence interval)은 $\hat{\mu} \pm z_{\alpha/2} \cdot \sigma(\hat{\mu})$ 이므로 η 가 감소할 수록 $\hat{\mu}_0$ 에 대한 신뢰구간은 커지게 된다. 이러한 개념을 바탕으로 $\sigma(\hat{\mu}_0)$ 의 일정한 수준을 넘지 않는 범위 내에서 최소의 η 를 구한다. 여기서 일정한 수준이란 $\hat{\mu}_0$ 의 신뢰구간이 required life μ_{req} 을 넘지 않는다는 제약을 말한다.

앞서 밝혔듯이 수명분포의 μ (일반적으로 평균수명) 가 μ_{req} 를 넘는다는 것을 보이기 위한 상황에서 이를 만족하는 최소의 관측중단시간 η 를 구하기 위해 다음과 같이 수식화를 한다. 따라서 분포의 위치 파라미터 μ 가 required life μ_{req} 보다 크다는 것을 수식화 하면 다음과 같다.

$$LCL(\hat{\mu}_0) = \hat{\mu}_0 - c_1 \sigma(\hat{\mu}_0) > \mu_{req} \tag{2.1a}$$

식 (2.1a) 의 의미는 다음과 같다. x_0 에서의 평균수명 μ_0 가 μ_{req} 보다 크기 위해서는 μ_0 의 LCL(lower confidence limit) 이 시험자가 원하는 일정한 신뢰수준 $(1-m)$, 예를 들어 95%, 으로 μ_{req} 보다 커야한다. 이렇게 식을 세움으로써 $\sigma(\hat{\mu}_0)$ 와 평균수명과의 관계식을 얻을 수 있다.

최우추정량의 Asymtotic property 란 간단히 설명하면 특정한 조건 하에서 ML 추정량의 샘플링 분포(sampling distribution) 의 누적확률분포가 근사적으로 정규분포의 누적확률분포를 따른다는 것이다. 여기서 특정한 조건이란 일반적으로 실제 상황에서 만족이 되므로 설명은 생략하기로 한다. 따라서 asymtotic property 에 의하여 $\hat{\mu}_0$ 는 근사적으로 정규분포를 따르게 된다. 따라서 $\hat{\mu}_0$ 가 근사적으로 정규분포를 따르므로 식 (2.1a) 에서 c_1 은 z_m 와 같게 된다. 따라서 식 (2.1b) 와 같이 고쳐 쓸 수 있다.

$$LCL(\hat{\mu}_0) = \hat{\mu}_0 - z_m \sigma(\hat{\mu}_0) > \mu_{req} \tag{2.1b}$$

한편 위의 식 (2.1b) 는 다음과 같은 가설검정으로 바꾸어 생각할 수 있다.

$$H_0: \mu_0 < \mu_{req}$$

$$H_1: \mu_0 \geq \mu_{req}$$

제품의 수명이 required life 보다 크다는 것을 만족하려면 위의 귀무가설을 기각해야 한다. 따라서 이 귀무가설이 $(1-k)$ 확률로 기각되면 $\hat{\mu}_0$ 는 다음과 같은 신뢰구간을 가지게 된다.

$$\hat{\mu}_0 > \mu_0 - c_2 \sigma(\hat{\mu}_0) \tag{2.2}$$

또한 $\hat{\mu}_0$ 가 정규분포를 따르므로 c_2 는 z_k 와 같다.

이상을 정리해서 수식을 정리하면 다음과 같이 된다.

$$\mu_0 - (z_m + z_k) \sigma(\hat{\mu}_0) > \mu_{req} \tag{2.3}$$

$$\sigma(\hat{\mu}_0) < (\mu_0 - \mu_{req}) / (z_m + z_k) \tag{2.4a}$$

$$\sigma(\hat{\mu}_0)_{max} = (\mu_0 - \mu_{req}) / (z_m + z_k) \tag{2.4b}$$

따라서 식 (2.4a) 에서 평균수명이 required life μ_{req} 이상이라는 조건을 만족하는 범위 내에서 $\sigma(\hat{\mu}_0)$ 의 최대값은 식 (2.4b) 에서 처럼 $(\mu_0 - \mu_{req}) / (z_m + z_k)$ 가 된다. 즉, $\eta \propto \frac{1}{\sigma(\hat{\mu}_0)}$ 의 관계가 성립하므로 식 (2.4a)을 만족시키는 최소의 η 를 찾을 수 있다.

2.3 최적의 η 찾기

관측중단시간의 표준화된 값 a 와 표준 slope b 는 식 (2.5) 와 (2.6) 과 같이 정의된다. 그리고 $\hat{\mu}_0$ 의 표준편차는 식 (2.7) 과 같다.

$$a = (\eta - \mu_H) / \sigma' \tag{2.5}$$

$$b = (\mu_0 - \mu_H) / \sigma' \tag{2.6}$$

$$\sigma(\hat{\mu}_0) = \sigma' \cdot (V^* / n)^{1/2} \tag{2.7}$$

먼저 $\eta \propto \frac{1}{\sigma(\hat{\mu}_0)}$ 관계에 대한 증명을 하면 아래와 같다.

variance factor V^* 는 a 에 대한 감소함수이다. 즉 $V^* \propto \frac{1}{a}$

또한 식 (2.7) 에서 $\sigma(\hat{\mu}_0) = \sigma' \cdot (V^* / n)^{1/2}$ 관계가 성립하므로 $\sigma(\hat{\mu}_0) \propto V^*$ 이다. 따라서 $\sigma(\hat{\mu}_0) \propto \frac{1}{a}$ 관계가 성립한다.

한편 식 (2.5) 에서 $a = (\eta - \mu_H) / \sigma'$ 이므로 $a \propto \eta$ 관계가 성립한다.

따라서 $\eta \propto \frac{1}{\sigma(\hat{\mu}_0)}$ 이다.

식 (2.4b) 와 식 (2.7) 로 부터 다음과 같은 최적의 관측중단시간에 대한 variance factor V_{η}^* 가 얻어진다.

$$V_{\eta}^* = \frac{n \cdot \sigma(\hat{\mu}_0)_{\max}^2}{\sigma'^2}$$

식 (2.4b) 의 $\sigma(\)_{\max}$ 를 대입하면 다음과 같다.

$$V_{\eta}^* = \frac{n \cdot (\mu_0 - \mu_{req})^2}{\sigma'^2 \cdot (z_m + z_k)^2}$$

이를 다시 쓰면 식 (2.8) 과 같다.

$$V_{\eta}^* = \frac{n \cdot (\mu_0 - \mu_{req})^2}{\sigma'^2 \cdot (z_m + z_k)^2} \tag{2.8}$$

variance chart에 식 (2.8) 에서 구한 V_{η}^* 을 지나는 가로축과 평행한 직선을 그린다. 또한 b 를 지나는 세로축과 평행한 직선을 그린다. 두 직선이 교차하는 점이 V_{η}^* 와 b 값과의 교점이다. 그리고 이 점을 지나는 a 의 값을 구한다. 이 값을 a^* 라고 하면 결론적으로 식 (2.5) 의 관계에서 식 (2.9) 과 같이 최적의 η 를 구할 수 있다.

$$a^* \sigma' = \eta - \mu_H$$

$$\eta^* = a^* \sigma' + \mu_H \tag{2.9}$$

2.4 최적의 x_L^* , p^* 찾기

앞에서 구한 최적의 관측중단시간을 바탕으로 최적의 최소 스트레스와 최적할당비율을 찾는다. x_L^* 와 x_H 는 (2.10) 의 관계가 성립한다.

$$x_L^* = x_H + \xi^* (x_0 - x_H) \tag{2.10}$$

위에서 구한 a^* 와 b 의 값이 교차하는 점을 stress factor chart에서 찾는다. 그 점에 대응하는 ξ^* 의 값을 찾는다. 또한 최적 할당비율 p^* 은 다음과 같이 구한다. a^* 와 b 의 값이 교차하는 점을 optimum proportion chart에서 찾는다. 그 점에 대응하는 p^* 의 값을 찾는다.

3. 수치예제

어느 전기모터에 들어가는 Class-B 절연체를 가속수명시험을 한다. 스트레스로는 온도가 사용되었고 150℃, 170℃, 190℃, 220℃ 네 개의 수준이 있다. 샘플의 수는 40개이다. 또한 8064 시간에서 관측중단이 이루어졌다. 테스트의 목적은 사용(design) 스트레스인 130℃ 에서 제품의 수명이 20,000 시간 이상인지 여부를 판단하는 것이다. 신뢰수준은 모두 95% 로 가정한다. 이 문제에 대한 데이터는 <Table 1> 과 같다.

< Table 1 > Class-B Insulation Life Data [15]

150℃	170℃	190℃	220℃
Hours	Hours	Hours	Hours
8064+	1764	408	408
8064+	2772	408	408
8064+	3444	1344	504
8064+	3542	1344	504
8064+	3780	1440	504
8064+	4860	1680+	528+
8064+	5196	1680+	528+
8064+	5448+	1680+	528+
8064+	5448+	1680+	528+
8064+	5448+	1680+	528+

본 예제에서는 온도를 스트레스로 사용했기 때문에 Arrhenius-lognormal 모델을 가정하고 모델식은 식 (3.1) 과 같다.

$$\mu(x) = \gamma_0 + \gamma_1 x \tag{3.1}$$

식 (3.1) 에서 $x = \frac{1000}{T}$ 이다. (T 는 절대온도)

모델 파라미터에 대한 추정치들을 구하기 위해 데이터를 SAS 프로그램의 LIFEREG procedure 를 이용하여 최우추정을 한 결과치가 <Table 2> 에 있다.

< Table 2 > Summary of estimates and variables

variable/estimate	value	variable/estimate	value
x_0	2.48	$\hat{\gamma}_0$	-6.064
x_L	2.363	$\hat{\gamma}_1$	4.308
x_H	2.028	$\hat{\sigma}$	0.259
\bar{x}	2.202	$\hat{\sigma}^2$	0.067

3.1 최적 관측중단시간

위와 같은 문제에서 최적의 관측중단시간을 구하는 과정을 3장에서 유도한 결과들을 이용하여 살펴보기로 한다. 먼저 최적 관측중단시간을 구하기 위해 필요한 파라미터들이 <Table 3> 에 정리되어 있다.

< Table 3 > Summary of parameters

test parameter	value	parameter/estimate	value
n	40	μ_0	4.619
τ	8064	μ_H	2.673
η	3.907	z_m	1.65
μ_{req}	4.301	z_k	1.65

$$V_{\eta}^* = \frac{n \cdot (\mu_0 - \mu_{req})^2}{\sigma^2 \cdot (z_m + z_k)^2} \quad (3.2)$$

식 (3.2)에 필요한 값들을 대입하면 $V_{\eta}^* = \frac{40 \times (4.619 - 4.301)^2}{0.259^2 \times 3.3^2} = 5.54$

또한 $b = \frac{\mu_0 - \mu_H}{\sigma} = \frac{4.619 - 2.673}{0.259} \approx 7.5$ 이다.

variance chart에서 V_{η}^* 와 b 가 교차하는 점을 찾아 a 의 값을 구하면 $a^* = 4.5$ 이다.

$$\begin{aligned} \eta^* &= a\sigma + \mu_H = 4.5 \times 0.259 + 2.673 \\ &= 3.838 \end{aligned}$$

$\log(\text{censoring time}) = \eta$ 이므로 최적의 censoring time τ^* 는 다음과 같다.

$$\tau^* = 10^{3.838} = 6886 \text{ (Hours)}$$

3.2 최적의 x_L^* 와 p^*

최적 최소수준 스트레스 x_L^* 는 다음의 식으로 구할 수 있다.

$$x_L^* = x_H + \xi^*(x_0 - x_H) \quad (3.3)$$

앞서 구한 $a^* = 4.5$, $b = 7.5$ 를 이용하여 stress factor chart에서 대응되는 ξ^* 를 구하면 $\xi^* = 0.7$ 이다. 따라서 $x_L^* = 2.344$ 이다.

또한 본 예제의 가정에서 밝혔듯이 $x = \frac{1000}{T}$ (T 는 절대온도) 이므로 다음의 관계식에서 최적의 최소온도를 구한다.

$$T_L^* = \frac{1000}{x_L^*} - 273 \approx 153 \text{ (}^\circ\text{C)}$$

최적 할당비율 p^* 은 위에서 구한 $a^* = 4.5$ 와 $b = 7.5$ 를 이용하여 optimal proportion chart에서 구하면 $p^* = 0.75$ 이다. 따라서 x_L^* 에서 $0.75 \times 40 \approx 30$ 개의 샘플을 테스트 한다.

3.3 결과 분석

이번 장에서는 어떤 제품의 수명이 일정한 수준 이상이라는 것을 시험하는 상황에서 최적의 관측중단시간을 구할 수 있음을 수치예제를 들어보였다.

먼저 주어진 데이터를 바탕으로 본 예제에서 가정한 모델(Arrhenius-lognormal) 의 파라미터에 대한 추정을 했다. 그리고 관측중단시간을 변수로 가정했을 때 최적의 설계를 하기 위한 테스트 파라미터와 추정치들을 구하였다.

다음으로 본 논문에서 유도한 이론에 의해 최적의 관측중단시간을 구하고 최적 최소수준 테스트 스트레스를 구하였다. 최적 관측중단시간의 결과치가 상수의 관측중단시간과 <Table 4>에 비교되어있다.

< Table 4 > Results of optimum censoring time

censoring time	value	optimum censoring time	value
τ	8064	τ^*	6886
η	3.907	η^*	3.838
$(\tau - \tau^*)$	1178	τ^* / τ	0.85

결과를 정리한 위의 표에서 관측중단시간이 8064(Hrs)에서 6886(Hrs)로 1178(Hrs)가 단축되었음을 알 수 있다. 즉 시험자는 6886 시간을 테스트 한 뒤 제품의 수명이 20,000 시간 이상이라는 것을 95%의 신뢰도로 확신할 수 있게 된다.

4. 결론

본 논문에서는 가속수명시험(ALT)을 할 때 최적의 관측중단시간(censoring time)을 구하는 이론을 보였다.

기존의 논문에서는 관측중단시간을 고정된 값으로 가정하였다. 하지만 이것은 앞서 설명한 불필요하게 긴 시간동안 시험을 하게 될 가능성이 있는 경우 비용의 낭비가 된다. 본 논문에서는 고정된 값으로 가정한 관측중단시간에 대한 제약을 없애고 관측중단시간과 시험자가 관심을 가지는 파라미터 μ 에 대한 추정량의 표준편차 $\sigma(\hat{\mu})$ 사이에 역의 상관관계가 가진다는 개념에 근거를 두고 최적의 관측중단시간 η 를 구하였다. 그리고 이를 바탕으로 최적의 최소수준 테스트 스트레스와 최적 샘플 할당비율을 구하였다.

또한 수치예제를 들어 상수로 가정한 관측중단시간보다 더 작은 최적의 관측중단시간을 구할 수 있음을 보였다. 이렇게 함으로써 더 짧은 시간내에 일정한 신뢰수준으로 시험자가 원하는 정보를 얻을 수 있다. 또한 비용의 감소도 기대할 수 있을 것이다.

본 논문에서 제시한 최적 관측중단시간에 대한 이론은 기존의 최적 시험설계들에 대한 연구들에서 사용한 variance chart와 stress factor chart들을 똑같은 방법으로 이용할 수 있으므로 최적의 관측중단시간을 구할 때 계산의 편의성이 있다.

참 고 문 헌

- [1] Bessler, S., Chernoff, H., and Marshall, A. W., "An Optimal Sequential Accelerated life Test," *Technometrics* 4, 367-379, 1962.
- [2] Escobar, L. A., and Meeker, W. Q., "Planning Accelerated Life Tests With Two or More Experimental Factors," *Technometrics*, 37, 411-427, 1995.
- [3] Hahn, G. J. and Meeker, Jr. W. Q., "Pitfalls and Practical Considerations in Product Life Analysis-Part I : Basic Concepts and Dangers of Extrapolation," *J. of Quality Technology*, 14, 144-152, 1982.
- [4] Hahn, G. J. and Nelson, W., "A Comparison of Methods for Analyzing Censored Life Data to Estimate Relationships Between Stress and Product Life," *IEEE Trans.*

- Reliability*, 23, 2-10, 1974.
- [5] Hartler, G., "Parameter Estimation for the Arrhenius Model," *IEEE Trans. Reliability*, 35, 414-418, 1986.
 - [6] Kielpinski, T. J. and Nelson, W., "Optimum Censored Accelerated Life Tests for Normal and Lognormal Life Distributions," *IEEE Trans. Reliability*, 24, 310-332, 1975.
 - [7] Lawless, J. F., *Statistical Models and Methods for Lifetime Data*, Wiley, New York, 1981.
 - [8] Meeker, Jr. W. Q., "A Comparison of Accelerated Life Test Plans for Weibull and Lognormal Distributions and Type I Censoring," *Technometrics*, 26, 157-171, 1984.
 - [9] Meeker, W. Q. and Hahn, G. J., "How to Plan an Accelerated Life Test—Some Practical Guidelines," *ASQC Basic Reference in Quality Control: Statistical Techniques*, 10, 1986.
 - [10] Meeker, Jr., W. Q., and Nelson, W., "Optimum Accelerated Life Tests for Weibull and Extreme Value Distributions and Censored Data," *IEEE Trans. on Reliability*, 24, 321-332, 1975.
 - [11] Meeter, C.A. and Meeker, Jr. W. Q., "Optimum Accelerated Life Tests With a Nonconstant Scale Parameter," *Technometrics*, 36, 71-83, 1994.
 - [12] Nelson, W. and Kielpinski, T. J., "Theory for Optimum Censored Accelerated Life Tests for Normal and Lognormal Life Distributions," *Technometrics*, 18, 105-114, 1976
 - [13] Nelson, W., *Accelerated Testing—Statistical Models, Test Plans, and Data Analyses*, Wiley, New York, 1990.