최대유통문제에서 MVA를 결정하는 방법에 관한 연구
- A Study on a Method of Determining the Most Vital Arc in the Maximum Flow Problem -

정 호 연*
Chung, Ho Yeon

Abstract

The most vital arc in the maximum flow problem is that arc whose removal results in the greatest reduction in the value of the maximal flow between a source node and a sink node. This paper develops an algorithm to determine such a most vital arc(MVA) in the maximum flow problem.

We first define the transformed network corresponding to a given network in order to compute the minimal capacity for each candidate arc. The set of candidate arcs for a MVA consists of the arcs whose flow is at least as greate as the flow over every arc in a minimal cut. As a result, we present a method in which the MVA is determined more easily by computing the minimal capacity in the transformed network. The proposed method is demonstrated by numerical example.

1. 서 론

최대유통문제는 대표적인 네트워크문제 중의 하나로써 시점에서 종점까지 네트워크를 통해 보낼 수 있는 최대의 유통량과 경로를 구하는 문제이다[1].

최대유통문제에서 Most Vital Arc (이하 MVA)란 최대유통량에 가장 치명적인 영향을 미치는 호(arc)를 가리킨다. 즉, 호와 마디(node)로 구성된 최대유통문제의 네트워크에서 우발적이거나 고의적인 여러 요인에 의해 호가 고장나거나 파괴될 수가 있는데, 이 때 어떤 호의 고장이나 파괴가 시점과 종점간의 최대유통량을 가장 크게 감소시키는가를 알아보는 문제를 말한다. 이러한 연구는 적의 공격 하에 처해 있는 이해상충의 상황이나 물류(Logistics) 또는 통신네트워크에서 어느 호가 MVA인지 알아내어 적의 공격으로부터 경계를 강화하거나, 또는 어떤 호를 파괴시켜야 적의 시스템의 효율성을 가장 크게 저하시킬 수 있는지 알고자 하는 문제에 잘 적용될 수 있다. 이에 대한 연구는 Wollmer[11]에 의해 가장 먼저 연구되었고, Durbin[5]이 Wollmer의 알고리듬을 적용하여 고속도로 시스템에서 MVA를 결정하였으며, Lubore 등 [8]이 MVA의 필요조건을 제시하여 Wollmer 알고리듬의 단점을 개선하였다.

Wollmer는 최대유통문제에서 최대유통량을 확보하기 위해 각 호에서 반드시 수송해야 되는 호의 값을 정의하여 이 호의 값이 가장 큰 호가 MVA가 됨을 보였다. 그러나 모든 호에 대하여 각 호에서 반드시 수송해야 되는 호의 값을 구해야 하기 때문에 효율성이 떨어지는 단점을

이 논문은 1996년도 전주대학교 학술연구조성비에 의하여 연구되었음
* 전주대학교 산업공학과

갖고 있다. 이러한 단점은 Lubore 등[8]에 의하여 개선되었다.
Lubore 등은 최소절단(Minimal cut)에 속하는 호의 용량보다 적어도 더 큰 호만이 MVA가 될 수 있다는 필요조건을 제시하여 MVA를 결정하는 방법의 효율성을 개선시켰다. MVA와 관련된 유사연구로는 Chang[4]의 최대유통문제에서 Most Vital Node(이하 MVN)를 결정하는 문제가 있는데, Chang은 MVN 문제가 변환네트워크에서 MVA를 찾는 문제와 같음을 보이고, Lubore와 Ratliff 등의 방법을 변형시켜 1-MVN과 k개의 MVN을 결정할 수 있는 방법을 제시하였다.

본 연구의 목적은 MVA를 구하는 이들의 방법을 변형시켜 좀 더 효율적으로 MVA를 구하는 방법을 제시하는데 있다.

2. 이론적 배경

본 연구에서 다루는 네트워크에는 시점(source) s와 종점(sink) t가 지정되고, 각 호 (i,j)에는 비음수 파라미터인 용량상한치(upper bound) u_{ij}와 용량하한치(lower bound) l_{ij}가 주어진다. u_{ij}는 호 (i,j)를 통과하는 유통량 f_{ij}의 최대허용치를 나타내며, l_{ij}는 f_{ij}의 최소허용치를 나타낸다(본 연구에서는 편의상 l_{ij}를 0으로 놓았음). 이 때 각 교점에서 흘러나가는 유통량(outflow)은 유통량보존법칙(flow conservation law)에 의해 그 교점으로 흘러 들어오는 유통량(inflow)과 같아야 한다(단, 시점 s와 종점 t에서는 예외). 시점에서 나간 모든 유통량은 종점에 도착해야 하기 때문에, 이 유통량의 총량을 v라고 하면 v는 다음과 같이 표현된다.

$$\sum_k f_{sk} = v = \sum_j f_{jt}$$

이러한 용량제약이 있는 네트워크에서 최대유통문제는 시점 s에서 종점 t까지 네트워크를 통해 보낼 수 있는 최대의 유통량을 구하는 문제이기 때문에, 최대유통문제 $G=(N,A)$는 다음과 같이 모형화 된다[2,9].

$$Max \quad v$$

$$s.t. \quad \sum_{j:(i,j)\in A} f_{ij} - \sum_{j:(j,i)\in A} f_{ji} = \begin{cases} v, & i=\text{시발점 } s \\ 0, & i=\text{중간점} \\ -v, & i=\text{종착점 } t \end{cases}$$

$$0 \le f_{ij} \le u_{ij}, \quad \forall (i,j)\in A$$

여기서 $G=(N,A)$는 마디 수가 $|N|=n$ 이고, 호의 수가 $|A|=m$ 인 유방향 네트워크라고 가정한다.

위의 네트워크 $G=(N,A)$에서, $G=(N,A)$의 교점집합 N을 시점 s와 종점 t를 중심으로 상호배반(mutually exclusive)인 부분집합 X와 $\overline{X}$로 분리했을 때 이 두 부분을 연결하는 호의 집합을 절단집합 $(X,\overline{X})$라고 한다. 즉,

$$(X,\overline{X}) = \{ (x,y) | (x,y)\in A, x\in X, y\in \overline{X}\}$$

단, $s\in X$, $t\in \overline{X}$, $X\cap\overline{X}=\emptyset$, $X\cup\overline{X}=N$.

여기서 절단용량(cut capacity) $C(X,\overline{X})$는 X에서 $\overline{X}$로 향하는 모든 호의 용량상한치의 합에서 $\overline{X}$에서 X로 향하는 모든 호의 용량하한치의 합을 뺀 것으로 정의된다[8]. 이 때 시점에서 종점까지의 최대유통량은 시점과 종점을 분리하는 $(X,\overline{X})$절단의 최소용량과 같다는 최대유통 최소절단정리(maximum flow minimum cut theorem)가 알려져 있다[9].

위의 절단집합을 이용한 Lubore[8]의 정리는 다음과 같다.

[정리 1] 네트워크 $G=(N,A)$에 대한 최적해 $V(F)$가 주어졌을 때, 호 (a,b)가 MVA가 되기 위한 필요조건(necessary condition)은 최소절단에 속한 호의 유통량보다 적어도 더 크거나 같아야 한다. □

위의 [정리1]은 네트워크 $G=(N,A)$의 최소절단에 속한 호 중에서 가장 큰 유통량 보다 적은 유통량이 흐르는 호는 MVA의 후보로서 고려할 필요가 없다는 사실을 말해 준다.

지금 네트워크 $G=(N,A)$에 대한 최대유통량을 $V(F)$라 하고, 이 때의 각 호 $(i,j)\in A$에 대한 최적유통량을 f_{ij}라 하자.

일단 $G=(N,A)$에 대한 최적해가 주어진 상태에서 호 용량이 변하게 되면 주어진 최적해가 비가능(infeasible)일 수 있다. 따라서 이 때에는 주어진 각 호의 유통량을 재최적화 시켜 주어야 하는데, 이 때의 원활한 계산을 위해 $G=(N,A)$에 대한 변환네트워크를 다음과 같이 정의해 보자

[정의 1] 변환네트워크 : $G_F=(N,A')$

$G=(N,A)$에 대한 최적해가 주어졌을 때 변환네트워크 $G_F=(N,A')$는 다음과 같이 정의된다.

$G=(N,A)$의 어떤 호 (x,y)에 대하여 만일 $f_{xy}>0$, $(x,y)\in A$ 이면 $G_F=(N,A')$의 A'에는 새로운 유통용량 $u'_{xy}=u_{xy}-f_{xy}$ 를 갖는 호(x,y)와 $u'_{yx}=f_{xy}$를 갖는 호 (y,x)를 추가하고, 만일 $f_{xy}=0$, $(x,y)\in A$ 이면 $G=(N,A)$의 유통용량과 같게 즉, $u'_{xy}=u_{xy}$ 로 놓는다. □

최대유통문제는 네트워크 상에서 두 점 사이에 최대로 수송할 수 있는 양과 경로를 구하는 문제이기 때문에 $V(F)$를 산출하는 해의 형태(flow pattern)가 여러가지 일 수 있다[2,8]. 이처럼 $G=(N,A)$에 대한 대안최적해가 다수개가 존재하더라도 각 호에는 $V(F)$를 얻기 위해서 반드시 수송해 주어야 하는 최소한의 유통량이 있는데[7], 이를 최소유통용량 (minimum capacity)이라고 정의하자. 이를 최소유통용량이라고 부르는 이유는 이 최소유통용량 이하의 유통량을 보낼 경우에는 최대유통량을 구할 수 없기 때문이다.

[정의 2] 최소유통용량 (minimum capacity) c_{ij}

$G=(N,A)$에 대한 최적해가 주어졌을 때 시점과 종점간의 $V(F)$를 얻기 위해 각 호에서 반드시 수송해 주어야 하는 최소한의 유통량을 호의 최소유통용량(minimum capacity)이라고 한다. □

최소유통용량은 따라서 항상 비음의 유통량 값을 갖는다. 여기에서는 $G=(N,A)$에 대한 최적해가 주어졌을 때, 호 (i,j)의 최소유통용량을 쉽게 구하기 위해서, 원 네트워크를 변환시킨

$G_F=(N,A')$를 사용하여 최소유통용량을 구할 수 있는 방법을 제시하고자 한다.

먼저 $G_F=(N,A')$에서 각 호 (i,j)의 시작마디 i와 도착마디 j를 시점과 종점으로 놓고, 최대유통문제를 풀었을 경우 구할 수 있는 최대유통량을 h_{ij}라고 정의하자. 이 때 $G_F=(N,A')$에서의 최대유통량 h_{ij}는 유통량보존법칙(flow conservation rule)에 의해 주어진 대안해의 형태와 상관없이 항상 동일하게 나타난다.

[특성] $G_F=(N,A')$에서 마디 i에서 마디 j까지의 최대유통량을 h_{ij}라고 하자. 이 때 h_{ij}는 $G=(N,A)$의 모든 대안최적해에 대해 동일한 값을 가진다. □

위의 특성은 대안최적해가 존재할 때 임의의 한 최적해만 주어지더라도 그것으로부터 호(i,j)의 최소유통용량을 구할 수 있다는 사실을 말해 준다.

위의 특성에 따라 $G_F=(N,A')$에서 구한 최대유통량 h_{ij}를 이용하여 최소유통용량 c_{ij}를 계산하면 다음과 같다.

[보조정리 2] $G=(N,A)$에 대한 최적해가 주어졌을 때 호 (i,j)의 최소유통용량 c_{ij}는 $u_{ij}>h_{ij}$이면 $c_{ij}=u_{ij}-h_{ij}$ 이고, $u_{ij}\le h_{ij}$ 이면 $c_{ij}=0$ 이다.

(증명) 먼저 $G_F=(N,A')$에서 마디 i에서 마디 j까지 갈 수 있는 모든 유통경로의 집합을 P_{ij} 로 정의하자. 그러면 마디 i에서 마디 j까지의 최대유통량 h_{ij}는 호 (i,j)를 통해 직접 보내는 유통량 $(u_{ij}-f_{ij})$ 와 호 (i,j)를 우회하여 보내는 유통량의 합 $(\sum_{p\in P_{ij}\setminus(i,j)} f_{ij}^p)$으로 나타낼 수 있다. 즉, $h_{ij}=(u_{ij}-f_{ij})+\sum_{p\in P_{ij}\setminus(i,j)} f_{ij}^p$ 이다.

그런데 호 (i,j)의 최소유통용량 c_{ij}는 f_{ij}에서 마디 i에서 마디 j까지 우회해서 보내는 유통량을 뺀 값, 즉, $c_{ij}=f_{ij}-\sum_{p\in P_{ij}\setminus(i,j)} f_{ij}^p$ 이기 때문에 다음 식에 의해 $c_{ij}=f_{ij}-\sum_{p\in P_{ij}\setminus(i,j)} f_{ij}^p=u_{ij}-(u_{ij}-f_{ij}+\sum_{p\in P_{ij}\setminus(i,j)} f_{ij}^p)=u_{ij}-h_{ij}$ 가 된다.

이 때 만일 $f_{ij}\ge\sum_{p\in P_{ij}\setminus(i,j)} f_{ij}^p$ 이면 $c_{ij}=u_{ij}-h_{ij}$ 이 되고, 만일 $f_{ij}<\sum_{p\in P_{ij}\setminus(i,j)} f_{ij}^p$ 이면 최소유통용량이 음수로 나타나는데, 최소유통용량의 정의에 따라 이때의 c_{ij} 는 0의 값을 가진다. 이를 간단히 나타내면 $u_{ij}-h_{ij}$ 가 양이면 $c_{ij}=u_{ij}-h_{ij}$ 이고, $u_{ij}-h_{ij}$ 가 비양이면 $c_{ij}=0$ 이 된다. □

3. MVA를 결정하는 방법

지금 $G=(N,A)$에 대한 최적해가 주어진 상황에서 호 (i,j)가 제거되었다고 가정하자. 그러면 $V(F)$는 최소유통용량 c_{ij} 만큼 감소되게 된다.

[정리 3] $G=(N,A)$에 대한 최적해가 주어진 상황에서 만일 호 (i,j)가 제거된다면 최대유통량은 $V(F)-c_{ij}$가 된다.

(증명)

$G=(N,A)$에 대한 최적해가 주어져 있으므로 각 호 (i,j)에는 f_{ij}의 유통량이 흐르고 있다. 호 (i,j)를 통해서 보내는 이 f_{ij}의 양은 대안최적해가 존재할 경우 마디 i에서 마디 j까지의 우회경로를 통해 유통량을 우회시킬 수도 있으나, $V(F)$를 얻기 위해서는 적어도 최소유통용량 c_{ij}만큼의 유통량은 반드시 호 (i,j)를 통해서 보내 주어야 한다. 그런데 호 (i,j)가 제거된다면 최소유통용량 c_{ij}만큼의 유통량을 시점에서 종점까지 전달해 줄 수 없기 때문에 최대유통량은 c_{ij}만큼 감소되게 된다. 따라서 호 (i,j)가 제거되게 되면 최대유통량은 $V(F)-c_{ij}$ 가 된다. □

위의 [정리 2]에 따라 호 (i,j)가 제거될 경우 최대유통량을 가장 크게 감소시키는 호는 최소유통용량이 가장 큰 호가 된다.

[종정리 4] $G=(N,A)$에 대한 최적해가 주어진 상황에서, 만일 호 (i,j)가 제거된다면 호의 최소유통용량이 최대인 호가 MVA가 된다.

(증명) 최대유통문제에서 MVA란 한 호의 제거가 최대유통량을 가장 크게 감소시키게 되는 호를 말한다[3-10]. 이 때 최소유통용량 c_{ij}는 시점과 종점간의 최대유통량을 얻기 위해서 각 호에서 반드시 수송해 주어야 하는 최소한의 유통량이라 정의하였으므로, [정리 2]에 의해 최소유통용량이 가장 큰 호가 최대유통량을 가장 크게 줄이게 된다. 따라서 호의 최소유통용량이 최대인 호가 MVA가 된다. □

주어진 네트워크에서 MVA를 구하기 위해서는 먼저 $G=(N,A)$에서 최소절단을 구한 뒤, $G=(N,A)$에 대한 변환네트워크 $G_F=(N,A')$를 구성한 다음, 최소절단에 속하는 호의 용량보다 적어도 더 큰 호에 대하여 $G'=(N,A')$에서 h_{ij}를 구하여 계산할 수 있다.

이를 위한 해법은 다음과 같다.

계 산 법

[단계 0] 최적해 산출

(0-1) $G=(N,A)$에 대한 f_{ij}, $V(F)$를 구하고, 이 때의 최소절단을 $(X,\overline{X})$라 하자.

(0-2) $U^*=MAX_{(i,j)\in(X,\overline{X})} f_{ij}$라 놓는다.

(0-3) MVA의 후보집합 S를 다음과 같이 놓는다.

$$S=\{(i,j)\in A \mid f_{ij}\geq U^*\}$$

[단계 1] 최소유통용량의 계산

(1-1) 주어진 최대유통문제에 대한 변환네트워크 $G_F=(N,A')$를 구성한다.

이 때 변환네트워크에서의 용량상한 U'는 다음과 같이 정의된다.

만일 $f_{xy}>0, (x,y)\in A$ 이면 $u'_{xy}=u_{xy}-f_{xy}$, $u'_{yx}=f_{xy}$

만일 $f_{xy}=0, (x,y)\in A$ 이면 $u'_{xy}=u_{xy}$

(1-2) MVA의 후보집합 S에 속한 호들에 대하여 $G'=(N,A')$에서 h_{ij}를 구한다.

(1-3) 최소유통용량 c_{ij}를 계산한다.

$u_{ij} > h_{ij}$ 일 때 $c_{ij} = u_{ij} - h_{ij}$, $u_{ij} \leq h_{ij}$ 일 때 $c_{ij} = 0$

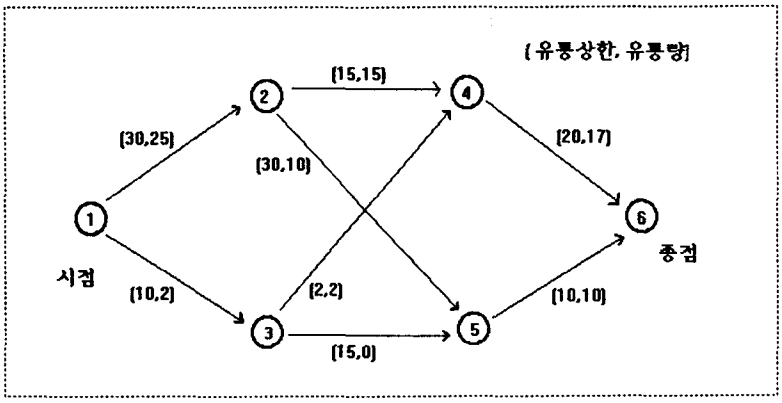
[단계 2] MVA 결정

최소유통용량 c_{ij}가 가장 큰 호가 MVA가 된다.

즉, $MVA = MAX_{(i,j) \in S}\, c_{ij}$

4. 예 제

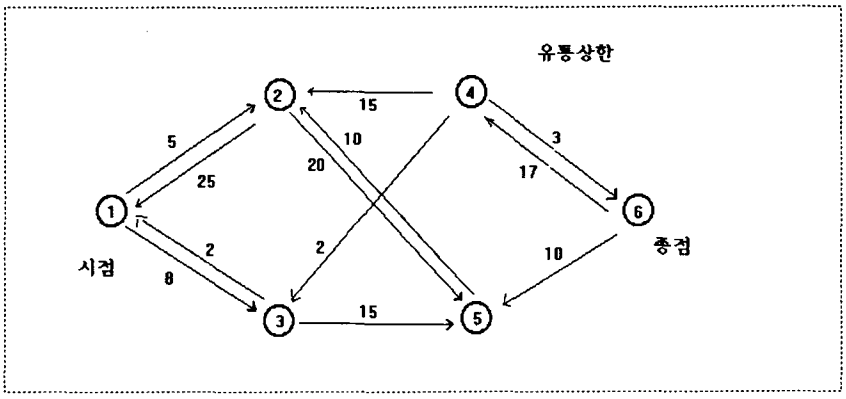
다음과 같이 마디수가 6개이고 호의 수가 8인 최대유통문제를 고려해 보자. 이 문제의 최대유통량은 27이며, 이 때의 각 호에 대한 최적유통량은 괄호의 왼편에 나타나 있다[8].



[그림 1] 최대유통문제 $G=(N,A)$의 최적해 ($V(F)=27$)

위의 [그림1]에서 최소절단집합 $(X, \overline{X})$는 {(2,4),(3,4),(5,6)} 이다.
최소절단집합 중에서 가장 큰 유통량이 흐르는 호는 (2,4)로써 15의 유통량이 흐르고 있기 때문에, 주어진 네트워크에서 적어도 15보다 큰 유통량이 흐르는 호가 MVA의 후보집합 S가 된다. 즉, S={(1,2),(2,4),(4,6)}

주어진 문제에 대한 변환네트워크 $G_F=(N,A')$는 [그림 2]와 같이 구성된다.



[그림 2] $G=(N,A)$에 대한 변환네트워크 $G_F=(N,A')$

MVA의 후보집합 $S=\{(1,2),(2,4),(4,6)\}$에 속한 각 호 (i,j)에 대한 최소유통용량을 구하기 위해 [그림 2]의 변환네트워크에서 마디 i로 부터 마디 j까지의 최대유통량을 구해보면 다음과 같다.

$h_{12}=13,\ h_{24}=0,\ h_{46}=3$

따라서 각 호 (i,j)에 대한 최소유통용량 c_{ij}는 다음과 같다.

$c_{12}=17,\ c_{24}=15,\ c_{46}=17$

여기서 최소유통용량이 가장 큰 호는 호 (1,2)와 호 (4,6)이기 때문에 이들 호가 MVA가 된다.

5. 결 론

본 연구에서는 최대유통문제에서 최대유통량에 가장 치명적인 영향을 미치는 MVA를 결정하는 방법을 연구하였다.

이러한 연구는 적의 공격 하에 처해 있는 이해상충의 상황이나 물류(Logistics) 또는 통신네트워크에서 어느 호가 MVA인지 알아내어 적의 공격으로부터 경계를 강화하거나, 또는 어떤 호를 파괴시켜야 적의 시스템의 효율성을 가장 크게 저하시킬 수 있는지 알고자 하는 문제에 잘 적용될 수 있다.

이를 위해 본 연구에서는 주어진 네트워크에 대한 변환네트워크를 정의하여 최소절단에 속한 호 중에서 가장 큰 유통량이 흐르는 호보다 적어도 더 큰 유통량이 흐르는 호들을 MVA의 후보집합으로 분류하여, 이 후보집합에 속한 호들에 대한 최대유통량을 구한 다음 최소유통용량을 구하고, 최종적으로 최소유통용량이 가장 큰 호를 MVA로 결정하는 방법을 제시하였다.

참 고 문 헌

[1] 박순달, OR(경영과학), 삼정판, 민영사, 1992

[2] Ahuja, R. K., T. L. Magnanti, and J. B. Orlin, *Network Flows-Theory, Algorithms, and Applications*, Prentice-Hall, 1993

[3] Ball, M. O., R.L. Gloden, and R. V. Vohra, " Finding the Most Vital Arcs in a Networks " , *Operations Research Letters*, Vol. 8(1989), pp 73-76

[4] Corley H.W., H. Chang, "Finding the n Most Vital Nodes in a Flow Network", *Management Sci.* Vol. 21, No. 3(1975), pp 362 - 364,

[5] Durbin, E. P., "An Interdiction Model of Highway Transportation", *Memorandum RM-4945-PR*, May 1966

[6] Ford, L. R., and D. R. Fulkerson, *Flows in Networks*, Princeton University Press, Princeton, NL, 1962

[7] Hoyeon Chung, Jaegeun Ahn, Soondal Park, "Parametric Analysis of Maximum Flow Problem," *Proceedings of 20th International Conference on Computers and Industrial Engineering*, Vol. 1(1996), pp 149-152

[8] Lubore, S.H., H.D.Ratliff, G.T.Sicillia "Determining the Most Vital Link in a Flow Network", *Naval Reaearch Logististics Quarterly*, Vol. 18, No. 4(1971), pp 711-713

[9] Murty, K.G., *Network Programming*, Prentice-Hall, 1992

[10] Ratliff, H.D., G. T. Sicilia, and S. H. Lubore, " Finding the n Most Vital Links in Flow Networks ", *Management Sci.* Vol. 21, No. 5(1975), pp 531- 539

[11] Wollmer R.D., M.J.Ondrasek, "A Model for Targeting Strikes in an Loc Network", *Memorandum RM-5940-PR*, September 1969