Journal of Historia Mathematica Vol. 9. No. 1, (1996), 1 - 11.

선택공리와 19세기 수학

서강대학교 수학과 **홍 성 사**
숙명여자대학교 수학과 **홍 영 희**

0. 서 문

Cantor의 집합론이 형성되기 전까지의 19세기 해석학에서는 무한 과정(infinite process)이 아무 저항없이 사용되어 왔다. 이 때, "모든 집합은 정렬집합이 되도록 순서를 줄 수 있다"라는 정렬문제(Well-Ordering Problem)가 제기되었고, 이 문제는 초기에는 문제이기보다는 가정으로 받아들여지고 또 1883년 Cantor는 정렬문제를 참인 "law of thought"로 인식하고, 이를 정렬원리(Well-Ordering Principle)라 불렀다. 그러나 그 당시 수학자들은 이를 받아들이지 않았고, Cantor 자신은 1893년 이를 증명하려고 시도하였다.

Zermelo는 1904년 선택공리(Axiom of Choice)를 도입하여 정렬원리를 증명하였다([22]). 물론 이후에 정렬원리와 선택공리는 서로 동치임이 밝혀지고, 선택공리는 모든 수학에서 필수적인 공리가 되었다. Hilbert는 1926년에 "선택공리는 그 당시까지의 모든 수학의 출판물에서 가장 많이 공격받는 공리", 또 Fraenkel은 1958년에 "선택공리는 아마도 가장 흥미 있는 공리이고 늦게 나타났지만, 2000여년 전에 도입된 Euclid의 평행선공리를 제외하고는 가장 많이 거론되고 있는 수학의 공리"라고 한 바와 같이 선택공리는 누구에게나 흥미 있고 또 이를 피할 수 있는가 하는 문제는 대단히 중요하다.

우리의 가장 흥미 있는 주제인 유한과 무한이 선택공리를 통하여 구별되고, 또 1982년 위상공간의 일반화인 frame(pointless topological space)의 category에서 Tychonoff 정리가 선택공리와 무관하게 증명이 된 후([2, 3, 18], see also [14]), 선택공리에 대한 우리의 관심은 더욱 증대되어, 이 논문을 쓰게 되었다.

1절에서는 19세기 수학자들이 한 것과 같이, 대학의 수학교육에서 초보적인 정리들의 증명을 위하여 선택공리를 무의식적으로 사용하고 있는 몇 가지 예를 들어 보이고, 이들을 통하여, 유한과 무한 과정(finite and infinite process)의 차이를 인지하도록 하여야 함을 강조한다.

2절에서는 19세기 수학자들이 어떻게 선택공리를 무시하고 여러 정리들을 증명하였는지 역사적으로 이들을 조사하고, 또 선택공리를 위한 준비과정이 어떻게 진행되었는지 알아본다.

3절에서는 선택공리 이후의 과정을 간략하게 알아본다.

1. 선택공리

논문의 완비성을 위하여 우선 선택공리를 정의하자.

1.1 다음 명제를 선택공리라 한다.

공집합이 아닌 집합들로 이루어 진 집합족 $(X_i)_{i\in I}$(I는 임의의 집합)에 대하여, 모든 $i\in I$에 대하여 $f(i)\in X_i$인 함수 $f: I\to\bigcup\{X_i: i\in I\}$가 존재한다.

이 때, 함수 f를 집합족 $(X_i)_{i\in I}$의 선택함수(choice function of the family $(X_i)_{i\in I}$) 라 한다.

1.2 1) 유한집합족 $(X_i)_{i\in I}$ 즉 I 가 유한집합인 경우에는 위의 명제는 증명이 되므로 선택공리는 "무한집합족에 대하여 선택함수가 존재한다"로 바꾸어도 좋다. 결국 선택공리를 통하여 유한과 무한의 차이를 인지하게 된다. 또 집합족 $(X_i)_{i\in I}$의 선택함수의 존재성은 모든 I의 원소 i에 대하여 그 함수값 $f(i)$가 확정되었다는 것을 의미하므로, 이를 결정하는 법칙이 확정됨을 의미한다.

2) 선택공리에서 집합족 $(X_i)_{i\in I}$는 모든 $i\neq j$에 대하여 $X_i\cap X_j=\phi$, 즉 서로 소인 경우로 제한하여도 좋다. 왜냐하면, 임의의 집합족 $(X_i)_{i\in I}$에 대하여 $(\{i\}\times X_i)_{i\in I}$는 서로 소인 집합족이고, $\bigcup\{\{i\}\times X_i: i\in I\}$는 집합족 $(X_i)_{i\in I}$의 coproduct이므로, onto 함수

$$g: \bigcup\{\{i\}\times X_i: i\in I\}\to\bigcup\{X_i: i\in I\}$$

가 존재하여, 모든 $i\in I$, $x\in X_i$에 대하여 $g(i,x)=x\in X_i$이다. 서로 소인 집합족 $(\{i\}\times X_i)_{i\in I}$의 선택함수를 f 라 하면 $g\circ f: I\to\bigcup\{X_i: i\in I\}$는 $(X_i)_{i\in I}$의 선택함수가 되기 때문이다.

3) 집합족 $(X_i)_{i\in I}$의 선택함수 f는 $\prod\{X_i: i\in I\}$의 원소이므로, 선택공리는 다음과 같이 나타낼 수 있다. 모든 $i\in I$에 대하여, $X_i\neq\phi$이면, $\prod\{X_i: i\in I\}\neq\phi$이다.

이제부터 선택공리가 얼마나 초보적인 정리에서도 필요한가를 몇 가지 예를 들어 알아보자.

1.3 선택공리와 다음은 서로 동치이다.

모든 onto 함수 $f: X\to Y$에 대하여 $f\circ g=\mathrm{id}_Y$인 함수 $g: Y\to X$가 존재한다.

선택공리를 가정하자. 모든 $y\in Y$에 대하여 f onto이므로, $f^{-1}(\{y\})\neq\phi$이다. 따라서, 집합족 $\{f^{-1}(\{y\}): y\in Y\}$는 선택함수 $g: Y\to\bigcup\{f^{-1}(\{y\}): y\in Y\}$를 가진다. 이때

$\bigcup\{f^{-1}(\{y\}): y\in Y\} = X$이므로, $g: Y\to X$이고, 모든 $y\in Y$에 대하여, $f(g(y)) = y$이다.

역으로, 서로 소이며, 공집합이 아닌 집합으로 이루어진 집합족 $(X_i)_{i\in I}$에 대하여, 함수 $f: \bigcup\{X_i: i\in I\}\to I$ ($f(x)$는 x를 원소로 갖는 유일한 X_i의 i)로 정의하면, f는 onto 함수이고 가정에 의하여, 함수 $g: I\to \bigcup\{X_i: i\in I\}$가 존재하여, $f\circ g = \mathrm{id}_I$이다. 따라서, g는 집합족 $(X_i)_{i\in I}$ 의 선택함수이다. 위의 1.2 의 2)에 의하여, 선택공리가 성립한다.

실제로 두 집합 X, Y에 대하여, X의 cardinal number를 $|X|$로 나타낼 때, onto 함수 $f: Y\to X$가 존재하면, $|X|\le|Y|$라는 사실도 위의 right inverse 함수가 존재하기 때문에 성립함을 주의하자. 따라서 Cantor-Bernstein 정리는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

두 집합 X, Y에 대하여, onto 함수 $f: X\to Y$, $g: Y\to X$가 존재하면, $|X| = |Y|$이다.

주. Cantor-Bernstein 정리 - $|X|\le|Y|$, $|Y|\le|X|$이면, $|X| = |Y|$ - 는 Schröder-Bernstein 정리로 잘못 알려져 있다. 실제로, Bernstein은 Cantor가 이 사실을 conjecture 한 후 Cantor seminar에서 이를 증명하였다. 또 Schröder도 그의 논문 "Über zwei Definition der Endlichkeit und G. Cantor'sche Sätze, Deutsche Akademie der Naturforscher, Nova Acta Leopoldina, 71(1898), 303-362" 에 이 정리의 증명을 발표하였다. 그 당시에 Cantor, Peano, Schoenflies 등은 모두 그의 증명을 맞는 것으로 받아들였다. 그러나, 1902년 5월 8일자 편지를 통하여, A. Korselt는 그의 증명에 중요한 결함이 있음을 Schröder에게 알리고, 그 2주 후에 Korselt에게 보낸 답장에서 Schröder는 그의 잘못을 인정하고 실제로 1901년 이미 M. Dehn에게 그 사실을 알려 주었다고 하였다. 따라서, Schröder의 이름은 빠져야 되는데도, 아직도 상당히 많은 책에 그대로 사용되고 있다.

수학의 모든 분야에서 가장 많이 쓰이고 있는 함수의 분해를 위한 Fundamental Theorem of Factorization에도 위의 선택공리와 동치인 명제가 쓰이고 있다.

함수 $f: X\to Y$에 대하여, $\ker(f) = \{(x, x')\in X\times X: f(x) = f(x')\}$으로 정의하고 이를 함수 f의 kernel relation이라 한다.

1.4 Fundamental Theorem of Factorization onto 함수 $f: X\to Y$, 함수 $g: X\to Z$에 대하여, $g = h\circ f$인 함수 $h: Y\to Z$가 존재하기 위한 필요충분조건은 $\ker(f)\subseteq\ker(g)$이다. 이 때 h는 유일하다.

실제로 주어진 조건은 명백히 필요조건이다. 충분조건임을 보이기 위하여, f는 onto이므로, 함수 $k: Y\to X$가 존재하여, $f\circ k = \mathrm{id}_Y$이다. 이 때 $h = g\circ k$로 정의하자.
모든 $x\in X$에 대하여, $f(k(f(x))) = f(x)$이므로, $(k(f(x)), x)\in\ker(f)\subseteq\ker(g)$이

다. 따라서, $g(x) = g(k(f(x))) = h(f(x))$, 즉 $g = h \circ f$이고, 또 f가 onto 이므로, h는 유일하다.

1.5 집합 X가 무한집합이기 위한 필요충분조건은 X가 countably infinite subset을 포함하는 것이다. 이 사실의 증명에도 선택공리를 써서 countably infinite subset을 구성한다.

1.6 Countably infinite set들로 이루어 진 집합열 (X_n)의 합집합도 countably infinite이다.

왜냐하면, $\mathrm{N} \times \mathrm{N}$은 countably infinite라는 사실을 이용하여 증명되고 있다. 이 때, 각 n에 대하여 X_n과 N 사이에 일대일 대응을 무엇으로 택하였는지에 대하여 언급을 하지 않은 상태에서 증명을 하고 있음을 주의하자. 실제로, 각 n에 대하여, X_n은 countably infinite이므로,

$$F_n = \{h : h : X_n \to \mathrm{N} \text{ 은 } 1-1 \text{ onto 함수}\} \neq \phi \text{이다.}$$

따라서 선택공리에 의하여, (F_n)의 선택함수 $f: \mathrm{N} \to \bigcup F_n$은 존재하고, 이 때 $f(n) = h_n$이라 하면, 이들 (h_n)과 $\mathrm{N} \times \mathrm{N}$이 countably infinite라는 사실을 이용하여, $\bigcup X_n$이 countably infinite임을 보일 수 있다.

1.7 실수의 집합 $\mathbb{R}$에 대하여, 함수 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$가 a에서 연속이기 위한 필요충분조건은 a로 수렴하는 모든 수열 (x_n)에 대하여, $(f(x_n))$이 $f(a)$로 수렴하는 것이다.

1.8 First countable 위상공간 X, $A \subseteq X$에 대하여, $x \in \mathrm{cl}\,A$($\mathrm{cl}\,A$: A의 closure)이기 위한 필요충분조건은 A 위에 수열 (x_n)이 존재하여 (x_n)이 a 로 수렴하는 것이다.

위의 두 사실의 증명을 위하여는 공집합이 아닌 집합으로 이루어진 countable family를 구성하고 이에 선택공리를 적용하여 수열을 찾아낸다. 1.5 - 1.8에서와 같이 countable family에 대한 선택함수의 존재성을 Countable Axiom of Choice라 한다.

1.9 위상공간 X에서 $\mathcal{L}$를 X의 base라 하면, $|A| \leq |\mathcal{L}|$인 X의 dense subset A가 존재한다는 사실도 선택공리를 써야만 증명이 된다. 실제로 이 두 사실은 서로 동치이다.

특히 second countable space가 separable 즉 countable dense subset을 가진다는 사실은 19세기 수학자들이 많이 활용하였으나 이를 증명하는 데 선택공리가 쓰였음을 간과하고 있다.

1.10 (Boolean Ultrafilter Theorem) 모든 non-trivial Boolean algebra는 ultrafilter를 가진다.

이는 집합 X에서 모든 filter는 ultrafilter에 포함된다는 명제와 동치이다.

실제로 선택공리와 동치인 Zorn's lemma를 쓰면 이는 쉽게 증명이 된다. 그러나, 선택공리는 Boolean Ultrafilter Theorem을 imply하지만, 그 역은 성립하지 않는다([1, 5, 11, 12]).

1.11 (Tychonoff Theorem) Compact space의 product space는 compact space이다. 실제로 선택공리는 Tychonoff Theorem과 동치이다.

Boolean Ultrafilter Theorem을 써서 위상공간 X가 compact이기 위한 필요충분조건은 X위의 모든 ultrafilter가 수렴하는 것이다. compact space의 족 $(X_i)_{i\in I}$에 대하여, $\prod X_i = X$라 하고 X의 ultrafilter $\mathscr{F}$를 택하면, 모든 $i\in I$에 대하여, $p_i(\mathscr{F})$는 수렴한다. (p_i는 ith projection). 따라서 $L_i = \{x\in X_i : p_i(\mathscr{F})\to x\} \neq \phi$ $(i\in I)$. 집합족 $(L_i)_{i\in I}$에 선택공리를 적용하여, $\prod L_i \neq \phi$. $(a_i)\in \prod L_i$를 택하면, $\mathscr{F}\to(a_i)$. 따라서, X는 compact이다. 즉,

$$\text{선택공리} \Rightarrow \text{Tychonoff Theorem.}$$

역으로, Tychonoff Theorem을 가정하자. 공집합이 아닌 집합들로 이루어진 집합족 $(X_i)_{i\in I}$에 대하여, $\omega\notin \bigcup X_i$를 택하고, $E_i = X_i \cup \{\omega\}$, E_i의 topology를 $\{\phi, \{\omega\}, E_i\}$라 하면, 명백히 E_i는 compact이다. 가정에 의하여, $\prod E_i$는 compact이다. 모든 X_i는 E_i의 closed set이고, $\{p_i^{-1}(X_i) : i\in I\}$는 finite intersection property를 가지는 $\prod E_i$의 closed set의 family이다. 왜냐하면, 모든 I의 유한 부분집합 J에 대하여, $\prod\{X_j : j\in J\}\neq\phi$이므로, $(x_i)_{j\in J}\in\prod\{X_j : j\in J\}$를 택할 수 있다. 이 때, $a_i = x_i$ if $i\in J$; $a_i=\omega$ if $i\notin J$로 택하면,

$$(a_i)_{i\in I}\in \bigcap\{p_i^{-1}(X_i) : i\in J\}$$

이기 때문이다. 따라서, $\prod E_i$가 compact이므로,

$$\{p_i^{-1}(X_i) : i\in J\} = \prod X_I \neq \phi$$

이다. 즉, Tychonoff Theorem $\Rightarrow$ 선택공리.

1.12 주. Tychonoff Theorem과 선택공리는 서로 동치이지만, compact Hausdorff space의 product가 다시 compact space라는 사실은 위의 증명에서 L_i가 singleton set이므로 선택공리를 쓰지 않고도 $\mathscr{F}$가 수렴한다는 사실을 증명할 수 있다. 실제로 Boolean Ultrafilter Theorem과 compact Hausdorff space의 product space가 compact라는 명제는 서로 동치이다.

또 complete uniform space의 product uniform space가 다시 complete라는 명제와 선택공리는 서로 동치이다.

1.13 모든 vector space는 base를 가진다

1.14 unit을 갖는 commutative ring R의 ideal J는 maximal ideal 에 포함된다.

위의 두 정리도 선택공리를 써서 증명됨은 잘 알려져 있다. 실제로 **1.14**와 선택공리는 서로 동치이다 ([4, 19]).

2. 선택공리 이전의 수학

이 절에서는 선택공리가 Zermelo에 의하여 도입되기 전까지 19세기 수학에서 일어난 여러 가지 문제점을 알아보자.

2.1 무한을 자연수의 집합 - actual infinite - 을 제외하고는 받아들이지 않고, potential infinite 로 이해하려는 Aristotle 이래 19세기에 처음으로 actual infinite가 Cantor에 의하여 다시 수학으로 들어오게 되었다. 실제로 Cantor 이전에 이미 무한과 유한의 구별은 시도되었었다. 그 예로, Bolzano 사후에 출판된 그의 저서 Paradoxes of the Infinite(1851년 출판)에 다음 명제가 들어 있다.

2.2 집합 X가 유한집합이기 위한 필요충분조건은 X가 공집합이거나, 자연수 k가 존재하여, X와 $\{1, 2, \cdots, k\}$가 equipotent인 것이다.

한편, 1872년과 1878년 사이에 쓰여진 초고에도 이미 나타나 있고, 그 후 1888년에 출판된 Dedekind 의 책 Was sind und was sollen die Zahlen?에서 Dedekind는 그 전까지 나와있던 유한과 무한의 정의는 완벽하지 않으므로, 다음과 같이 유한, 무한집합을 정의한다고 하였다.

2.3 집합 X가 진부분집합과 equipotent하면 X를 무한집합이라 하고, 무한집합이 아닌 집합을 유한집합이라 한다.

19세기 후반기의 모든 수학자, 특히 Dedekind와 Cantor는 **2.2** 와 **2.3**은 동치라고 생각하였다. 또 Dedekind는 자연수의 도움으로, 모든 무한집합은 countably infinite set을 포함한다는 **1.5**를 증명하였다. 그 후, **1.5**는 1895년에 Cantor, 1898년에 Borel, 1902년에 Russell이 다시 증명하였는데 이들은 모두 Countable Axiom of Choice를 쓰고 증명하였지만, 그들은 이 사실을 알지 못하고 증명하였다.

집합론과 해석학에서 자주 쓰인 Countable Union Theorem **1.6**은 아무 저항없이 쓰여져 왔다. 그러나, **1.6** 에서 보았듯이 infinite family (X_n)의 각 X_n에 대하여 어떤 방법을 통하여 X_n을 enumeration하였는지에 대하여 언급을 하지 않은 상태에서 증명을 해왔다.

그러나 Countable Axiom of Choice가 false인 Zermelo-Fraenkel Model(앞으로는 이를 줄여서 ZF model이라고 한다)에서 실수전체의 집합 **R**은 uncountable이지만, countable set의 countable union이 됨이 증명되고([9, 10]), 또 **R**의 무한부분집합 X가 존재하여 X는 countably infinite subset을 갖지 않는 ZF model이 존재함이 증명되었다([9]).

2.4 집합 X 위의 동치관계 R에 대하여, $|X/R| \leq |X|$, 즉 모든 X의 partition $\wp$에 대하여, $|\wp| \leq |X|$이라는 사실도 앞에서 보았듯이 선택공리에 의하여 얻어진다. 이 사실도 1880년대에 Cantor는 실수의 위상적 구조를 연구하면서 사용하였다([7, 8]). 실제로 이 명제는 1896년에 Burali-Forti에 의하여 처음으로 구성되었다. 이 명제가 성립하지 않는 ZF model이 존재한다([17]).

2.5 1895년 Cantor는 cardinal number전체의 class가 totally ordered, 즉 모든 두 cardinal number는 비교가능하다는 Trichotomy of Cardinals를 증명없이 주장한 후 1899년에 Well-Ordering Principle로부터 이 사실을 증명할 수 있다고 Dedekind에게 편지를 보내었다. 1915년에 F. Hartog([13])은 선택공리와 Trichotomy of Cardinals는 서로 동치임을 보였다. Trichotomy of Cardinals의 문제는 Cantor이외에도, Schröder, Pierce, Borel, Russell, Hardy, Jourdain 등에 의하여 다루어졌는데 이들은 모두 Well-Ordering Principle을 사용할 수 밖에 없음을 알고 있었다. 전술한대로, Well-Ordering Principle을 Law of Thought로 받아들이던 Cantor는 1895년경부터 증명가능한 정리로 생각하기 시작하고, 1897년 이를 실제로 증명하였다고 믿었다. 증명에 문제가 있음을 알았던지, 후에 이 증명을 발표하는 것을 거절하였다. 그후 1900년에 Hilbert는 **R**의 well-ordering 문제를 제기하여 다시 Well-Ordering Principle의 문제가 많은 사람들의 관심을 끌게 되었다.

2.6 함수 f: **R** → **R**의 연속성과 sequential continuity가 서로 동치라는 **1.7**은 1871년 10월에 시작하여 1872년에 출판한 Heine의 논문에 처음 나타난다. 실제로 이 결과는 Weierstrass에 의하여 얻어진 결과들을 정리한 것들인데, Berlin에서 Cantor가 Weierstrass의 제자로 공부할 때 배운 것들을 Cantor가 1869년 Halle 대학에 동료교수로 있으면서 Heine에게 가르쳐 준 것으로 알려져 있다. 이들은 모두 Countable Axiom of Choice를 쓴다는 사실을 인지하지 못하고 있다. 이 정리는 1886년 Tannery가 출판한 초보적인 Introduction à la théorie des fonctions d'une variable(Hermann, Paris)에 나타나고, 물론 Tannery도 Countable process에 대하여 아무런 언급을 하지 않았다. 그러나, 이 정리가 수학에서 무의식적으로 선택공리를 쓰게 된 최초의 정리가 되었다. 실제로 1913년 Italy의 Cipolla와 1916년 Poland의 Sierpinski가 이 사실을 인지하기 전까지 아무도 의심하지 않은 채 사용되어 왔다. 또 sequentially continuous이지만 discontiuous real valued function이 존재하는 ZF model이 존재한다([15]).

2.7 first countable space X에서 X의 부분집합 A의 closure와 A의 sequential closure가 같다는 **1.8**도 1918년 Sierpinski가 선택공리에 의하여 증명됨을 보일 때까지, 19세기 수

학자들은 이들이 같은 것으로 알고 연구를 진행하였다. 실제로 선택공리가 성립하지 않는 model에서 이들 두 closure가 서로 다른 실수의 부분집합이 존재한다([16]). 위상공간이 도입되기 전인 19세기 수학자들은 물론 first countable space를 다룬 것은 아니고, $\mathbf{R}^n$의 부분집합에 대한 문제를 취급하고, 또 closure 대신에 limit point와 sequential limit point를 통하여 이 문제에 접근하였다. 1817년 Bolzano가 출판한 결과의 방법을 이용하여 Weierstrass가 증명한 $\mathbf{R}$의 Infinite bounded subset은 limit point(sequential limit point)를 가진다는 Bolzano-Weierstrass정리에서, limit point를 가진다는 정리는 선택공리를 쓰지 않고 증명이 되지만, sequential limit point 부분은 선택공리가 꼭 필요하다. 이 사실도 Sierpinski가 그 사실을 밝히기 전까지는 두 명제가 동치인 것으로 알고 있었다. limit point에 관한 정리의 증명은 여러 사람들에게 알려져 있었는데, 1878년 Berlin에서 Weierstrass의 강의를 들은 Pincherle에 의하여 1880년에 출판되었다. 그 후 1892년에 Jordan은 선택공리를 역시 무의식적으로 사용하여 sequential limit point에 관한 정리를 증명하였다. 이 논문에서 그는 Jordan Measure의 개념을 도입하였다. 1966년 Cohen은 $\mathbf{R}$의 infinite bounded subset이 sequential limit point를 갖지 않는 ZF model을 구성하였다([9]). Jordan의 결과는 Lebesgue에게 많은 영향을 주었고, 실제로 그는 선택공리를 French school과 함께 공격하였지만, 그 역시 여러 정리의 증명에서 선택공리가 사용되고 있음을 간과하고 있다. 19세기 해석학자들은 Zermelo가 선택공리를 도입하기 전까지 finite process와 infinite process를 동일한 것으로 알고 결과들을 얻어내었다.

2.8 19세기 수학자들이 모두가 infinite process를 받아들인 것은 아니다. Italy의 Turin에 같이 있던 Peano, Bettazzi, Levi가 그 대표적인 수학자들이다. Peano는 1890년에 출판된 논문([21])에 선택공리를 써야하는 대목에서 다음과 같은 언급을 하였다.

"But since one cannot apply infinitely many times an arbitrary rule by which one assigns to a class A an individual of this class, a determinate rule is stated here, by which, under suitable hypotheses, one assigns to each class A a member of this class".

Zermelo가 선택공리를 써서 정렬원리를 증명한 후, Peano는 선택공리와 또 이를 사용하여 증명되었던 모든 결과를 강력하게 비판하였다. Bettazzi도 1892년에 infinite process-infinite choice-를 강력하게 비판하였고, 또 어떤 choice이든 determinate rule을 찾으려고 노력하였다 1.([6]). 1896년에는 2.2 의미에서의 무한집합이면 Dedekind의미의 무한집합이 된다는 Dedekind의 증명에 선택공리가 쓰였음을 지적하고 이를 공격하려 하였으나, Burali-Forti가 Dedekind의 증명이 맞다고 설득하여, 선택공리에 대한 더 이상의 논의를 할 수 없게 되었다. Levi 역시 Peano의 영향으로 arbitrary choice를 피하려고 노력하였다.

3. 선택공리 이후의 수학

이 절에서는 Zermelo가 선택공리를 이용하여 정렬원리를 증명한 후 선택공리가 어떻게 받아들여졌는지에 대하여 알아본다.

Zermelo 는 처음부터 집합론을 공부한 것은 아니다. 1894년 그의 박사학위논문은

Calculus of Variation을 취급하였고, 그 후 수리물리학, 특히 통계역학을 연구하였다. 1894-1897년 사이에는 Berlin에 있는 The Institute for Theoretical Physics에서, Max Planck의 조수로 일하였고, 그 후 Göttingen으로 옮겼다. 1899년, hydrodynamics에 관한 Habilitationsschrift를 제출하였고, Privatdozent로 강의를 시작하였다. 이 때, 그는 Hilbert에게 강한 영향을 받아서, 수학기초론, 특히 Cantor의 집합론을 연구하기 시작하였는데, 이 때 Göttingen의 여러 교수들로부터 많은 도움을 받았음을 기술하고 있다. 이 때, Zermelo는 Russell보다 2년 전에 이미 Russell paradox를 찾아내어 Hilbert에게 알려주었고, 또 3년 후에 이 사실을 철학자 Husserl과 함께 논의를 진행하였으나, 발표는 하지 않았다. 1900-1901년 겨울학기에 그는 집합론 강의를 처음 시작하였다. 그의 강의는 주로 Cantor의 책을 사용하였지만, Trichotomy of Cardinals를 증명된 것으로 받아들이지 않았다. 1904년 8월에 E. Schmidt와의 대담에서 정렬원리에 대한 증명을 생각해내고, 9월 24일에 증명을 완료하고 곧 Hilbert에게 보내어지고, 이는 Math. Annalen에 그 해 발표되었다([22]). 그 당시는 choice function 대신에 covering이라는 단어를 사용하였다. 논문의 결론 부분에 그는 다음과 같이 선택공리를 강조하였다.

"The preceding proof is based on the assumption that coverings γ exist in general, therefore on the principle that even for an infinite totality of [non-empty] sets there always exist mappings by which each set corresponds to one of its elements, or formally expressed, that the product of an infinite totality of sets, each of which contains at least one element, is different from the empty set. Indeed, this logical principle cannot be reduced to a still simpler one, but is used everywhere in mathematical deductions without hesitation. So for example the general validity of the theorem [Partition Principle], that the number of subsets into which a set is partitioned is less than or equal the number of its elements, cannot be demonstrated otherwise than by assigning to each subset one of its elements."

infinite choice가 가능하다는 선택공리는 당연히 많은 반대를 불러일으키게 되었다. 그 자세한 역사적인 일들은 다음으로 넘기기로 하고 그 대표적인 경우를 몇 가지만 들겠다. 우선 Borel과 Hobland는 선택공리에서부터 얻어지는 모든 결과를 부정하려 하였고, 집합론을 countable set으로 제한하려고 시도하였다. 물론 그들은 Countable Axiom of Choice는 받아들이는 입장을 택하였다. 더욱 심하게는 Baire와 Poincaré는 모든 무한집합을 potential infinite로 받아들이려는 입장까지 택하였다.

Zermelo의 증명에 대하여, Hadamard, Hausdorff, Keyser는 받아들이는 입장을 택한 반면에, Hardy 와 Poincaré는 선택공리는 받아들이지만, 그 증명은 받아들이지 않는 입장을 택하였다. Borel은 선택공리와 정렬원리가 서로 동치인 것은 -증명은 뒤에 되었지만- 받아들였고, Baire, Lesbesgue, Hobson, Peano는 선택공리를 철저히 반대하였다.

한편 선택공리와 정렬원리를 받아들이는 입장을 택하는 쪽에서는 이들을 이용하여 많은 결과를 얻어내었다. Sierpinski를 중심으로 하는 Polish school과 Hamel basis, Vitali의 non-measurable set의 구성, Hausdorff의 집합론의 결과들은 모두 선택공리와 정렬원리를 이용하였기 때문에 얻어진 것들이다. 또 Russell은 선택공리로부터 얻어지는 새로운 결과보다는 지금까지 얻어진 집합론의 결과들이 얼마나 많이 선택공리를 이용하여야 하는가에

더욱 관심을 두었다. 그 과정에서 그는 2.3 의 Dedekind가 정의한 유한집합이 2.2 에서 정의된 유한집합이라는 사실과 모든 무한집합은 countably infinite set을 포함한다는 사실이 모두 선택공리에 의하여 증명이 됨을 보이고, 또 infinitely many cardinal의 합과 곱을 정의하는 데에도 역시 선택공리가 필요함을 밝혀 내었다. 또 두 원소로 이루어진 countable infinite family의 합집합이 countable이라는 명제도 선택공리 없이는 증명이 불가능함을 보였다.

현행 대학 교과과정에서 집합론과 고등해석학을 같은 시기에 가르치고 있는 경우가 많다. 따라서 중요한 기본정리들의 증명에 선택공리를 써야만 하는데도 이들에 대한 언급이 없이 19세기 수학자들이 그랬듯이 infinite process-infinite choice-를 시행할 수 있는 것처럼 강의를 하고 있는 실정이다. 그러나, 선택공리가 정의되지 않은 상태라 하더라도, 이러한 infinite process에 대한 문제점을 계속하여 상기시키면서 강의를 하는 것이 바람직하다.

참 고 문 헌

1. B. Banaschewski, The power of the ultrafilter theorem, J. London Math. Soc. 27(1983), 193-202.
2. B. Banaschewski, Another look at the localic Tychonoff Theorem, Comm. Math. Univ. Carolinae 29(1988), 647-656.
3. B. Banaschewski, Supercompactness, products and the Axiom of Choice, Kyungpook Math. J. 33(1993), 111-114.
4. B. Banaschewski, A new proof that "Krull implies Zorn", Math. Logic Quart. 40(1994), 478-480.
5. J. L. Bell, On the strength of the Sikorski Extension Theorem for Boolean algebras, J. Symb. Logic, 48(1988), 841-846.
6. R. Bettazzi, Sui punti di discontinuita delle funzioni di variable reale, Cir. Math. Palermo, Rendi. 6(1892), 173-195.
7. G. Cantor, Sur divers théorèmes de la théorie des ensembles de points situés dans un espace continu à n dimensions, premiere communication, Acta Math. 2(1883), 409-414.
8. G. Cantor, Über unendliche, lineare Punktmannichfatigkeiten VI, Math. Annal. 23(1894), 453-488.
9. P. J. Cohen, Set Theory and the Continuum Hypothesis, Benjamin, New York, 1966.
10. S. Feferman and A. Levy, Independence Results in Set Theory by Cohen's Method II, Notices, Amer. Math. Soc. 10(1963), 593.
11. J. D. Halpern, The independence of the axiom of choice from the Boolean prime ideal theorem, Fund. Math. 55(1964), 57-66.
12. J. D. Halpern and A. Levy, The Boolean prime ideal theorem does not imply the

axiom of choice, Proc. of Symposium Pure Math. of the Amer. Math. Soc. 13(1971), Part I, 83-134.
13. F. Hartogs, Über das Problem der Wohlordnung, Math. Annal. 76(1915), 436-443.
14. H. Herrlich, Compactness and the Axiom of Choice, Appl. Categorical Structures, 4(1966), 1-14.
15. M. Jaegermann, The Axiom of Choice and two definitions of continuity, Bull. Acad. Polonaise Sci. Ser. Math. Astron. Phys. 13(1963), 699-704.
16. T. J. Jech, The Axiom of Choice, North-Holland, Amsterdam, 1973
17. T. J. Jech and A. Sochor, Applications of the θ-Model, Bull Acad. Polonaise Sci. Ser. Math. Astron. Phys. 14(1966), 351-355.
18. P. T. Johnstone, Stone Spaces, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1982.
19. W. Krull, Die Idealtheorie in Ringen ohne Endlichkeitsbedingungen, Math. Annal. 101(1929), 729-744.
20. G. H. Moore, Zermelo's Axiom of Choice, Springer-Verlag, New York, 1982.
21. G. Peano, Démonstration de l'intégrabilite des équations différentielles ordinaires, Math. Annal. 37(1890), 182-228.
22. E. Zermelo, Beweis, dass jede Menge wohlgeordnet werden kann (Aus einem an Herrn Hilbert gerichteten Briefe), Math. Annal. 59(1904), 139-141.

◆ 기호의 역사 (무한대 ∞) ◆

무한대를 표시하는 기호 ∞는 원래 로마숫자 일억을 나타내는 것이었다. 1655년 영국의 수학자이자 고전학자인 존 월리스(John Wallis 1616~1703)가 처음으로 무한대 기호로 사용했다.

Q : 선택의 공리와 동등한 노란 것은 무엇인가?

A : 조른의 레몬 (Zorn's Lemon.)