Historia Mathematica Vol. 9. No. 2, (1996), 1 - 9.

Zermelo 이후의 선택공리

서강대학교 수학과 **홍 성 사**
숙명여자대학교 수학과 **홍 영 희**

요 약

This paper is a sequel to [26]. We investigate how the Axiom of Choice has been accepted after Zermelo introduced the Axiom in 1904. The response to the Axiom has divided into two groups of mathematicians, namely idealists and empiricists. We also investigate how the Zorn's lemma (1935) has been emerged. It was originally formulated by Hausdorff in 1909 and then by many other mathematicians independently.

1991 Mathematical Subject Classification - 0102, 01A60, 04A25

1. 서 문

1904년 Zermelo가 선택공리를 도입하여 정렬원리를 증명한 후 선택공리에 대한 반응은 여러 가지 형태로 나타났다. 선택공리가 도입되기 이전의 집합론은 말할 것도 없이 대수학, 해석학 등 모든 분야의 기본적인 여러 정리에서 선택공리가 필수적임은 [26]에 기술하였다.

1904년 이후에 선택공리가 받아들여지는 과정을 보다 자세히 조사하여 새로운 개념에 대한 수학자들의 태도와 또 선택공리와 동치인 명제들의 생성과정을 통하여 선택공리의 발전 과정을 정리하고자 한다.

2절에서는 선택공리를 거부하는 수학자들과 지지하는 수학자들로 나누어 그들의 논조를 기술한다.

3절에서는 현재 가장 자주 이용되는 선택공리와 동치인 Zorn's Lemma의 생성과정을 기술하여 같은 명제에 대한 수학자들의 태도가 크게 다를 수 있음을 알아본다.

2. Zermelo 이후의 선택공리

모든 분야에서 그렇듯이, 수학자들도 경험주의자(empiricist)와 이상주의자(idealist)로 대별된다. 전자는 constructive mathematician 혹은 pragmatist, 후자는 Platonist 혹은 Cantorian으로 분류되기도 한다. 위의 분류는 무한에 대한 관점의 차이로 생기는 것이므로, 그들이 어떤 부류에 속하느냐에 따라서 Infinite process를 포함하고 있는 선택공리에 대한 반응은 달라 질 수밖에 없다.

경험주의자들의 선택공리에 대한 반박은 Baire, Borel, Lebesgue, Poincaré, Hardy, Jourdain, Peano, Brouwer등 여러 나라의 수학자들이 강력하게 시도하였다. 그들은 1904년 Zermelo의 "선택공리 ⇒ 정렬원리"의 증명에서 주어진 집합을 정렬집합으로 만드는 순서의 유일성이 없다는 점과, 증명 과정이 Burali-Forti paradox를 얻어내는 과정과 같음을 지적하였다. 또 그들은 자신들의 결과를 얻어내기 위하여 의식적이든 무의식적이든 infinite choice를 사용하면서도, Zermelo의 선택공리를 받아들이지 않았다. 또 선택공리에 대한 관심이 증대됨으로 자신들의 결과에 오류가 존재하는 것이 밝혀지거나 혹은 중요한 재정리가 필요하게 되어 더욱 선택공리를 거세게 반박하려고 하였다.

이에 반하여 선택공리의 가장 강력한 지지자는 Hadamard였다. 그는 여러 가지 경로를 통하여 선택공리를 받아들일 수밖에 없음을 역설하였다. Lebesgue은 처음 모든 유계인 실수의 부분집합은 measurable이라 생각하고 그의 적분론을 구성하여 이를 증명하려고 노력하였다. 그러나 1905년 선택공리를 이용하여 Vitali는 non-measurable set을 구성하였다 ([22]). 이 후 선택공리를 부정적으로 받아들였던 Poincaré는 그의 태도를 바꾸었다. 1906년 Hadamard의 제자인 Fréchet는 그의 학위논문([7])에서 거리공간과 수열의 극한으로 위상적 (해석적) 구조를 밝힐 수 있는 sequential space를 도입하여 위상공간의 추상화의 시초를 열었다. 그는 이 논문에서 수열을 주로 다루었으므로 그가 사용한 선택공리는 당연히 가산 선택공리 (Axiom of Countable Choice)였다. 그러나 그의 지도교수가 선택공리의 강력한 지지자였음에도 불구하고, Fréchet는 그의 논문에서 Zermelo의 선택공리나 1904년의 논문에 대한 언급은 전혀 하지 않았다. 여기에서 해석학분야의 선택공리에 대한 태도를 읽을 수 있는 반면, 그의 시도로 위상수학분야에서 선택공리에 대한 태도의 변화가 시작되었다고 할 수 있다. 위상수학에서 선택공리의 필요성은 주로 Sierpinski를 주축으로 하는 Polish School에서 먼저 강조되었다. 그들은 기존정리들에서 선택공리가 필요한 경우를 찾아내려고 노력하여 선택공리를 받아들일 수밖에 없음을 보였다.

1913년 Italy의 수학자 Cipolla는 다음 정리들을 증명하는데 선택공리가 필수적임을 처음 밝혔다 ([6]). 앞으로 $\mathbb{R}$은 실수전체의 집합에 보통 위상이 주어진 위상공간을 나타내기로 한다.

2.1 $\mathbb{R}$의 부분집합의 limit point와 sequential limit point는 서로 동치이다.

함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$가 x에 수렴하는 모든 수열 (x_n)에 대하여 $(f(x_n))$은 $f(x)$로 수렴할 때 f는 x에서 sequentially continuous라고 한다.

2.2 함수 f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$의 연속성과 sequential 연속성은 서로 동치이다.

Cipolla는 위의 사실의 증명에서 수열을 선택하여야 하므로, 이를 피하기 위한 노력으로 집합들로 이루어진 수열의 수렴을 정의하여 연속성을 characterize하였다. 이는 후에 Bourbaki - Cartan - 에 의하여 도입된 filter의 수렴으로 위상적구조가 characterize된다는 사실의 시초가 되었지만, 그 당시 수학자들에게는 큰 반응을 얻지 못하였다.
또 1905년 Hamel이 선택공리를 이용하여, 다음을 증명하였다 ([8]).

2.3 유리수체 $\mathbb{Q}$ 위에서 실수전체의 vector space $\mathbb{R}$은 base를 가진다.

그 후 1932년에 Hausdorff는 모든 vector space가 오늘날 Hamel base라고 부르는 base를 갖는다는 것을 보이고 ([11]), Hausdorff의 정리에 영향을 받아서 Teichmüller는 모든 Hilbert space는 orthonormal base를 가진다는 사실을 증명하였다 ([21]). 이 후 대수학분야에서 선택공리를 이용하여 여러 가지 중요한 정리를 증명하였다.

2.4 (Steinitz, 1910) 임의의 체(field) F는 unique algebraic closure를 갖는다 ([18]).

2.5 (Krull, 1929) 가환환의 proper ideal은 maximal ideal에 포함된다 ([12]).

Boolean algebra는 명백히 가환환인데 Stone은 1936년 Krull의 결과를 인용하지 않고 독자적으로 다음정리를 증명하였다 ([19]).

2.6 (Boolean Ultrafilter Theorem) 모든 non-trivial Boolean algebra는 ultrafilter (= prime filter)를 가진다

이를 이용하여, 모든 Boolean algebra는 두 점으로 이루어진 chain {0, 1}의 product의 subalgebra로 characterize하였다. 실제로 Boolean Ultrafilter Theorem은 다음 정리와 동치이다.

2.7 (Prime Ideal Theorem) 모든 non-trivial distributive lattice 는 prime ideal을 가진다.

이는 모든 distributive lattice도 chain {0, 1}의 product의 subalgebra가 된다는 사실과 동치이다 ([2]).

한편 Russell의 선택공리에 대한 태도는 다른 수학자들과 다른 점이 있었다. 그는 선택공리를 의심하면서도, 선택공리에 의하여 얻어지는 결과들에 대하여 관심을 가졌다.

Dedekind는 무한집합을 1 - 1이지만 onto가 아닌 함수 f : X → X 가 존재하는 집합 X로 정의하고, 무한집합이 아닌 집합을 유한집합으로 정의하였다. 즉 1 - 1 함수 f : X → X가 onto인 X로 유한집합을 정의하였다. 편의상 이들을 Dedekind 유한집합이라 부르고, 이에 반하여, 공집합이거나, 자연수 k 가 존재하여 집합 $N_k = \{1, 2, 3, \ldots, k\}$와 equipotent인 집합을 유한집합으로 정의하자.

Russell은 1906년 선택공리를 써서 다음사실을 증명하였다 ([16]).

2.8 Dedekind 유한집합은 유한집합이다.

2.9 서로 disjoint인 집합족 $(A_i)_{i \in I}$, $(B_i)_{i \in I}$에 대하여, 모든 i 에 대하여 A_i와 B_i가 equipotent 이면, $\cup\{A_i : i \in I\}$와 $\cup\{B_i : i \in I\}$도 equipotent이다.

2.10 서로 disjoint이고 공집합이 아닌 집합으로 이루어진 집합족 $\{A_i : i \in I\}$의 선택함수는 존재한다. (Multiplicative Axiom)

또 Russell은 1910년에 선택공리와 다음 두 사실은 각각 동치임을 보였다 ([17]).

2.11 집합 K와 관계 (relation) R에 대하여, $\mathrm{dom}(R) \supseteq K$ 이면, $\mathrm{dom}(f) = K$ 이고 $R \supseteq f$ 인 함수 f가 존재한다.

2.12 집합 K와 $K \subseteq \mathrm{rng}(f)$ 인 함수 f에 대하여, $g \subseteq f$, $\mathrm{rng}(g) = K$ 인 1 - 1 함수 g가 존재한다.

1941년 Bernays가 ([1]) 독자적으로 위의 **2.11**은 선택공리와 동치명제라는 사실을 말할 때까지 아무도 언급을 하지 않았으며, 많은 저자들은 명제 **2.11**을 Bernays의 결과로만 알고 있다. 그 이유는 선택공리의 진위에 대하여만 집착하고 있던 시기에 Russell이 이 사실을 밝혀서 다른 수학자들의 관심밖에 있었기 때문이다.

다음절에 다시 언급하겠지만, Hausdorff는 선택공리에 대하여 경험주의자들과는 매우 다른 태도를 보였다. 일반적으로 정렬집합을 구성하기 위하여, 집합의 원소를 차례로 늘어놓겠다는 생각은 당연히 시간적으로 불가능하다는 사실을 인지하고 실제로 불가능한 계속적인 선택의 행위를 선택공리에 의하여 주어진 집합족의 각 집합에서 한꺼번에 선택함 (simultaneous choice) 으로 시간과 관계없이 infinite process를 가능하게 하였다고 믿었다. Zermelo도 같은 생각으로 그의 선택공리를 다음과 같이 나타내었다 .

2.13 집합 X의 분할 (partition) $\mathscr{S}$에 대하여 $\mathscr{S}$의 모든 원소 A에 대하여 $S \cap A$ 가 singleton set이 되는 X의 부분집합 S가 존재한다.

Zermelo는 그의 선택공리에 대한 반대의 반박으로 1908년 두 논문을 발표하였다. 그 하나는 선택공리의 효용성에 대한 것이고 ([23]), 또 하나는 집합론의 공리계에 관한 것이다 ([24]).

첫 번째 논문에서, 위의 정리 **2.3, 2.8, 2.9, 2.10**을 언급하고 그 밖에 다음을 들었다.

2.14 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 가 $f(x + y) = f(x) + f(y)$ $(x, y \in \mathbb{R})$ 이면서, 불연속인 f 가 존재한다 (see also [8]).

2.15 가산집합의 가산개의 합집합은 가산집합이다.

2.16 집합 X의 분할 $\mathscr{C}$에 대하여, $|\mathscr{C}| \le |X|$ 이다 ($|X|$는 X의 cardinal number).

그는 이 논문에서 Russell의 **2.8 - 2.10**의 결과를 인용하지 않고 독자적으로 증명하였다. 또 Russell의 paradox를 피하기보다는 그의 선택공리를 주장하기 위하여 집합론에 대한 공리계를 만들었다고 보아야 한다. 그의 공리계에 대한 수학자들의 태도는 비교적 냉담하였다.

따라서 그런 노력에도 불구하고 선택공리에 대한 논쟁은 그후도 계속되었다. Sierpinski 로부터 시작된 Polish school의 노력이 있을 때까지 선택공리는 거부 아니면 무시당하는 상태가 계속되었다.

위에서 언급한 몇 가지 사실들과 1915년 Hartogs가 ([9]) 선택공리와 Trichotomy of Cardinal Numbers 가 동치라는 사실을 증명한 것 이외에는 선택공리에 대한 관심을 불러일으킬 사건이 별로 없었다. 1920년대에 Polish school의 여러 결과들은 결국 선택공리를 받아들이는 방향으로 옮겨가게 하였다. Polish school의 업적에 대한 논의는 다음 기회로 넘긴다.

3. Zorn's Lemma

선택공리와 동치인 명제 중에서 가장 이용하기 쉽고 또 많이 사용되는 것이 Zorn's lemma 이다. 이 절에서는 Zorn's lemma가 형성되는 과정을 통하여 20세기 초반 선택공리에 대한 수학자들의 반응을 알아보고자 한다. 또 이해를 돕기 위하여 아래 기술하는 명제들은 그 당시의 명제보다 오늘날 우리가 쓰고 있는 용어를 사용하여 나타내기로 한다.

Zorn's Lemma의 시초는 1909년 Hausdorff에 의하여 다음명제로 나타난다 ([10]).

3.1 $\mathscr{F}$를 집합 X의 부분집합의 집합족이라 하자. $\mathscr{F}$의 모든 정렬 부분집합족 $\mathscr{F}'$이 $\mathscr{F}$에서 상계(upper bound)를 가지면 $\mathscr{F}$는 극대원 (maximal element)을 갖는다.

3.2 $\mathscr{F}$를 집합 X의 부분집합의 집합족이라 하자. $\mathscr{F}$의 모든 정렬 부분집합족 $\mathscr{F}'$이 $\mathscr{F}$에서 하계(lower bound)를 가지면 $\mathscr{F}$는 극소원 (minimal element)을 갖는다.

그는 **3.1, 3.2**를 공리로 받아들이지 않고 정리로 받아들였으며, 그가 1914년 출판한 집합론 Grundzüge der Mengenlehre에는 이들을 포함시키지 않았지만 Hausdorff Maximality Principle은 포함시켰다. 이들의 증명은 선택공리를 사용하기보다 집합족을 정렬집합을 첨자집합으로 갖는 집합족으로 나타내고 그들의 순서관계도 첨자집합의 순서에 의하여 결정되고 transfinite induction을 이용하여 증명하고, 이를 이용하여 여러 정리들을 증명하였다.

한편 Warsaw school의 구성원이었던 Kuratowski는 1922년에 다음 명제를 발표하였다 ([13]).

3.3 $\mathcal{F}$를 집합 X의 부분집합으로 이루어진 공집합이 아닌 집합족이라 하자. $\mathcal{F}$의 모든 공집합이 아닌 정렬 부분집합족 $\mathcal{F}'$에 대하여, $\cup\mathcal{F}'$ 이 $\mathcal{F}$에 속하면, $\mathcal{F}$는 극대원을 갖는다.

3.4 $\mathcal{F}$를 집합 X의 부분집합으로 이루어진 공집합이 아닌 집합족이라 하자. $\mathcal{F}$의 모든 공집합이 아닌 정렬 부분집합족 $\mathcal{F}'$에 대하여, $\cap\mathcal{F}'$ 이 $\mathcal{F}$에 속하면, $\mathcal{F}$는 극소원을 갖는다.

Hausdorff와 달리 Kuratowski는 위의 **3.3, 3.4**를 선택공리를 사용하여 증명하고, transfinite ordinal을 사용하지 않음을 강조하였다. 그 후 1930년에 Szpilrajn (그는 이차대전 이후에 그의 성을 Marczewski로 바꾸었다) 은 Kuratowski의 결과를 이용하여 Order Extension Principle - if a relation S partially orders a set E, then S can be extended to a relation which orders E - 을 증명하였다 ([20]). 이 논문에서 그는 Hausdorff의 **3.1, 3.2**를 언급하였다.

3.5 1928년 Bochner가 **3.1**의 명제에서 순서구조를 포함관계가 아닌 임의의 반순서 집합족 $\mathcal{F}$에 대하여 **3.1**과 같은 가정 하에 극대원의 존재성을 증명하고, 이를 "set-theoretic lemma" 라고 하였다 ([3]). Bochner는 1909년의 결과는 인용하지 않고, Grundzüge der Mengenlehre를 인용하고 그 역시 Hausdorff와 같이 transfinite induction을 이용하여 증명하였다.

1932년 미국의 위상수학자 Moore는 그의 위상수학 책에 선택공리를 이용하여 다음을 증명하였다 ([15]).

3.6 $\mathcal{F}$를 집합 X의 부분집합으로 이루어진 공집합이 아닌 집합족이라 하자. $\mathcal{F}$의 모든 공집합이 아닌 전순서 (totally ordered) 부분집합족 $\mathcal{F}'$이 $\mathcal{F}$에서 하계를 가지면, $\mathcal{F}$는 극소원을 갖는다.

1933년 Zorn은 Hamburg에서 다음 명제를 위의 여러 정리를 알지 못한 채 구상해 내고, 후에 이를 Maximum Principle이라 불렀다.

3.7 $\mathcal{F}$를 집합 X의 부분집합으로 이루어진 집합족이라 하자. $\mathcal{F}$의 모든 전순서 (totally ordered) 부분집합족 $\mathcal{F}'$에 대하여 $\cup\mathcal{F}'$이 $\mathcal{F}$에 속하면, $\mathcal{F}$는 극대원을 갖는다.

그 당시 Chevalley와 Artin은 Zorn의 명제의 효용성을 인지하고, 이를 이용하여 여러 정리를 증명하였다. 또 1934년 Artin은 "**3.7** ⇒ 선택공리"를 증명함으로 **3.7**과 선택공리가 동치임을 밝혔다. Zorn은 **3.7**을 정리라고 생각하기보다는 공리로 받아들여, Maximum Principle로 생각한 최초의 수학자이다. 그는 1934년 10월 New York에서 열렸던 American Mathematical Society에서 이를 발표하고 Lefschetz의 권유로 1935년 [25]에 이를 발표하였다. 그 후 대수학과 위상수학에서 정렬원리나 Transfinite induction을 쓰는 대신에 Zorn's Lemma를 통하여 여러 정리들을 재정리하였고, 또 많은 새로운 정리를 만들어 낸 것은 주

지의 사실이다.

Chevalley에 의하여 Bourbaki학파에게 3.7이 전하여진 후 그들은 오늘날 Zorn's Lemma로 알려진 다음 명제를 만들어 내었다 ([4]).

3.8 E를 반순서 집합이라 하자. E의 모든 전순서 부분집합이 상계를 가지면 E는 극대원을 가진다.

4. 결 론

Cantor에 의하여 집합론 - 무한론 - 이 구성된 후 무한에 대한 관심이 다시 수학의 중요한 분야로 대두되었다. 실제로 Dedekind에 의한 유한과 무한의 재정의로 그 당시까지 유한은 우리가 접근할 수 있는 것처럼 생각하던 것까지 그렇지 않음을 알게 되어 무한론과 유한론은 같은 비중을 차지하게 되었다.

인간의 사고는 항상 유한한 인간의 실체에도 불구하고 무한을 해결하려는 노력으로 이어져 왔다. 그 과정에서 언제나 수학은 무한에 가장 접근한 분야로 알려졌었다. 그러나 Cantor, Dedekind 등의 결과로 19세기 수학은 재정리되어, finite process와 infinite process가 엄격히 구별되어야 함을 알게 되었다. 그 중의 한 예가 정렬원리이다. 실제로는 불가능하지만, 모든 유한집합은 그 원소를 차례로 늘어놓음으로 정렬집합이 되고, 자연수 전체의 순서집합 N은 Peano Axiom에 의하여 정렬집합이 된다. 실제로 Peano Axiom의 Finite Induction Principle과 N이 정렬집합이라는 사실은 서로 동치이다. 따라서, 모든 집합이 정렬집합이 되는 순서를 갖는다는 정렬원리에 대한 관심은 당연히 강하게 일어났다. 특히, 이를 이용하여 Transfinite Induction Principle을 임의의 집합에 사용할 수 있으므로, Finite Induction Principle의 효과적인 확장을 기대할 수 있게 되었다.

그러나 유한집합에서 사용되었던 과정을 임의의 무한집합에 그대로 적용하는 일은 시간적으로 불가능하다는 것은 명백하다. 따라서 Peano가 N에 대한 공리계를 구성하여 N이 정렬집합이 됨을 증명한 것과 같이, Zermelo가 선택공리를 도입하여 정렬원리를 증명한데 대한 반응은 역시 무한에 대한 관점의 차이로 크게 대별되어 나타난다. Zermelo 이후에 점차로 선택공리는 수학에서 피할 수 없는 명제로 밝혀진다. 결국 선택공리를 통하여 우리는 무한에 대한 접근이 용이해지고, 또 이는 infinite process를 사용하는 한 피할 수 없는 사실로 되었다.

1909년 이미 Hausdorff에 의하여 Zorn's Lemma의 원형이 나타났지만 이를 Zorn과 같이 Maximum Principle로 생각한 수학자는 아무도 없었다. 이러한 사실로 미루어 보면 같은 명제에 대한 수학자들의 태도의 변화가 미치는 영향은 매우 크게 나타날 수 있음을 알 수 있다.

그러나 지금까지 선택공리를 사용하여 증명한 명제들이 선택공리보다 약한 choice principle에 의하여 증명되는 예들이 최근에 많이 발견되므로 선택공리도 신중하게 사용하여야 한다.

참고문헌

[1]. P. Bernays, A system of axiomatic set theory, Part II, *J. Symbolic Logic*, 6(1941) 1-17.

[2]. G. Birkhoff, On the combination of subalgebras, *Proc. Cambridge Phil. Soc.* 29(1933), 441-464.

[3]. S. Bochner, Fortsetzung Riemannscher Flächen, *Math. Ann.* 98(1928), 406-421.

[4]. N. Bourbaki, *Theory of Sets*, Hermann, 1967, Paris.

[5]. C. Burali-Forti, Sulle classe ben ordinate, *Circolo Math. Palermo*, Rendi. 11(1897) 111-112.

[6]. M. Cipolla, Sul postulato di Zermelo e la teoria dei limiti delle funzioni, *Atti della Academia Giooenia du Sci. Nat. in Catania*, 6(1913), 1-13.

[7]. M. Fréchet, Sur quelques points du calcul fonctionnel, Dissertation.

[8]. G. Hamel, Eine Basis aller Zahlen und die unstetigen Lösungen der Funktional -gleichung: f(x+y) = f(x) +f(y), *Math. Ann.* 60(1905), 459-462.

[9]. F. Hartogs, Über das Problem der Wohlordnung, *Math. Ann.* 76(1915), 436-443.

[10]. F. Hausdorff, Die Graduierung nach dem Endverlauf, Königlich Säch. Gesell. Wiss Math.-Phy. Klasse, 61(1909), 297-334.

[11]. F. Hausdorff, Zur Theorie der linearen metrischen Räume, *J. reine und angewandte Math.* 167(1932), 294-311.

[12]. W. Krull, Die Idealtheorie in Ringen ohne Endlichkeitsbedingungen, *Math. Ann. 101 (1929), 729-744.*

[13]. K. Kuratowski, Une méthode d'élimination des nombres transfinis des raisonnements mathématiques, *Fund. Math.* 3(1922), 76-108.

[14]. G. H. Moore, *Zermelo's Axiom of Choice*, Springer-Verlag, New York, 1982.

[15]. R. L. Moore, Foundations of Point Set Theory, Colloq. Pub., *Amer. Math. Soc.,* 1932.

[16]. B. Russell, On some difficulties in the theory of transfinite numbers and order types, *Proc. London Math. Soc.*, 2(1906), 29-53.

[17]. B. Russell and A. N. Whitehead, *Principia Mathematica* Vol. 1, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1910.

[18]. E. Steinitz, Algebraische Theorie der Körper, *J. reine und angewandte Math.* 137(1910), 167-309.

[19]. M. Stone, The theory of representations for Boolean algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.* 40(1936), 37-111.

[20]. E. Szpilrajn, Sur l'extension de l'order partiel, *Fund. Math.* 16(1930), 386-389.

[21]. O. Teichmüller, Operatoren in Wachsschen Raum, *J. reine und angewandte Math.* 174(1936), 73-124.

[22]. G. Vitali, Sul problema dell misura dei gruppi di punti di una retta (Bologna: Tip. Gamberini e Parmeggiani), 1905.

[23]. E. Zermelo, Neuer Beweiss für die Möglichkeit einer Wohlordnung, *Math. Ann.* 65 (1908), 139-141.

[24]. E. Zermelo, Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre. I, *Math. Ann.* 65(1908), 261-281.

[25]. M. Zorn, A remark on method in transfinite algebra, *Bull. Amer. Math. Soc.,* 41(1935), 667-670.

[26]. 홍성사, 홍영희, 선택공리와 19세기 수학, *Historia Math.* 9(1996), 1-11.

화가 또는 시인과 같이 수학자의 양식은 반드시 아름다워야 하며 색 또는 말과같이 생각들은 반드시 조화로운 방법으로 서로 어울려야한다. 아름다움은 제1의 시금석이다. 이 세계에 추한 수학이 차지할 수 있는 영구적인 장소는 없다. ... 수학적인 아름다움을 정의하기는 매우 어려울 수 있지만, 그것은 어떠한 종류의 아름다움을 정의할 때도 마찬가지이다. 우리는 아름다운 시가 의미하는 바를 제대로 알지 못할 수 있지만, 그것이 우리가 시를 읽을 때 아름다움을 느끼는 것을 방해하지 않는다.

- G. H. Hardy, *A Mathematician's Apology*(1940)

정확히 보면, 수학은 진실뿐만 아니라 최상의 아름다움을 갖고 있다. 이것은 조각의 아름다움과 같이 우리의 나약한 감정의 어떠한 부분에도 호소하지 않고 그림이나 음악과 같이 화려한 장식도 없지만, 최고로 순수하고 단지 최고의 예술만이 보여줄 수 있는 것과 같은 완벽성을 갖고있는 냉정하고 준엄한 아름다움이다.

- Bertrand Russell, *Mysticism and Logic*(1918)