

수학은 살아남을 것인가? Zurich 세계 대회에 대한 보고서¹⁾

V.I. Arnold

서경대학교 응용수학과 한 찬 옥

매 4년마다 세계 각지에서 수학자들이 누가 새로운 champions인지를 (Olympic 경기나 또는 shklovskii에 의해 알려진 "Hamburg 회계"서와 같이) 알아보기 위해 국제 수학자 대회에 모여든다. 1994년 8월에 대회는 Zurich에서 열렸다.(이것은 대회가 거기에서 세 번째로 열리는 셈이다; 최초의 대회는 1887년 Zurich에서 열렸다. 대회는 순차가 매겨 지지 않는다. 왜냐하면 과거의 어느 대회들이 포함되어야 되는가에 대해 모든 사람이 일치하지는 않기 때문이다.

대회가 열리기 전 수년간에 엄선된 국제 Program위원회(위원들의 이름은 대회가 개최될 때까지는 비밀이다.)가 초대 연사를 고른다. 본래의 초대 연설은 1시간짜리의 plenary talk가 16, 45분짜리의 분과 talk가 156개 였다. 19개의 분과가 (수리논리, 대수, 정수론 등 수학과 수학교육까지)있고 talk는 여러 홀에서 동시에 주어졌다. 매일 6 talk를 경청할 수 있다. 대회에서 초대 연설은 대단한 영예로 간주된다. 그것은 매우 경직된 (strained) 세계 직업 시장에서 수학자의 경력을 위해서는 매우 중요할 수도 (불

V.I. Arnold



Tolstoy를 소개하는 올바른길은 단지 "Anna karenina" 라고 말하는 것이라고 한 Vladimir Nabokov를 따른다면, V. I. Arnold 는 ABC, ADE, KAM, Liouville tori, Hilbert 의 13번째와 16번째 문제를 언급하면 되겠다..... 그리고는 Lobachevskii 삼각형들이 "Strange Duality" 가 있는데, 현재는 거울대칭이라고 불리는 것의 최초의 출현(1974)일 것이다. 평면곡선과 wave fronts에 대한 그의 최근의 소식들을 알려면, Advances in Soviet Mathematics의 21번째 Volume(AMS,1994)와 University Lecture Series의 5번째 Volume(AMS,1994)를 보라.

1) 이하의 글은 Russia steklov 수학 연구소의 V.I. Arnold가 The Mathematical Intelligencer Vol. 17, No. 3, 1995에 실은 글을 번역한 것이다.

행히도?)있다.

올해는 16명의 plenary speaker중 3명이 러시아 학파였다. (1990년 교토에서는 15명중 4명이었다.) 156명의 분과 연설자중 14명이 러시아 수학자였다. (교토에서는 159명중 19명이었다.)러시아 수학자라고 얘기할 때 나는 현재 어디에 고용되어 있는지는 고려하지 않았다. 왜 우리의 입지가 4년사이에 14%에서 9%로- 즉, 1/3나 - 떨어졌는지를 해명하여야만 한다.

대회에서는 Fields medal의 영예를 안은 사람들의 이름이 호명되었다. : J.Bourgain (France 와 USA), E.Zelmanov (Russia 와 USA) J.-C. Yoccoz (France). P.-L. Lions(France). 이 메달은 나이가 많아야 40인 수학자들에게 수여되는데, 종종 Nobel 상에 비교된다(수학에 대한 Nobel상은 없다.). 비교는 잘못된 것이다. Nobel상과는 달리, Fields medals은 진짜로 뛰어난 많은 사람들을 지나쳐 버린다, 특히나 Russia인들은. 3개의 메달을 한꺼번에 프랑스 수학계의 대표들에게 준다는 것은, 더욱이 그들 셋 모두가 부등식 조작의 기술로 유명한 사람들인데, 프랑스 수학의 국제적 위신에 도움이 안된다. 국제 수학 Union (Fields 위원회를 지명하는 조직) 의 회장이 잘 알려진 프랑스 해석학자인 시점에서는 특히 그렇다.

이 두상황사이에 인과적 관계를 단언하기는 어렵다. 그렇다면 전혀 있을 법하지 않은 정도의 부패가 있다고 하는 것이 되니까. Nobel 위원회는 Fields위원회보다 훨씬 광범위한 분야의 전문가들 의견을 듣고, 대체로 위에서 지적된 종류의 (비록 근거없는 것일지라도)의심을 받을 여지를 남겨놓지 않는다. (대회에서 많은 나라들과 전문 분야의 너무 많은 참가자들로부터 그런 의구가 표현되지 않았나 생각된다).

올해는 대회에서 많은 이들이 medalist 3인들의 이름을 듣고는 “그가 누구지?” 라고 반응했다. 자 Plutarch에 따르면 젊은이에게는 메달은 보상이 아니고 장래의 성취를 위한 예금 계좌이다. 올해의 수상자들이 투자를 정당화시켜 주는 성취를 이루기를 바라자.

초대연사들중 10명의 여자가 있었다. 이들중 - 특별 영예인데 - 개회중 Plenary talk도 있었고(M.Ratner, “Interaction between ergodic theory, Lie groups ,and number theory”) 폐회의 Plenary talks도 있었다.(I.Daubechies, “Wavelets and other methods of localization in phase space”). 정규 Program이외에도 여성 수학자에 의한 특별 “Emmy Noether Lecture” 가 있었다. 이것은 러시아 학술원 회원 O.A. Ladyzhenskaya (St. Petersburg)에 의해 강연되었다.

대회 직전에 Lucerne 에서 열린 국제 수학Union(수학자들의 UN과 같은 것인데), 총회에 서, 미국 대표가 초대연사들중에서 '여성들의 대표를 증가시키고 인종간의 균형은 맞추자고 제안했지만 이 제안은 총회에 의해서 여자와 인종에 대한 숨겨진 모독이라고 해서 기각되었다. 한 총회의 대표자는 다음과 같이 말했다. “그들의 보통의 관례에 어긋나게, 미국인들이 性的 소수자들(즉 homosexuals, 또는 성도착자들)에 대해 언급이 없는 것은 이상하다”

총회는 Program위원회의 위원들이 지명되었을 때는 그것을 공개한다는 결의문을 채택했다(그래서 이 사람이 (많은 그룹으로부터) 영향을 받도록), 개도국의 대표자들은 Program Committee의 분과 위원회의 모든 고려 사항이 공개되었으면 하고 바랐다. 확립된 수학적 전통이 없는 나라들은 총회에서 수학자들보다는 정치가들에 의해 대표되는 경향이 있다. 총회의 결의는 세계 수학계에 심각한 결과를 가져올 진짜 위협을 내포한다.

열번째로 최고인 사람, 그는 초대될 것이고, 그리고 열한번째로 최고인 사람, 그는 초대받지 않을 것인데, 의 차이는 매우 작은 것이다.

각 분과의 소위원회(“Panel”)은 그 분야에서 가장 활동적인 20명 내외의 사람(전 대회들에서 초청 연설은 하지 않았던)들 중에서 10명 내외의 사람을 지명하기로 되어 있다. 열번째 최고인 사람, 그는 초대될 것이고, 11번째 최고인 사람, 그는 안될 것인데, 간의 차이는 매우 작은 것이다. 이 차이에 대한 토의를 공개적으로 만들려는 시도는 학문 외적인 (국가들, 성, 민족등)고려 사항에 무게를 실어 줄뿐이다. Zurich congress에서의 상대적으로 적은 여성 연사들은 정상참작없이 남자들과의 공정한 경쟁에 의해 이 영예를 얻었다. 총회는 수학의 公衆的 위상에 특히 주의를 기울였다.

20 C 초에 자멸적인 민주적 원리가 수학에 (특히 Hilbert에 의해) 도입되었다. 그것에 따르면 모든 공리 체계는 분석되어질 똑같은 권리를 갖고 있고, 수학적 성취의 가치는 다른 과학에서들과 같이 그것의 중요성과 유용성에 의해서가 아니라 산타기에서 처럼 그것의 난이도에 의해서 판정된다. 이원리는 신속히 수학자들을 물리학과 결별하고 다른 모든 과학과 분리되게 하였다. 모든 정상적인 사람들의 눈에는 수학자들이 Druids와 같은 죽어 가는 종교의 불길한 성직자 카스트로 변모되어서 과학과 기술에 기생하고 Zombie와 같은 정신적 예속에 의해 수학계에 추종자(asolytes)를 모집하고 있다.

위상 수학이라는 천사와 추상 대수라는 악마가 영혼을 놓고 싸운다

Fernat의 문제라든가 소수함에 관한 문제와 같은 기묘한 질문들이 수학의 중심문제로 올려졌다.(“왜 소수들을 더하지” 위대한 물리학자 Lev Landau가 의아해 했다. “소수들은 곱하기 위해서이지, 더하기 위해서 만든게 아니잖아!”) 불행히도, 수학자들 자신이 자신의 학문의 이런 이미지를 심는데 한 몫을 했다, 특히 수학을 모르는 자에게는 접근 불가능이란 신화를.

Hermann Weyl은, 우리 시대에 가장 위대한 수학자중의 하나인데 (그는 지나가는 말이지만 Zurich에서 근무했다), 다음과 같이 말했다. “오늘날에는 위상 수학이라는 천사와 추상 대수라는 악마가 각 개별적인 수학 영역의 영혼을 놓고 싸운다”

20C 전반부에는 악마가 이기고 있었다. 특별한 “공리적- bourbakist”의 수학전개 방식이 수학을 완전히 순수하게 만들기 위해 발명되었다. 예를 들면 ,곱의 값이 인수들의 순서에 영향을 받지 않는다고 말한다고 하자. 우리가 원하면 “열의 합에 대한 규칙”을 써서 곱셈을 정의 할 수 있다. 답이 곱의 순서와 무관하다는 것이 곱셈연산의 내용에 대해 전혀 아는 것이 없어도 순전히 형식상으로 이 규칙중의 하나에서 연역될 수 있다. 이 형식적 증명이 수학을 Bourbaki적으로 만들려는 자와 대수화할려는 자들에 의해 학생들에게 요구되고 있다.

만일 우리가 합의 개념의 내용을 모른다면 -만일 우리가 처음에 사과나 조약돌 또는 (Mayakovskii와 함께) 담배꽂초나 자동차들을 세어보지 않았다면 분명히 우리는 형식적 증명을 이해하지 못할 것이다. 그것은 마음의 분명한 대수적 전도를 경험한 사람들에게만 확실한 것이고, 가르치고 응용하는 데는 無用이다.수학교육에 대한 이 전도의 심각한 결과는 잘 알려져 있다. 수학자 전세대가 수학의 다른 스타일에 대해 -그리고 물론, 다른 과학에 대해서도 전혀 알지 못하면서 성장했다. 학교에서의 굴욕적 경험을 양값음할려고, 대부분 나라의 지도자들은, 격언에 나오는 자작나무 아래의 돼지처럼, 수학의 절멸을 계획하고 실행에 옮겼다. 미국의 자료에 따르면, 이 과정은 10 - 15년은 지속될 것이다.

그들의 논리는 단순하다. 영국은 Newton이 미적분학을 발명했다고 해서 얻은 것이 아무 것도 없다; 또는 독일은 Leibniz가 전 세계가 쓰는 기호는 만들어 냈다고 해서; 또는 France는 Poincare가 현대 수학(위상 수학과 dynamical systems), 그것은 말하자면 radio에 필수적인데, 을 창조했다고 해서. 서로 다른 국가들의 이기적 계산이 그들로 하여금 인문학 전체 (특히 수학)에 의해 필요로 되는 근본적 연구를, 군사적 대결이 끝나자 마자, 폐기하게끔 (scrap)하였다; star wars가 없으면, supercollider도 없고 수학도 없다. 지난 수십년간에 걸쳐서 곳곳에서 보인, 현대 수학의 자연과학의 주류에의 복귀는 수학과 수학자들에 대한 “거리의 사람들”의 개념에는 반영되지 않고 있다.

순수 수학과 응용 수학간의 학문적 구분은 없다. 단지 사회적 구분이 있을 뿐이다.

그것은 “순수”수학과 “응용”수학에 대해서도 마찬가지이다. 그것에 대해서는, 순수 수학과 응용 수학간의 구별은 과학적이라기 보다는 사회적인 것이다. 만일 정수론자가 Fermat의 문제를 풀라고 돈을 받았다면 정수론은 응용 분야가 된 것이다. -Galois 체이론과 유한체 위에서의 곡선의 이론과 같이, 그런데 거기서는 연구가 암호학의 목적들 때문에 CIA, KGB 또는 비슷한 조직들에 의해 기금이 나오고 있다.

Columbus는 그가 항해를 시작할 때는 응용수학자의 입장에 있었다. 그는 특정 문제를 풀라고, 즉 인도로 가는 길을 발견하라고 돈을 받았다. 신세계의 발견은, 그러나 점 더 순수 수학에 유사했다. 연안 항해가 Columbus의 무이운의 항해들보다 훨씬 더 많은 단기 혜택을 Spain 경제에 가져왔다. 수학의 현대적 응용들은 “Computer 과학”과 Computer의 응용들까지 포함해서 전 세대들의 “순수”수학에 의해 축적된 예비금에서 인출한다. 지리학과는 대조적으로, Columbus의 발견들에 필적하는 발견들이 여전히 가능하고 -그리고 매년 발생한다. 일반인들에게 이 발견들을 설명하는 것은, 확실히 쉽지 않다. Princeton의 수학자 John Conway가 이 문제에 대해 말하려고 Zurich의 대회장 건물에 3000의 관중들 앞에 오는 것을 보라. 그는 밝게 비춰진 강단위에 짧은 바지 차림에, sandal을 신고, 스포츠용 잠바를 입고 나타난다. “아무도, 그는 얘기한다, 보통의 3차원 공간을 가능한 한 뻑뻑하게 똑같은 공들로써 어떻게 채워야 하는지를 모른다. 최선의 방법은 공들을 줄들과 총들로, 내가 당신들한테 지금 보여주는 방법으로 놓는 것이라고 생각되고 있다”. 강연자는 그의 스포츠용 잠바의 주머니에서 손수건처럼 완전히 구겨진 어떤 것을 꺼낸다. 이것은 금방 펴지고 어린 아기

의 머리만한 크기의 파란 공이 되는 Plastic의 일종이었다. “그것 다음에 몇 개의 공을 더 놓자” 라고 Conway가 말하고는 같은 주머니에서 약 열 개 이상을 꺼낸다. 그는 테이블 위에 그것들을 서로 붙게 놓아서 정삼각형들의 격자를 형성하게 한다. “자”, 강연자가 얘기한다. “꼭대기에 다른 층을 쌓자” -라고. 그리고는 스포츠 잠바의 다른 주머니에서 빨간 공들이 되는 것들을 낚아 올린다. 세 번째 층(녹색공들로 이루어져 있고, 스포츠 잠바의 3번째 주머니에서 나온)이 자리를 잡았을 때, 모든 사람이 분명히 모든 공간의 층층 포장을 이해한다.

“자 나는 이 공이 더 이상 필요하지 않다” Conway는 말하고는 그의 Pyramid의 꼭대기에서 한 공을 잡고는 20번째와 40번째 줄 사이의 어딘가에 그것을 hall 안으로 던진다. “이것들도 필요하지 않다”, 그리고는 채색된 공들을 hall의 모든 구석으로 던져 버린다. 모든 공들이 던져 졌을 때(그리고 관중 속의 누군가가 즐거운 외침을 내면서 공을 잡았을 때), Conway는 다음과 같이 말한다. “자 나는 잠바도 필요지 않다” 그리고 그것을 벗어서 마루 바닥 위로 던진다. (그러나) 반바지는 강연 내내 머문다.

연사들은 청중들에게 무엇인가를 전달하려고 하기보다는 자기들이 얼마나 위대한 과학자인지를 보여줄려고 노력하고 있다.

괴짜이긴 해도, Conway의 강연이 대회에서 가장 이해될 수 있는 talk들 중의 하나였다. 문제는 대회의 명성 시장(Reputation Fair)으로의 점차적 변신이었다: 연사들은 청중들에게 무엇인가를 전달하려고 하기보다는 자기들이 얼마나 위대한 과학자인지를 보여줄려고 노력하고 있고 그들의 목적이 알아들을 수 없는 강의에 의해 성취될 것이라고 생각한다.(이것은 분과 talks에 있어서 더욱 그렇다).

나의 의견으로는, 대회에서의 최고의 talk들은 4차원 다양체의 기하(gauge 장 물리와 연관해서)를 survey하는 Clifford Taubes(Harvard, USA)에 의한 것과 Quantum Hall Effect에 관한 자신의 최근의 이론에 대한 Zurich의 Jurg Frohlich에 의한 talk였다.

3차원 혹은 4차원 위상은 곡선과 곡면들의 위상이나 5차원 또는 그 이상의 차원의 위상보다 더 복잡하다는 것이 밝혀졌다. 예를 들면, 4차원에서만 위상적으로 보통의 공간과 같지만 대역적인 smooth 좌표체계를 허용하지 않는 “fake Euclidean space” 가 존재한다.

이 모든 fake 4차원 공간들은, 그건 그렇고, dynamical systems의 용어들로써 멋지게 기술될 수 있다: 그것들은 보통의 Euclid 5차원 공간에서의 (평형점을 갖지 않는, 모종의 vector 장(Vector field)의 궤적 공간(orbit spaces)이다. 그럼에도, 내가 아는 한, 아무도 그런 vector장을 명시적으로 쓴 사람은 없다. 그것의 성분들은 기초적인 함수들일까? 다항식들일까?

3개의 흥미있는 talk가 거울 대칭이론에 관한 것이었는데, 이것은 외관상 관련이 없어 보이는 수학적 이론들, 즉 대수기하, 특이점 이론, 위상 수학, 그리고 convex polyhedra의 조합론들의, 최근에 물리학자들에 의해 발견된 놀라운 연관에 관한 것이다. 이 이론의 많은 주장들은 지금까지는 단지 추측들일뿐이다(광범위한 실험자료들과 여러 가지 이론들에서 나오

는 긴 소수점 자리의 정수들 사이의 일치에 의해서 보증된). 그럼에도 M. Kontsevich의 talk(“Homological algebra of mirror symmetry”), A.B. Givental의 talk(“Homological geometry and mirror symmetry”), 그리고 D.R. Morrison의 talk(“Mirror symmetry and moduli spaces of conformal field theories”)에서 앞으로 나타날 이론에 대한 상대적으로 조화된 안목을 얻을 수 있다.

재정수학(financial mathematics)에 대한 Follmer(Bonn)의 talk에서 shiryayev와 shepp에 의해 도입된 “러시아 option”에 대해 듣는 것은 즐거웠다. 나는 지금까지 유럽과 미국 option에 대해서만 들어왔다. 개최때 Yu. Matijasevich(st. Petersburg)에 의해 주어진, Nevanlinna 상 수상자 A. Wigderson의 업적에 대한, 짧은 묘사에 크게 감명받았다. 이것은 수학적 문제의 해의 복잡성속에서의 새로운 아이디어들과 확률적 아이디어를 증명이론에 적용하는 것에 관한 것이다. 최후로, 우리는 엄밀 수학에서 올바르게, 확실하지는 않고, 그러나 오류의 확률이 극도로 작은(즉, 10^{-500}) 증명을 발견하는 가능성이 있다.

모든 사람은 증명하기는 쉽지만 발견하기는 어려운 해를 갖는 문제들이 있다는 것을 안다. 한 예로 정수의 소인수 분해가 있겠다. 한 소인수가 알려지면, 나누기가 가능하다는 것을 상당히 빨리 증명할 수 있다.(비록 나누어지는 수가 200자리 수이고 나누는 수가 100자리수일지라도). 그럼에도 인수를 발견하는 것은 매우 어렵다: 가능성들은 다 검토해야되고, 걸리는 시간은 엄청나다(주어진 수의 자리수에 대해 지수적으로 증가한다). 지수적 복잡성의 문제들은 실제로는 Computer의 계산능력밖에 있고 아무리 기술이 개선되더라도 여전히 그럴 것이다. 이것이 비밀정보를 공개적인 통신 채널을 통해서 전달하는 계획에서 인수분해가 쓸모 있는 것으로 되게한다. 그러나, 이런것들이 진짜로 다항식적 복잡성보다 더 복잡하다는 것은 증명안된 추측이다(“hard” 문제가 있다면 “hard”인 것으로 알려진 수천의 문제들의 List가 모아졌다). 새로운 진전은 hard 문제의 존재에 대한 여전히 증명 안된 가설에 기초한 포괄적인 이론의 정교화이다. 특히 흥미있는 것은 무작위화된 algorithm - 무작위 test들을 포함하는 algorithm- 과 무작위성을 없애는 stochastic요소들을 유사무작위 수 발생기(pseudorandom number generators)들로 대체시키는 가능한 방법에 대한 연구이다. 특히나 임의로 복잡한 증명이 임의로 빨리 증명될 수 있다는 것이 보여진다. 증명되지 않은 추측(가끔은 페러독스적인 결과들로 이끄는)에 기초한 이 모든 활동은 Lobachevskii의 업적을 생각나게 하는데, 그는 증명되지 않은 가정이 그의 기하학의 기초에 있다는것에 구애받지 않고 그의 아름다운 기하학 이론을 만들었다. 지금은 우리는 두 개의 기하학이, 하나는 Lobachevskii의 기하학 가정이 성립하고 하나는 성립안하는, 있다는 것을 알고 있다. 그들은 단지 다른 곡면의 기하를 묘사할 뿐이다.

미국의 대학들은 어떠 어떠한 유명한 Russia 수학자들을 그들이 거부했는가에 대해 자랑한다.

한편으로, 지수적으로 어려운 문제(조합적 연구없이 풀기가 불가능한)를 포함하는 수학이 있

고, 다른 한편으로는 그렇지 않은 수학이 있다는 것은 의심스럽다. 어쨌든, 결정론적이고, 무작위화되고, 무작위화에서 벗어난 알고리즘의 여러 양상들은 Zurich에서 여러 가지 재미있는 강의(Computer과학에 관한 분과)를 가능케했다.

대회에서의 대부분의 talk들은, 그러나 설교와 같았다. 분명히 강연자는 청취자들이 조금이라도 이해하리라고는 기대하지 않았다. 때때로 그들은 엄숙하게 조용한 강당에서 명백하게 틀린 정리들을 진술할 정도였다. 설교 분위기가 너무 지배해서 소개자들은 마지막에 질문이 없냐고 묻지도 않았다. 그리고 J. Moser(스위스의 주요수학 center인 ETH Zurich의 수학연구소 소장)와 같은 구식의 교수들이 사람에게 질문하도록 촉구했을 때, 질문을 함으로써 자신들의 무지가 드러나지 않을까 하는 두려움을 이겨낸 사람은 거의 없었다. 그러나 Talk들은 설교와는 공짜가 아니라는 점에서 달랐다. 참가자로 등록하지 않는 사람에게는 talk에의 참가비는 concert나 연극 관람표처럼 상당했다.

나는 우리의 젊은 연구자들이(특히 서방에서 일하고 있는) 우리가 오래동안 추구해왔던 방향에서 USA에서 유행하는 방향으로 완전한 관심의 이동이 약간 걱정스럽다. 그러한 관심의 전환은(의심할바 없이 미국 대학들에서의 직업구하기가 어렵다는 조건에 관련이 되어 있는데, 그들 중 몇몇 대학은 자기네가 어떠 어떠한 유명한 Russia 수학자들을 거부했는가에 대해 자랑한다) 필연적으로 부정적이다. 한 분야에서의 지도자들은 다른 지도자를 따르는 앞다투는 경쟁자들 속에서 관심 이동의 가속화를 방치한다.

과거 소비에트 연방의 나라들과 러시아에서 온, 대학원생까지를 포함한 많은 수의 젊은 대회 참가자들을 보는 것은 즐거움이다. 그들의 참석은 스위스 대회 조직위원회와 소로스 재단의 관대한 지원에 의해 가능했다. Swiss수학자들은 우리의 체류를 즐겁게 하기 위해 가능한 모든 일을 했다: 참가자들에게는 Swiss전국 여행(Lucerne, Interlaken, Bern등등)이 제공되었고, 산악여행(Vierwaldstatter호수가 내려다 보이는 Rigi Kulm까지), (나이에가라에 비견되는)Rhine 폭포여행, 고전과 folk음악 concert가 제공되었다.나는 Zurich에 있는 작으만 하고 거의 알려지지 않은 미술화랑에서 깊은 인상을 받았다.Rembrandt와 Franz Hals, El Greco와 Goya, Canaletto와 Tiepolo, Greuze와 Ingres, Corot와 Courbet, Cezanne, van Gogh, Matisse, Pissarro, Picasso.

힘든 대회가 끝난 후에, Geneva 근처에 있는 나의 옛 친구 A. Haefliger의 집에서 하루를 묵었다. Rhone 계곡 근처의, Jungfrau와 Matterhorn의 중간쯤되는 곳에 있는 1500 - 3000m 사이의 산들을 올라갔다. 그리고는 빙하호수에서 수영을 했다. 돌아올 때 버섯, 팽이밥, 월굴나무열매 그리고 야생딸기를 따서 이 자연의 선물들으로써 저녁 요리를 집주인에게 만들어 줬다(식용인지에 대한 그들의 의구심을 떨쳐 버리고). 다음날 나는 Moscow로 돌아왔다.

수학은 관계들의 열거와 비교이다. - Gauss, 1851