

大韓造船學會論文集  
 第 33 卷 第 1 號 1996年 2月  
 Transactions of the Society of  
 Naval Architects of Korea  
 Vol. 33, No. 1, February 1996

## 오차추정에 의한 순응형요소분할과 다단계 유한요소해석

양박달치\* , 황명연\*\*

### Adaptive Mesh Refinement and Multigrid FEM by Error Estimation

by

P.D.C. Yang\* and M.Y. Hwang\*\*

#### 요 약

최적의 유한요소분할은 모든요소의 해석오차가 허용수준이내에 들고 균일하도록 함을 의미한다. 이러한 유한요소분할은 구조해석을 효율적으로 수행하기 위하여 필요하다. 최적요소분할을 위해서는 오차추정과 그 결과를 고려하여 요소분할을 수행할 있는 순응형 요소생성기법이 요구된다. 이러한 과정의 유한요소해석은 초기의 해석결과와 정보로부터 해석오차를 추정하고 순응형 유한요소를 생성하여 다음단계의 유한요소해석을 효율적으로 수행 가능하게 한다

본 연구에서는 유한요소해석 오차추정과 이를 다음 단계의 유한요소해석에 적용하는 다단계 유한요소해석기법 개발을 위한 기초연구를 수행하였다. 본 연구의 순응형 유한요소분할에는 삼각형 요소를 사용하였고 해석 후 오차추정에는 응력투영법을 사용하였다. 또한 오차추정, 요소분할과 유한요소해석을 효율적으로 수행하는 다단계기법의 알고리즘을 제안하였다.

#### Abstract

The optimal mesh refinement has a meaning that error of the every element is within an allowable level and in uniformly distributed. The adaptive mesh generation may be required to achieve the optimal mesh generation. For the purpose of optimal mesh generation, an error estimation and an adaptive mesh refinement are required.

---

발 표 : 1994년도 대한조선학회 춘계연구발표회 ('94. 4. 23)

접수일자 : 1994년 11월 28일, 재접수일자 : 1995년 9월 11일

\* 정회원, 울산대학교 조선해양공학과

\*\* 정회원, 한라중공업 선박해양연구소

Using the adaptive mesh generation the second finite element analysis is performed with the result of the first analysis. In the process the error estimation is required.

In this study the adaptive mesh generation program for triangular element is developed, and for a posteriori error estimation the stress projection approach is considered. It has been found the multigrid technique, where the error estimation and the mesh generation are combined in multi-step of analysis, may be used efficiently in the finite element analysis.

## 1. 서 론

공학적인 문제를 해결하기 위한 강력한 도구로서 사용되고 있는 유한요소법은 오차의 크기를 줄이고 해의 신뢰도를 높이기 위해서는 개개의 요소들에 대한 해석오차를 추정하고, 모든 요소들에서의 오차값이 허용 오차 이내에 들도록 요소를 분할하는 것이 필요하다. 이는 유한요소 해석을 효율적으로 수행하기 위해서는 적정 요소분할의 조건으로 고려된다.

본 논문에서는 해석오차를 감소시키는 방법으로서 일반적으로 가장 많이 사용되어지고 기존 유한요소 프로그램에 쉽게 접목될 수 있는 방법인 h법[1]을 이용한 분할 방법을 사용하였다. 그리고 분할된 요소의 정확한 값을 얻기 위해서 오차 추정법을 필요로 하므로 본 논문에서는 선형 삼각형 요소에 대하여 효율성이 높은 응력투영법을 이용한 유한요소 해석후의 오차추정(a posteriori error estimation)을 수행하였다. 또한 제시된 오차추정법과 요소분할법의 효율성을 높이기 위하여 반복법의 일종인 다단계 해석법(multi-grid solution technique)을 사용하였다. 이 방법은 재해석 결과에 의해 강성행렬의 폭(band width)이 커진 경우를 해결해 줌으로서 계산 용량과 계산시간을 상당히 줄일 수 있는 잇점이 있다.

## 2. 오차추정

### 2.1 오차추정 정규치

일반적인 오차는 정해와 근사해와의 차이로서 정의가 될 수 있으나, 응력해석의 문제에 대해서는 오차의 크기가 국부적인 값을 나타내므로 별도의 오차에 대한 정의가 필요하다. (1)식과 같이

표현되는 오차는 어느 한 점에서의 오차는 표현될 수 있어도 전체적인 해의 오차에 대한 정보를 주지 못한다. 이러한 이유로 오차에 대한 적분 스칼라 양을 나타내는 여러가지 정규값(norm)을 정의하였고, 이러한 정규값은 오차를 추정하는 기준으로 사용된다[6].

$$\{e_u\} = \{u\} - \{u_h\}$$

$$\{e_\sigma\} = \{\sigma\} - \{\sigma_h\} \quad (1)$$

여기서  $\{e_u\}$ ,  $\{e_\sigma\}$ 는 변위와 응력에 대한 오차값이고,  $\{u\}$ ,  $\{\sigma\}$ 는 실제값 그리고  $\{u_h\}$ ,  $\{\sigma_h\}$ 는 추정값을 의미한다.

오차의 정규값은 여러가지가 있는데, 이는 스칼라 양으로서 에너지의 제공근에 해당한다. 오차 정규값에 의한 유한요소 해석 후 오차추정(a posteriori error estimates)은 Zienkiewicz와 Zhu[2,3]가 제안하였다.

그중 변위에 대한 L2 정규와 본 논문에서 다루고자 하는 응력 오차에 대한 L2 정규에 대한 식으로 (2)식과 같이 정의된다[5],[6],[12].

$$\|e_u\|_{L_2} = \left[ \int_{\Omega} (\{u\} - \{u_h\})^T (\{u\} - \{u_h\}) d\Omega \right]^{1/2} \quad (2)$$

$$\|e_\sigma\|_{L_2} = \left[ \int_{\Omega} (\{\sigma\} - \{\sigma_h\})^T (\{\sigma\} - \{\sigma_h\}) d\Omega \right]^{1/2}$$

응력의 항들로 표시되는 에너지 정규와 L2 정규는 매우 유사한 형태를 가지게 되는데, L2 정규는 응력값에 대한 오차 기준으로 직접 표시될 수 있다는 점에서 본 연구에서는 L2 정규를 사용하였다.

전체 영역 또는 일부 영역에 대한 오차 정규값은 이에 포함되는 요소들에 대한 정규값의 합으로 구할 수 있다.

$$\|e\| = \sum_{i=1}^m \|e\|_i \quad (3)$$

- \*  $\|e\|_i$  : 요소  $i$ 의 정규값
- \*  $m$  : 전체요소 수

### 2.2. 엄밀해의 추정

(2)식으로 표현되는 오차를 추정하기 위해서는 엄밀해의 추정이 필요하다. 응력에 대한 근사값은 요소경계에 따라 불연속일 것이므로 이 근사값은 응력에 관한 경계조건을 만족하기 위해 형상함수로부터 구성되는 근사함수를 사용하여 응력에 대한 경계에서의 연속을 기할 수 있다.

$$\{\sigma^*\} = [N_i]\{\bar{\sigma}_i^*\} \quad (4)$$

$[N_i]$ 는  $i$  절점에 대한 형상함수,  $\{\sigma^*\}$ 는  $\{\sigma_n\}$ 의 근사 추정치  $\{\bar{\sigma}_i^*\}$  는 절점  $i$ 에서의 응력값으로 식 (4)에 의하여 구해지는 응력의 근사값은 일반적으로 보다 더 정밀한 값을 가진다. 따라서  $\{p\sigma\} = \{\sigma\} - \{\sigma_h\}$  식에서 참값인  $\{\sigma\}$  대신에  $\{\sigma^*\}$  를 대신하므로써 오차값을 추정할 수 있고, 보다 정해에 가까운 응력  $\{\sigma^*\}$ 의 추정 방법은 요소간의 응력의 불연속을 해소시키는 방안으로 문헌 [6]에서 제안된 응력 투영법을 사용하였다.

(4)식의 절점에서의 응력값  $\{\bar{\sigma}^*\}$ 의 추정은 (5)식으로 표시되는 영역내에서  $\{\sigma^*\}$  값과  $\{\sigma_h\}$  값의 차이에 대한 가중잔여(weighted residual) 요구 조건에 의해 얻어질 수 있다.

$$\int_{\Omega} [N]^T (\{\sigma^*\} - \{\sigma_h\}) d\Omega = 0 \quad (5)$$

상기식의  $\{\sigma^*\}$ 에 (4)식을 대입하여  $\{\bar{\sigma}^*\}$ 을 구한 식은 다음과 같다.

$$\{\bar{\sigma}^*\} = [A]^{-1} \int_{\Omega} [N]^T \{\sigma_h\} d\Omega \quad (6)$$

여기에서

$$[A] = \int_{\Omega} [N]^T [N] d\Omega$$

요소수가 증가하면  $[A]$  행렬의 크기가 방대해지게 되고, (6)식을 이용하여  $\{\bar{\sigma}^*\}$ 를 추정하는 과정에서  $[A]$  행렬의 역행렬을 계산하여야 하므로, 그로 인한 계산과정의 효율성이 요구된다.

본 논문에서는 이를 위해 Zienkiewicz 와 Tayler가 제안한 행렬  $[A]$ 에 대응되는 대각선 행렬을 구하고 이를 이용하여 반복법으로  $\{\bar{\sigma}^*\}$ 를 추정하는 방법을 이용하였다.[3]

$$[A] = \int_{\Omega} [N]^T [N] d\Omega \cong [A_L] \quad (7)$$

$[N]$ 는  $[A]$  행렬에 대응되는 대각선 행렬  $[A_L]$ 를 구하기 위해 도입한 근사함수로서 대각선화 과정 중 가장 유용한 방법중의 하나는  $N$ 의 각 항에 해당되는 절점에 한정되는 적분점들을 가지는 근사적분 규칙을 적용하는 것이다.  $[A_L]$ 이 대각선 행렬이므로 그에 대한 역행렬을 쉽게 구해질 수 있고, 따라서

$$\{\bar{\sigma}^*\} = [A_L]^{-1} \{P\} \quad (8)$$

와 같이 표시된다. 여기에서

$$\{P\} = \int_{\Omega} [N]^T \{\sigma_h\} d\Omega \text{ 이고, } [A_L] \text{이 } [A] \text{의 근}$$

사치이므로 정해  $\{\bar{\sigma}^*\}$ 를 얻기 위해서는 반복계산 과정이 필요하다. 본 연구에서는 (9)식과 같은 반복 계산 알고리즘을 사용하였다.

$$((\bar{\sigma}^*))^n = ((\bar{\sigma}^*))^{n-1} - [A_L][A((\bar{\sigma}^*))^{n-1} - \{P\}] \quad (9)$$

여기서  $n$  은 반복 횟수이다.

### 3. 순응형 요소분할

#### 3.1 오차추정기준

유한요소의 최적분할 방법의 하나는 모든 요소 갖는 오차가 허용오차 이내에서 균일하도록 하는

것이다. 이에 근접한 방법으로 순응형 요소분할 법이 제안되었는데 이는 개개의 요소에 대한 응력 오차 정규값들(stress error norm values)을 구하고, 그 값들이 허용오차 이내에 드는 요소분할의 정지기준치(estimated stopping criteria)에 만족될 때까지 요소분할을 수행하는 것이다.

오차 정규의 절대크기 보다는 (10)식으로 표현되는 상대 백분율 오차(relative percentage error)가 더 큰 의미로 간주되어질 수 있다. 백분율 오차  $\eta$  는 전체영역 또는 부분 영역에 대하여 정의되어질 수 있다.

$$\eta = \frac{\|e\|}{\|e\|} \times 100 \quad (\%) \quad (10)$$

여기에서  $\|e\|$  는 추정오차 정규값으로서 (2)식의 두번째 식에 의해서 구하였으며,  $\|e\|$ 는 응력오차의 정규값으로서 아래 (11)식을 사용하여 구하였다[4].

$$\|e\| = \left[ \int_{\Omega} \{\sigma\}^T \{\sigma\} d\Omega \right]^{1/2} \quad (11)$$

### 3.2 요소분할 정도

개개의 요소에 대한 오차 정규값들과 전체에 대한 오차 정규값에 의해 새로운 유한요소 분할에 대한 기준을 구한다. 상대 백분율 오차인  $\eta$ 가 영역내에서 허용 백분율 오차값인  $\bar{\eta}$  보다 작은 값을 가질때 그 영역에서는 요소의 재분할이 필요하지 않다. 다시 말해서 국부적인 오차 추정자(local error estimators)는 요소의 재분할을 수행할 영역을 나타내고, 이것으로 요소분할 정지기준을 얻도록 정의하였다. 허용 백분율 오차값  $\bar{\eta}$  는 통상 공학적인 오차의 범위로 볼 수 있는 5%로 한다 [3].

영역내에서 임의의 요소에 대한 분할조건은 그 요소에 대한 오차 정규치가 개별요소오차 기준치와의 비교에서 얻어질 수 있다. 개별 요소에 대한 허용오차 기준치는 다음식으로 정의될 수 있다.

$$\|e\|_i < \frac{\bar{\eta}}{\eta} \left( \frac{\|e\|^2 + \|e\|^2}{m} \right) \equiv \bar{e}_m \quad (12)$$

여기에서  $\bar{e}_m$  : 개개 요소의 허용오차  
개개의 요소에 대한 오차 정규치와  $\bar{e}_m$  사이의 비율

$$\|e\|_i / \bar{e}_m = \xi_i \quad (13)$$

으로 정의하면,  $\xi_i > 1$  인 곳에서 재분할을 수행하게 된다. 이상적인 요소분할은  $\xi_i$  가 1.0이 되도록 요소의 크기를 분할하는 것이다.  $\xi_i$ 가 1.0보다 큰 요소에 대한 분할 정도는 특이점이 없는 구조는 (14)식에 의해 특이점을 가지는 구조는 (15)식에 의해 산정할 수 있다.

$$h = h_i / \xi_i \quad (14)$$

$$h = h_i / \xi_i^{1/\lambda} \quad (15)$$

여기에서,  $h$ 는 새롭게 분할된 요소의 크기이고,  $h_i$ 는 분할 이전의 요소 크기 그리고  $\lambda$ 는 특이점 강도(singularity strength)에 따라 결정되는 계수로 0.5 ~ 1.0 사이의 값을 갖는다[3].

국부적으로 재분할 하여야 할 요소의 크기가 정해지면, 순응형 요소 분할 프로그래밍이 가능해진다.

### 3.3 삼각형 요소 분할법

Rivara의 방법[5]을 적용하고, 분할크기의 비  $\xi_i$ 가 1.0보다 작은 값을 갖는 요소에 대해서 구한 분할 정도에 대하여 재분할을 수행하는 프로그램을 개발하였다. 삼각형 요소를 분할하는 Rivara의 분할 알고리즘은 분할 대상이 되는 요소에 대하여 가장 긴 변을 이동분하는 것이 주요 내용인데 이는 요소의 분할수가 많아지는 경우 삼각형의 내부각이 영 값이 되는 것을 방지하여 규칙적인 모양의 특성을 만족하는 삼각형 요소가 이어서 생기도록 한다.

### 4. 다단계 해석법

분할된 삼각형에는 새로운 요소와 절점이 생기는데, 요소의 번호와 절점번호는 그때까지의 마지막 요소번호와 절점번호에 잇달아 정해지도록 한다. 이러한 방식의 요소절점 부여는 강성행렬의 구성에 많은 저장 공간을 필요로 하므로 행렬식의 해를 얻는데 있어서 Gauss 소거법에 근거한 기존의 방법은 효율성이 떨어진다. 한편 요소분할 과정을 2-3 단계를 거쳐 수행한다면, 방정식의 해법은 반복해법을 택하는 것이 유리할 것이다. 이러한 견지에서 다단계 해석법(multi-grid analysis)이 제안되었는데[5], 이에 대한 적용성과 효율성의 검토가 필요하다.

분할된 요소들에 대한 정보를 가지고 초기에 정의된 정보의 특성을 그대로 살리면서 구조물의 재해석을 수행한다. 그러나 재해석을 수행할 때 자유도의 수가 증가함에 따라 강성행렬의 크기도 커지기 때문에 1차 해석에서 사용된 Gauss 해석방법[6]을 2차 해석에서도 사용한다면, 컴퓨터의 용량과 계산시간을 타 해석기법과 비교해 볼 때 효율적이지 못하다. 그래서 2차 해석부터는 컴퓨터의 용량과 계산시간을 절감시킬 수 있는 다단계 해석기법을 적용하여 해석의 효율성을 높였다.

### 5. 해석에

#### 5.1 오차 추정치의 수렴성 검토

본 논문의 오차 추정방법과 h법에 의한 순응형 요소 분할에 대한 예로서 Fig. 1와 같이 특이점을 가지는 정사각형의 평판을 선정하였다. 본 계산에서는 요소분할 정도에 따르는 오차추정값의 수렴성을 확인하기 위하여 요소분할을 모든 요소에 대하여 균일하게 시행하였다. Table 1은 각 단계별 요소 수의 증가에 따른 추정 오차 정규치, 응력 오차 정규치, 백분율 오차값 그리고 허용 오차값들을 나타냈다. Fig. 2에서는 각 단계별 해석결과에 대한 추정 오차의 감소 경향을 보여주고, 또한 백분율 오차의 최적요소 분할에 있어서의 허용오차값에 도달되는 수렴성을 보여준다. 이 그

림에서 오차값은 요소수 내지 자유도수가 증가함에 따라 오차값들이 감소함을 알 수 있다. Fig. 3에서는 단계별로 32개, 128개, 512개의 요소로 분할된 형상을 보여준다.

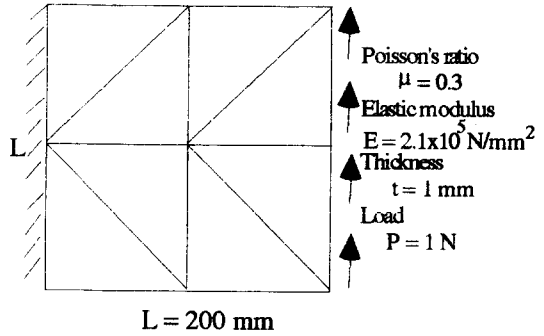


Fig. 1 Short cantilever beam

Table 1 Error norm values and the degree of freedom for short cantilever beam

NDOF	$\ p\ $	$\ \sigma\ $	$(\ p\  / \ \sigma\ ) \times 100$	$\ p\  / \rho_m$
12	144.71	352.26	41.080	6.732
40	132.40	421.93	31.308	3.9087
144	82.87	450.23	18.407	2.0232
544	47.50	458.43	10.360	1.0347

\* NDOF : 자유도 수,

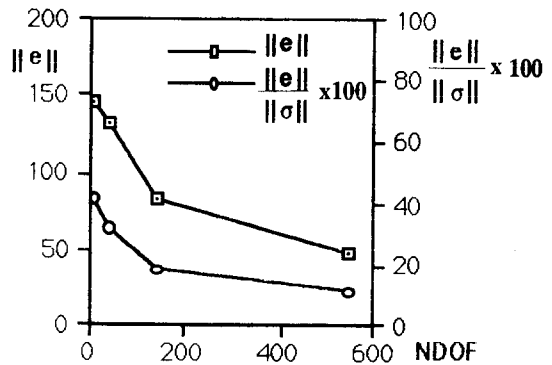


Fig.2 Convergnece rate for short cantilever

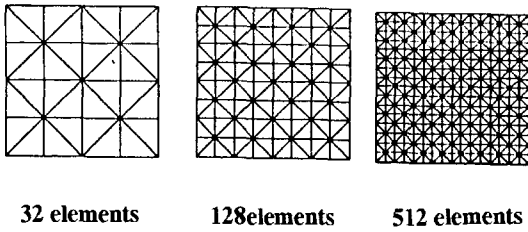


Fig. 3 Adaptive mesh of linear elements for short cantilever beam

다른 예로서 Fig. 4에 보인 중앙에 구멍이 존재하고, 양 측면에서 인장 하중을 받는 판 모델을 선정하였다. 이 모델의 형상과 하중의 대칭성을 이용하여 초기해석모델을 Fig. 5와 같이 1/4만을 해석 대상으로 잡았고, 오차 추정후 순응형 요소 분할 결과를 같은 그림에 보였다.

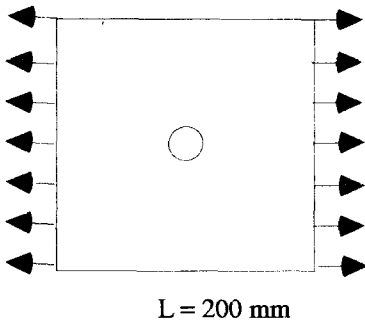


Fig. 4 Square plane structure with a hole

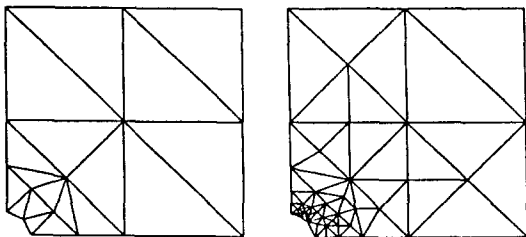


Fig. 5 Initial analysis model and adaptive mesh refinement of third analysis step

### 5.2 다단계 해석법의 적용

다단계 해석법의 적용에 있어서 Gauss 소거법을 사용하여 해석한 경우와 반복해법을 사용하여 해석한 경우를 비교하기 위하여 Fig. 1의 해석모델을 택하였다. Table 2에 각 해석 단계별로 강성행렬의 저장에 필요한 공간의 크기를 비교해 보았다. 자유도 수가 커짐에 따라 저장된 요소 수는 반복해법을 이용한 경우 Gauss 소거법과 비교해서 1/4 정도의 요소 수만 저장이 되고, 또한 강성행렬의 대각선 상부에 저장되는 요소 수에 대해 백분율로 나타냈을 때 초기 단계에서는 같은 양의 요소수를 저장하였지만 자유도 수가 증가함에 따라 반복해법이 강성행렬의 크기에 비해 대단히 작은 양의 요소 수를 저장하였다. 즉 이 결과에서 강성행렬의 저장에 필요한 공간이 Gauss 방법에 비하여 반복해법이 매우 작다는 것을 알 수 있었다. 이 예에서 알 수 있듯이 반복해법을 적용하는 경우 소형 컴퓨터에서도 대형 구조물에 대해 해석이 가능해진다.

Table 3에서는 Gauss 소거법과 반복해법에 소요되는 시간을 정리하였다. 단계별로 검토하면 Gauss 소거법이 요소 수가 적은 경우에는 반복해법에 비하여 같은 시간 내지 더 짧은 시간내에 수행됨을 알 수 있다. 그러나 요소 수가 많아지게 되면, 반복해법의 경우 계산시간이 상대적으로 짧아짐을 확인할 수 있다.

Table 3에서의 결과에서 Gauss 소거법으로 상세요소 분할된 모델에 대하여 한번 구조해석을 시행한 경우의 계산시간은 11.420초라고 볼 수 있는데 반복해법을 적용한 다단계 해석법은 1~4 단계에서 소요된 계산시간이 9.12초 임을 감안하면 반복 해석법을 적용한 다단계 해석법이 한번의 Gauss 소거법에 비해 짧은 시간내에 계산이 수행될 수 있음을 알 수 있다.

따라서 요소 수가 방대한 구조해석에서 오차추정을 통한 반복해법을 이용한 효율적인 요소분할과 다단계 해석법을 적용하면 상대적으로 매우 짧은 시간내에 계산을 할 수 있을 것으로 추측할 수 있겠다. 수 있음을 알 수 있다.

Table 2 Comparison of storage size for the stiffness matrix between Gauss elimination method and iterative solution method

	Iter. No.	Gauss 소거법	반복 해법
NDOF (자유도)	1	12	12
	2	40	40
	3	144	144
	4	544	544
NELEM (요소수)	1	66	66
	2	696	232
	3	8620	948
	4	120188	3760
(NELEM/NTOT) × 100	1	84.62 (%)	84.62 (%)
	2	84.88 (%)	28.29 (%)
	3	82.57 (%)	9.08 (%)
	4	83.51 (%)	2.61 (%)

\* NTOT : 강성행렬의 요소 수

Table 3 Comparison of analysis time between Gauss elimination method and multigrid analysis method

(using C.P.U Sparc 10 w/s)

method \ Iter. No.	자유도수	Gauss 소거법 (sec)	다단계 해석법 (sec)
1	12	0.290	0.290
2	40	0.370	0.490
3	144	0.940	1.450
4	544	11.420	6.890
Total		13.020	9.120

### 5.3 프로그램의 구성

본 논문에서 개발한 프로그램은 먼저 초기 데이터 구성한 후, Gauss 소거법을 이용한 유한요소법을 이용하여 각 요소에 대한 응력을 구한다. 계산된 응력 결과치에 의해서 오차추정을 수행하고, 결과치중 총 상대백분율 오차가 5 퍼센트 이하의 값을 가질 때는 계산을 중지하고, 그 이상의 값을 가질 때는 요소분할을 위한 분할대상 요소,

분할정도 등의 정보를 준비한다. Rivara의 방법에 의해 요소분할을 수행하여 요소 분할된 형상을 그림으로 출력하였고, 응력해석을 위한 입력자료를 생성한다. 이 자료를 이용하여 반복해법을 사용하는 구조해석을 수행하고 오차를 추정하여 이에 대한 적합성을 검토한다.

## 6. 결 론

효율적인 유한요소법에 의한 구조해석을 수행할 목적으로 오차추정법과 h 방법에 의한 순응형 요소분할 형성 방법에 대하여 기술하였고, 간단한 모델을 선택하여 본 연구 방법을 적용하여 보았다. 그 결과 요소 수 내지 자유도 수가 증가함에 따라 오차값이 점진적으로 감소함을 알 수 있었고, 효율성 높은 오차 추정에 의해 적합한 요소분할을 수행할 수 있었다. 해석의 효율성을 검증하기 위하여 해석 단계에서 반복해법을 이용한 다단계 해석법과 Gauss 소거법을 이용한 결과를 서로 비교하였다. 그 결과 강성행렬의 저장공간과 계산시간의 비교에서 다단계 해석법이 훨씬 더 작은 저장공간을 차지하고, 계산시간을 절약할 수 있음을 알 수 있었다. 따라서 대형 구조물의 해석시 본 연구 방법을 접목시키면 효율성과 경제성 면에서 큰 이득을 볼 수 있을 것으로 본다.

여기서는 본 연구 방법을 간단한 탄성 구조해석에만 적용시켰지만 앞으로 좀 더 효율적인 해석을 위하여 높은 절점수를 갖는 요소에 대한 해석에 의하여 더 복잡한 구조해석에 접목시키고자 한다.

## 참 고 문 헌

- [1] I. Babusca, "A Posteriori Error Analysis and Adaptive processes in the Finite Element method : Part II", Int. J. Numer. Methods Eng., Vol. 19, 1621-1993
- [2] O.C. Zienkiewicz and J.Z. Zhu, "A Simple Error Estimator and Adaptive Procedure for Practical Engineering Analysis", Int. J. Numer. Methods Eng., Vol. 24, 337-357, 1987
- [3] O.C. Zienkiewicz and R.L. Taylor, "The Finite

- Element Method", Forth Edition, Vol. 1, Chap. 7, 12, 14, 1989
- [4] A.M. Habraken and S. Cescotto, "An Automatic Remeshing Technique for Finite Element Simulation of Forming Processes", Int. J. Numer. Methods Eng., Vol. 30, 1503-1525, 1990
- [5] M. Cecilia Rivara, "Algorithms for Refining Triangular Grids Suitable for Adaptive and Multigrid Techniques", Int. J. Numer. Methods Eng., Vol. 20, 745-756, 1984
- [6] E. Hinton and D.R.J. Owen, "Finite Element Programming", Academic Press, 1977