

섬유강화 복합재료 내의 탄성과 전파

Propagation of Elastic Waves in Fiber Reinforced Composites

김진연*
(Jin-Yeon Kim*)

요약

입자복합 재료를 대상으로 수식화되고 그 유용성이 증명된 동적 자기일치적 이론을 가장 간단한 이차원 문제인 일방향 섬유강화 복합재료 내의 SH파 전파 문제에 적용하였다. 자기일치적 조건을 주파수의 제한 없이 유도하였고 유효속도와 감쇠를 두 가지 복합재료에 대하여 계산하였다. 계산된 결과는 다중산란 이론 및 또 다른 자기일치적 이론의 결과와 비교하였다. 저 체적비에서는 본 연구의 결과와 정확한 쌍상관함수를 사용하는 다중산란 이론의 결과와 일치하였으나 또 다른 자기일치적 이론의 결과는 앞의 두 이론과 상당히 다른 결과를 나타내었다. 체적비가 증가할수록 유사한 경향을 띠고 있지만 정량적으로는 서로 다른 결과를 보여 주고 있다. 본 연구의 이론은 항상 더 작은 분산과 물리적으로 구현 가능한 감쇠를 준다는 사실을 계산 결과로부터 알 수 있다. 한 가지 중요한 관찰은 고 체적비에서는 다중산란 이론에 의한 감쇠가 저주파수에서 매우 작은 값을 나타낸다는 사실이다.

ABSTRACT

A dynamic self-consistent method previously proposed and validated for the composites containing spherical inclusions is applied to the simplest two dimensional problems: SH wave propagation in unidirectional fiber reinforced composites. The self-consistent conditions for SH wave are derived without limitation on frequency and the wave speed and coherent attenuation are calculated for two composites. The results of the present theory are compared with those of the multiple scattering theories and another self-consistent theory. At low volume fractions, the present theoretical results coincide with those of the multiple scattering theory using exact pair-correlation function, whereas the results based on another self-consistent theory deviate markedly from the others. As the volume fraction increases, the three theories give different results although they have qualitatively similar trends. The present theoretical results for composites considered in this paper exhibit less dispersion and physically realizable attenuation. An important observation is that the multiple scattering theory predicts vanishingly small attenuation at low frequency when volume fraction is high.

I. 서론

불균질물질의 유효물성(effective property)을 구하는 문제에 대한 이론적 해석은 대부분 Foldy⁽¹⁾와 Lax⁽²⁾에 의하여 정립된 확률론적 다중산란 수식화에 그 근거를 두고 있다. 다중산란 문제를 확률론적으로 기술할 경우 무한개의 계층적인 적분방정식을 얻게 되는데, 일반적으로 준결정근사⁽³⁻⁶⁾(quasicrystalline approximation)에 의하여 두 번 산란된 파동까지 고려되고 고차 산란의 영향은 무시된다. 그러므로 준결정근사의 효율성은 두 산란체간의 상대적인 위치에 관한 확률밀도 함수인 쌍상관함수(pair-correlation function)의 정확도에 의존한다. Varadan⁽⁶⁾

은 정확한 쌍상관함수를 다중산란 수식화에 도입함으로써 준결정근사를 향상시켰다. 그들의 방법은 엄밀하지만 특히 3차원 문제에서 정확한 쌍상관함수를 구하는 작업은 엄청난 계산기 용량과 시간을 요한다. 한편, 자기일치적 상관포텐셜근사(coherent potential approximation)는 합금의 전자와 음향양자(phonon)들의 양자역학적 상태 밀도를 구하는 데 매우 유용한 이론을 알려져 있다.⁽⁷⁾ ⁽⁸⁾ 섭동법(perturbation)을 이용하는 해석에 의하면 상관포텐셜근사는 약산란일 경우에는 임의의 체적비에 대하여, 강산란일 경우에는 작은 체적비에 대하여 정확한 것으로 알려져 있다.^{(7), (8)} Gubernatis와 Krumhansl⁽⁹⁾은 처음으로 고체물리학에서 활용되고 있었던 상관포텐셜 근사를 탄성문제에 적용하였는데, 그들은 평균응력 텐서에 일차 Born 근사를 취하여 정적인 유효강성을 구하였다.

*대우전자 중앙제2연구소
접수일자: 1996년 6월 24일

Berryman⁽¹⁰⁾은 산란 변위장에 대한 체계적분 방정식에 대한 일차 Born 근사를 취하여 저주파수 극한의 물성치를 얻었다. 또한, Devaney⁽¹¹⁾는 압축파와 전단파에 대한 일반적인 자기일치적인 분산관계식(dispersion relation)을 구하였지만, 그는 얻어진 분산관계식을 계산할 체계적인 방법을 찾지 못하여 그의 예도 마찬가지로 저주파 근사에 머물렀다. 이와 같이 탄성과 분제에서는 상관포텐셜근사가 주로 저주파수 극한일 경우에만 극한되어 적용되어 왔다. 자기일치적 방법으로 산란문제를 정의하여 저주파수 극한의 유효물성을 기술할 경우, 적어도 저자의 지식에 의하면 Hill⁽¹²⁾과 Budiansky⁽¹³⁾에 의한 방법과 같이 정적인 분제로부터 유효 강성을 구하는 방법과 비교하여 장점이 거의 없다. 한 가지 예외는 구형 및 타원체형의 입자를 가진 복합재료에 대하여 적용된 Sabina와 Willis의 이론이다.⁽¹⁴⁾⁻⁽¹⁶⁾ 이들은 Hill과 Budiansky의 간단한 정적문제에 대한 이론을 동적 문제로 일반화시켰다. 그런데 그들은 완결해(closed-form solution)를 구하기 위하여 산란체 내에서의 과잉응력(excess stress)과 변형이 일정하다는 가정을 하였다. 이러한 이유로 그들의 이론은 장파장에서만 유용한 이론이다. Bussink 등⁽¹⁷⁾은 Sabina와 Willis의 이론을 섬유강화복합재료에 적용하였다. 또 하나의 예외는 Kim 등^{(18), (19)}에 의하여 유도된 동적 자기일치적 이론인데, Berryman의 준정적 이론에 대한 직접적인 확장이라고 해석된다. 그들은 다른 이론 및 실험 결과와의 비교를 통하여 제안된 이론이 산란체의 고차공명 주파수와 상당히 높은 체적비까지 유효함을 보여 주었다.

본 연구에서는 이전에 3차원에 대하여 제안되었던 이론⁽¹⁸⁾을 2차원에 대하여 재수식화 함으로써 일방향섬유강화 복합재료의 동적 유효밀도 및 축방향 전단강성계수에 대한 자기일치적 조건을 구하였고, 유도된 조건으로부터 주파수 의존적 유효물성을 계산하였다. 계산된 분산 및 감쇠를 Varadan 등⁽⁶⁾ 및 Bose와 Mal⁽²¹⁾의 다중산란이론, Sabina와 Willis의 결과⁽¹⁴⁾⁻⁽¹⁷⁾와 비교하였다. 두 가지 종류의 복합재료에 대하여, 체적비 범위 7-47% 및 주파수 범위 $ka=0.2$ 내에서 수치계산을 수행하였다.

II. SH 파에 대한 동적 자기일치적 해석

자기일치적으로 동적인 유효물성을 구하는 문제는 국부적 물성과 유효물성치간의 차이에 의한 유발되는 평균장의 산란장 혹은 요동장(fluctuating field)이 평균적으로 영이 되게 하는 문제로 요약될 수 있다.^{(18), (19)} 유효매질의 정의로부터 자기일치적 조건을 얻기 위하여, 원래의 기지와 산란체들이 아직 모르는 유효매질 내에 매몰되어 있다고 가정한다. 이때, 유효물성치는 원래의 복합재료를 이루고 있던 구성물질들에 의한 다중산란을 모두 기술하고 있는 전산란 연산자(total scattering operator)를 평균적으로 영이 되게 하여 구할 수 있다. 그렇지만, 일반적으로 전산란 연산자는 구할 수가 없으므로, 단일산란 연산

자, t 를 이용한다.^{(7), (8)} 그러므로, 유효물성치는

$$\langle t \rangle = 0 \quad (1)$$

를 이용하여 구할 수 있다. 여기서 $\langle \rangle$ 는 산란체의 분포, 방향, 모양에 관한 평균을 취하는 연산자이다. 본 연구에서는 산란체의 크기가 같고, 단면이 원형인 경우를 다루고 있으므로, 위의 식은

$$\langle t \rangle = \sum_j v_j t^j = 0 \quad (2)$$

과 같이 체적비에 관한 평균으로 간단히 표현된다. 여기서, v_j 는 j -번째 구성 물질의 체적비를 표시한다. 이 방법에서는 산란체들간의 상관관계를 수학적으로 포함시키지 않고 있으나, 유효매질 내에서 산란문제를 정의하므로, 다중산란 효과가 평균적으로 고려되고 있다고 생각할 수 있다.^{(7), (8)}

먼저, 유효매질내의 평균변위장을 평면 SH 파로 가정을 한다. 즉,

$$\bar{w} = \exp[i(k_e \hat{a} \cdot r - \omega t)] \quad (3)$$

으로 표현된다. 여기서, \hat{a} 는 파동의 진행 방향을 나타내는 단위 벡터이다. 또한, 유효파수 $k_e (= \omega/c_e)$ 는 아직 결정되지 않았고, 마찬가지로 전단파의 속도 c_e 도 미정의 변수이다. 시간의존항 $\exp(-i\omega t)$ 는 표현의 간편화를 위하여 이후로는 생략하겠다. 하첨자 'e'는 유효매질의 물성과 변수를 나타내고 있다. 이 평균장(입사파)은 물성의 국부성에 의하여 산란을 일으키게 되므로 요동장(혹은 산란장) \tilde{w} 를 유발시켜 전장(total field)은 다음과 같이 표시된다. 즉,

$$w = \bar{w} + \tilde{w} \quad (4)$$

이다. 균질하고 등방성인 기지와 산란체에 대하여 그 산란장은 다음과 같은 적분에 의하여 나타내어 질 수 있다.

$$\tilde{w} = \int_{\Omega} (\delta\rho\omega^2 \tilde{w} + \nabla \cdot (\delta\mu\nabla\tilde{w})) G(r, r_0) d\Omega \quad (5)$$

여기서, $\delta\rho = \rho - \rho_e$ 와 $\delta\mu = \mu - \mu_e$ 는 주위 매질과 산란체간의 밀도 및 강성의 차이를 의미하고, $G(r, r_0)$ 는 균질하고 등방성인 무한 매질의 2차원 Green 함수를 나타낸다. 적분영역 Ω 는 산란체가 차지하고 있는 면적을 의미한다. 일반적으로 무한대에서의 경계조건을 만족하는 Green 함수는

$$G(r, r_0) = \frac{i}{4} H_0(k|r-r_0|) \quad (6)$$

로 구해진다.⁽²⁰⁾ $H_0(x)$ 은 영차 한켈함수를 의미한다.

본 연구에서는 산란문제에 관한 적분 방정식을 다루므로, 해당하는 산란연산자는

$$i\tilde{w} = \delta\rho\omega^2 \tilde{w} + \nabla \cdot (\delta\mu \nabla \tilde{w}) \quad (7)$$

보서 정의가 된다.⁽¹⁰⁾ 식(2), (5) 및 (8)로부터 자기일치조건을 유도하기 위하여, 원거리 산란장(far-field scattering field)을 근사적으로 구하면, 변위장이

$$\tilde{w} \sim \frac{\exp(ik_e r)}{\sqrt{r}} f(k_e) \quad (8)$$

으로 된다. 여기서, $f(k_e)$ 는 산란 전단파의 원거리 크기를 표시한다. 원거리 산란 전단파는

$$f(k_e) = \frac{i}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi k}} \times \quad (9)$$

$$\int_{\Omega} \{ \delta\rho\omega^2 \tilde{w}(r_0) - i\delta\mu k_e \cdot \nabla_0 \tilde{w}(r_0) \} \exp(-ik_e \cdot r) d\Omega$$

이 된다.

한편, 식(1)의 자기일치 조건은 다음과 같이 표현되는 식과 동등하다. 즉,

$$\langle \hat{a} \cdot t \hat{a} \rangle = 0 \quad (10)$$

이 조건은 물리적으로 평균 전방산란장(forward scattering field)을 영으로 하는 조건으로 볼 수 있다. 전방산란과 산란 연산자간의 조건을 이용하면

$$\hat{a} \cdot t \hat{a} = \frac{i}{k_e^2} \hat{a} \cdot f \quad (11)$$

이 되고, 원래의 자기일치조건 식(2)는

$$\sum_j v_j \hat{a} \cdot f^j = 0 \quad (12)$$

으로 유도된다. 식(12)에서, 유효매질의 성질을 평균 전방산란이 영이 되도록 결정할 수가 있는데, 전방산란정리(forward scattering theorem)에 의하면 전방산란의 크기는 총단면적(total cross section)에 비례하므로 산란체의 존재로 인하여 발생하는 모든 입사파로부터의 손실이 평균적으로 영이 되게 하는 조건으로 해석될 수 있다. 그러므로, 식(9), (11) 및 (12)로부터 동적인 유효밀도와 두 개의 동적인 유효강성이 만족해야 할 조건을 다음과 같이 얻을 수 있다:

$$\sum_j v_j \delta\rho^j \int_{\Omega} \tilde{w}^j \exp(-ik_e \cdot r) = 0, \quad (13)$$

$$\sum_j v_j \delta\mu^j \int_{\Omega} k_e \cdot \nabla_0 \tilde{w}^j \exp(-ik_e \cdot r) = 0 \quad (14)$$

여기서, 하첨자 'j'는 j-번째 구성물질의 물성을 의미한

다. 위의 두 조건을 만족하는 해를 구함으로써 유효물성치를 결정할 수 있다. 저주파수 극한에서 이 조건은 다음과 같이 표현된다.

$$\sum_j v_j \delta\rho^j = 0 \quad (15)$$

$$\sum_j v_j \frac{\delta\mu^j}{\mu_j + \mu_e} = 0 \quad (16)$$

III. Sabina와 Willis의 자기일치적 이론

수 년전, Sabina와 Willis는 구형과 타원체형의 입자로 보강된 복합재료의 유효한 동적 성질을 예측하기 위한 자기일치적 방법을 개발하였다.⁽¹⁰⁾⁻⁽¹⁶⁾ Bussink 등⁽¹⁷⁾은 Sabina와 Willis에 의한 원래의 방법을 섬유강화 복합재료에 적용하였다. Sabina와 Willis의 방법은 이론적 구조가 Hill과 Budiansky의 정적인 방법에 대한 구조와 같다. 그런데, 그들은 유효물성에 대한 완결해를 구하기 위하여 기지와 산란체간의 물성차이로 인하여 발생하는 분극(polarization)이라 일컬어진 산란체 내부파동이 산란체 내에서 일정하다는 가정을 하였다. 이 가정은 장파장 영역에서는 올바른 예측을 할 수 있었지만 고주파수까지 외삽된(extrapolated) 결과를 보여 주었다. 그런 이유로 그들의 분산곡선결과에서 커져차공명은 예측이 가능하였지만 고차공명은 예측할 수 없었다.

여기서는 Sabina와 Willis의 유도과정을 따라서 평행한 섬유강화 복합재료 내에서의 SH파에 대한 자기일치적 결과를 유도하였는데 다음과 같다. 즉,

$$\mu_e = \mu_1 + v_2 h^2(k) (\mu_2 - \mu_1) [\mathbf{I} + \overline{S_x}(\mu_2 - \mu_e)]^{-1} \quad (17)$$

$$\rho_e = \rho_1 + v_2 h^2(k) (\rho_2 - \rho_1) [1 + \overline{M_t}(\rho_2 - \rho_e)]^{-1} \quad (18)$$

여기서, \mathbf{I} 는 2차 단위 텐서이고 산란체 내부 파동의 평균, $h(k)$ 는 다음과 같이 유도된다.

$$h(k) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} dr \exp(ik_e \cdot r) = \frac{2}{k_e a} J_1(k_e a). \quad (19)$$

또한, 평균 콘벌루션 연산자는 $\overline{S_x}$ 및 $\overline{M_t}$ 는 각각

$$\overline{S_x} \equiv \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} dr \int_{\Omega} dr' \partial_i \partial_j G(r, r') = \delta_{ij} \frac{\epsilon}{2\mu_e}, \quad (20)$$

$$\overline{M_t} \equiv \frac{\omega^2}{|\Omega|} \int_{\Omega} dr \int_{\Omega} dr' G(r, r') = \frac{(1-\epsilon)}{\rho_e} \quad (21)$$

으로 유도될 수 있고, 여기서,

$$\epsilon = i\pi H_1(k_e a) J_1(k_e a) \quad (22)$$

이다. 저주파 극한에서는 $h(k_e) \sim 1$, $\epsilon \sim 1$, $\overline{S_x} \sim \delta_{ij} (2\mu_e)^{-1}$, $\overline{M_t} \sim 0$ 이므로 유효물성치는

$$\rho_c = \rho_1 + v_2(\rho_2 - \rho_1), \tag{23}$$

$$\mu_c = \mu_1 + \frac{2v_2(\mu_2 - \mu_1)\mu_1}{\mu_c + 2\mu_2} \tag{24}$$

으로 표현되고 식(15), (16)의 결과와 일치한다. Bussink 등의 결과(그들의 논문⁽¹⁷⁾ 식(43))와 콘벌루션 연산자에 차이가 있는데 그들의 부정확한 계산 결과를 본 논문의 부록에서 수정하였다.

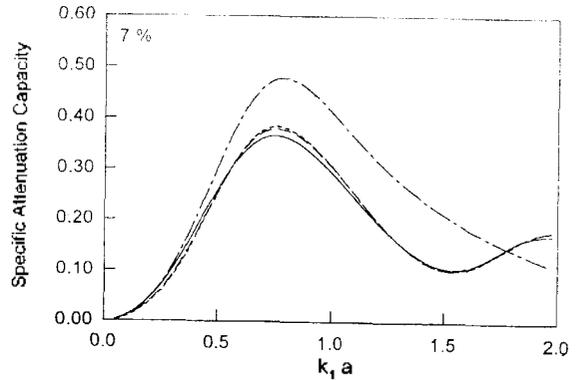
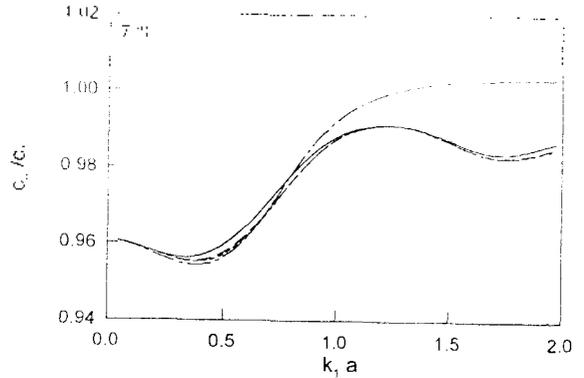
III. 결과 및 고찰

두 가지 알루미늄 기지 섬유강화 복합재료(steel/Al 및 B(boron)/Al)에 대하여 계산을 수행하였다. 복합재료를 구성하고 있는 물질들의 기계적 성질은 Table 1에 나타나 있다.

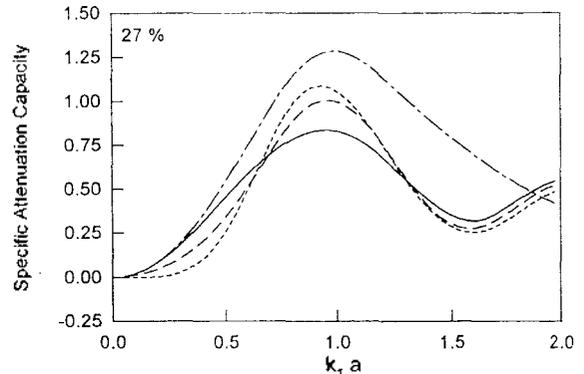
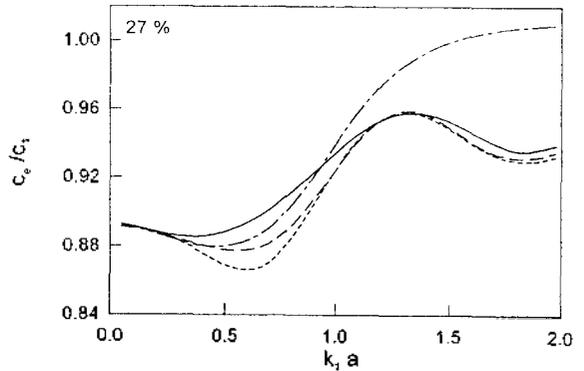
Table 1. Material properties of constituents

Materials	shear modulus(GPa)	density(kg/m ³)	shear wave speed(m/sec)
Aluminum	38.7	2720	3772
steel	80.9	7800	3220
boron	253	2530	9940

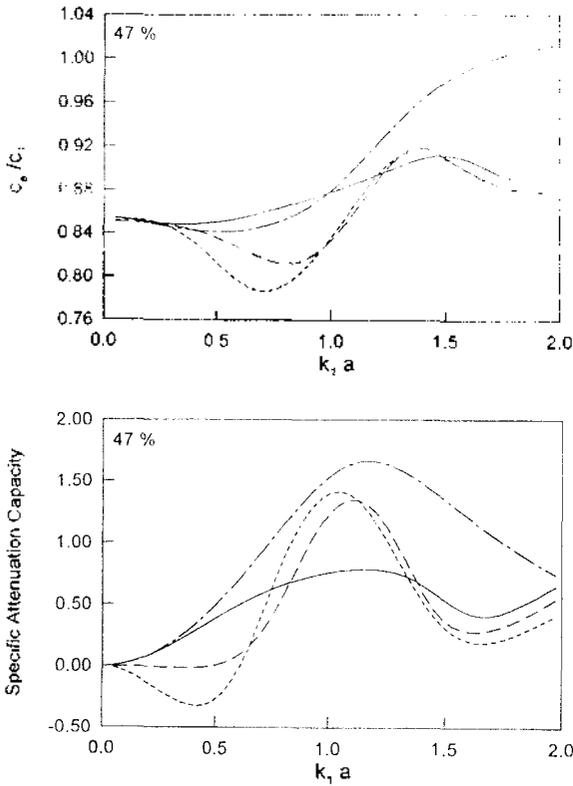
기지와 섬유는 모두 등방성이고 비흡수성의 물질로 가정되었다. 그러므로 진행하는 파동의 감쇠는 비상관성 산란에 의한 것이다. 다른 이론에 의한 결과와의 비교는 관심 주파수 대역 내에서 매우 다른 동적 거동을 보이는 두 가지 알루미늄 기지 복합재료에 대하여 행해졌다. 기지에 대한 강화섬유의 밀도비 및 전단강성비는 steel/Al의 경우 2.9, 2.1이고, B/Al의 경우 0.93, 6.53 이다. 그러므로, 두 가지 다른 종류의 파동 전파 현상, 즉, 공명산란이 지배적인 경우와 약하게 분산을 일으키는 경우이다. 자기일치조건에 대한 수치적 순환 반복계산(recursive iteration)의 결과는 평균속도비(c_e/c_1)와 바감쇠용량 ($4\pi Im\{k_e\}/Re\{k_e\}$)이다. steel/Al 복합재료의 경우, 제안된 이론(DSC1)과 다음과 같은 세 가지 다른 이론의 결과를 비교하였다. Sabina와 Willis의 이론(DSC2), Varadan 등의 다중산란이론(MST1), Bose와 Mal의 이론(MST2). B/Al복합재료에서는 MST2를 제외한 세 가지이론의 결과를 비교하였다. 섬유체적비 7%, 27%, 47%에 대하여 steel/Al 복합재료의 파속과 감쇠를 Fig. 1에서 보여주고 있다. $k_1 a \approx 0.75$ 부근에서 파동 속도는 급격하게 증가하고 감쇠는 널찍한 최대치를 가진다. 이러한 현상은 입자 복합재료에서도 유사하게 나타났다.^{(18), (24), (25)} 이 현상의 원인을 알기 위하여 하나의 steel 산란체가 알루미늄기지에 묻혀 있는 산란문제를 해석하고, $|f_n(\pi)| = 2\epsilon_n |T_n| / \sqrt{\pi k_1 a}$ 로 주어지는 산란 부분파의 크기를 Fig. 2에 나타내었다. 여기서 ϵ_n 은 Neumann 인자이다. 이 그림으로부터 산란체 내부로 침투한 파동의 공명은 $k_1 a = 2$ 이상의 주파수에서 발



(a) Normalized wave speed and specific attenuation capacity, $v_2 = 0.07$.



(b) Normalized wave speed and specific attenuation capacity, $v_2 = 0.27$.



(c) Normalized wave speed and specific attenuation capacity, $v_2 = 0.47$.

Fig 1. Effective normalized wave speed and specific attenuation capacity vs. frequency for steel/aluminum composite. (—), Present theory; (---), Sabina and Willis theory¹⁴; (- - - -), Varadan et al. theory⁶; (.....), Bose and Mal theory.²⁰

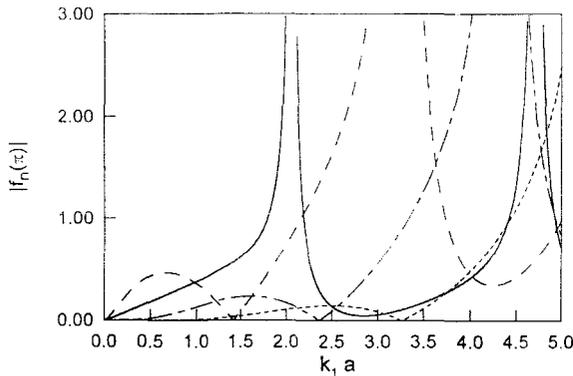
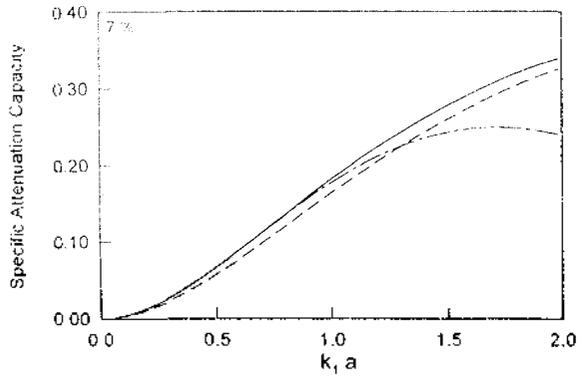
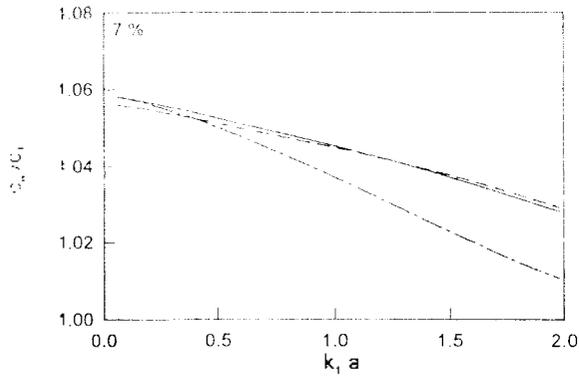


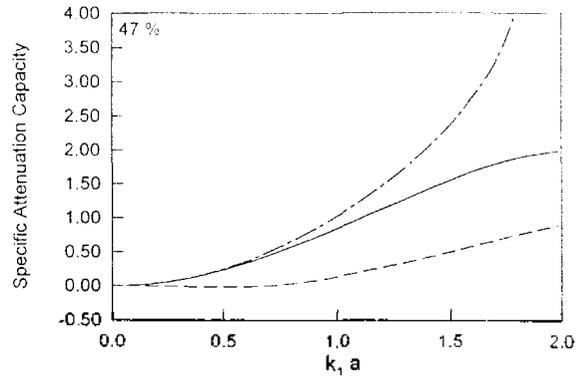
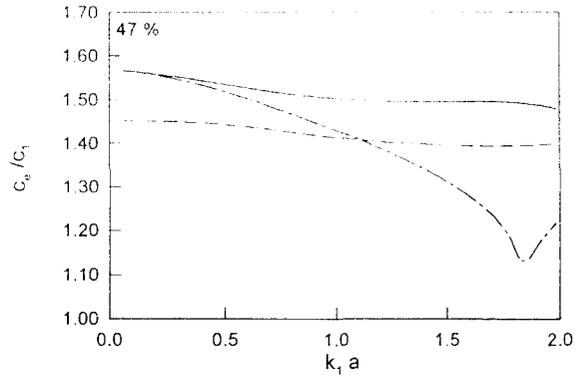
Fig 2. Moduli of the individual partial wave amplitudes for the scattering by a steel cylinder in aluminum. (—), $n=0$; (---), $n=1$; (- - - -), $n=2$; (.....), $n=3$.

생하고 이 주파수 이하에서는 산란체 주위를 돌아 일주하며 진행하는 파동(Franz waves)의 보강간섭이 파속에 서의 급격한 증가와 감쇠의 최대치를 만들게 됨을 알 수

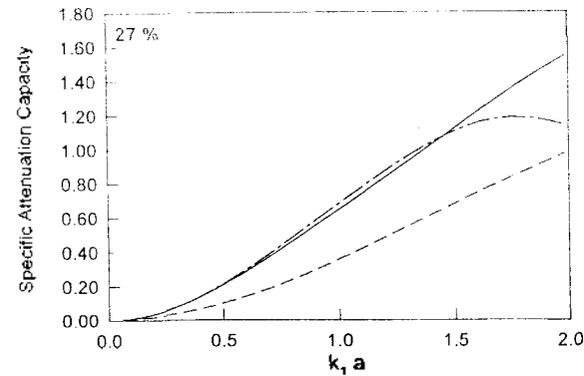
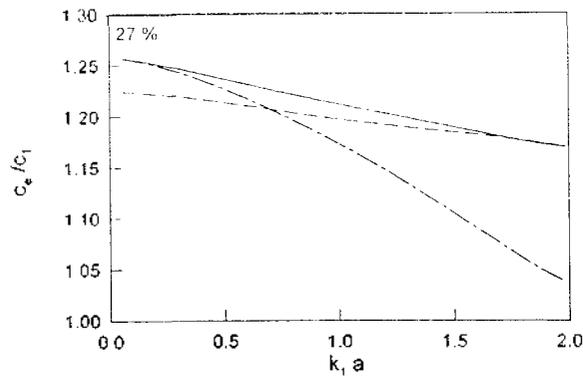
있다.^{(22), (23)} 또한 관심 있는 저주파수 대역에서는 산란체의 강제운동에 해당하는 $n=1$ 의 산란 부분파가 가장 큰 영향을 미치고 있음이 보여진다. 산란체 공명현상에 대한 더욱 상세한 해석은 공명산란이론(resonant scattering theory)을 통하여 가능하지만 본 연구의 범위를 넘어선다. 앞서 언급한 파속이 급격하게 증가하고 감쇠가 최대가 되는, Franz wave의 보강간섭이 일어나는 주파수는 체적비가 증가할수록 고주파수로 이동한다. 7%의 체적비에서는 DSC2를 제외한 나머지 세 이론은 서로 잘 일치하고 있음을 Fig. 1(a)에서 보여 주고 있다. DSC2에 의한 유효물성은 체적비에 관계없이 기지의 물성치에 수렴하고 있음을 알 수 있다. 즉, $\rho_e \rightarrow \rho_1, \mu_e \rightarrow \mu_1$ 이다. 이 결과는 Sabina와 Willis의 이론에 포함되어 있는 가정에 의한 것이며, 몇 가지 변수들의 고주파수에서의 거동을 보면 쉽게 확인될 수 있다. 충분히 큰 주파수에서 $h^2(k) \sim O((ka)^{-3})$ 이며 $\epsilon \sim O((ka)^{-1})$ 이므로 식(20), (21)은 의미를 잃게 된다. 그림에서 볼 수 있듯이 DSC2는 $k_1 a \approx 0.8$ 까지만 옳다. DSC2에서 채용된 분극이 일정하다는 가정하에서는 산란체와 기지의 물성이 같아지는 방법 이외에는 주어진 가정을 만족시킬 수 있는 길이 없다. 이와 같은 이유에서 DSC2로는 Franz 파의 최저차 공명만을 예측가능하다. 체적비가 증가할수록 이론들 간의 차이는 분명해진다. 한 가지 중요한 사실은 DSC1의 결과는 이론들 중 최소의 분산과 감쇠를 보인다는 점이다. 더욱이, 47%의 체적비 일 경우, $k_1 a \approx 0.6$ 이하의 주파수에서 MST2는 음의 감쇠를, MST1은 매우 작은 감쇠계수를 준다는 사실이다. 이 결과는 다음과 같은 두 가지 측면에서 해석되어 질 수 있다. 첫 번째는 고체적비일 경우 MST2에 가정되는 지수함수 형태의 쌍상관함수로는 두 번 산란된 파동을 정확하게 기술할 수 없고, 둘째는 이러한 조건에서는 준결정근사가 더 이상 옳지 않을 수도 있다는 점이다. 그러나, 위와 같은 음의 감쇠계수의 정량적인 규명은 매우 어려운 작업으로 생각된다. B/Al 복합재료의 동적성질은 Fig. 3에서 보여 주고 있다. 고려된 주파수 범위내에서 유효파동은 약하게 분산을 일으키고 주파수 증가에 따라 약간 감소하는 경향을 보인다. Steel/Al 복합재료의 요동치는 성질과는 매우 다르다. 저체적비에서는 DSC1과 MST1은 비슷하게 움직이나 DSC2는 두이론에서 많이 벗어나 있다. DSC2에 의한 파속은 steel/Al 복합재료에서와 같이 1에 수렴하고 있고 47%의 체적비에서 MST1은 거의 영에 가까운 감쇠를 보이고 있다.



(a) Normalized wave speed and specific attenuation capacity, $v_2 = 0.07$,



(c) Normalized wave speed and specific attenuation capacity, $v_2 = 0.47$.



(b) Normalized wave speed and specific attenuation capacity, $v_2 = 0.27$,

Fig 3. Effective normalized wave speed and specific attenuation capacity vs. frequency for boron/aluminum composite. (—), Present theory; (---), Sabina and Willis theory¹⁴; (-·-·-), Varadan et al. theory.⁶

IV. 결론

섬유강화 복합재료 내의 SH 탄성과 전파에 관하여 자기일치적인 방법으로 해석하였고, 그 결과 복합재료의 유효한 동적인 물성치를 예측할 수 있었다. 유효매질에 대한 자기일치조건은 주파수의 제한 없이 유도하였다. 본 연구에서의 이론에 의한 평균파동의 속도와 감쇠를 다중산란이론 및 또 다른 자기일치적 이론이 결과 비교하였다. 섬유체적비가 낮은 경우에는 제시된 이론은 정확한 쌍상관함수를 채택하는 다중산란이론과 일치하였으나, 또 다른 자기일치적 이론은 앞의 두 이론에 의한 결과와는 주목할 만한 불일치를 보였다. 고 체적비에서는 이론들은 유사한 경향을 가지지만, 각각의 이론은 서로 다른 결과를 보였다. 제안된 이론에 의한 결과의 특징은 상대적으로 적은 양의 분산과 물리적으로 구현 가능한 (physically realizable) 감쇠를 준다는 점이다. 다중산란이론이 체적비가 높은 경우 저주파수에서 음의 감쇠계수를 준다는 사실 또한 주목할 만 하다. 계산 결과로부터 섬유의 공명산란이 복합재료의 분산과 감쇠에 중요한 영향을

줄 수 있다는 사실을 발견할 수 있다. 공명산란의 영향은 공명산란이론의 맥락에서 설명되었다.

참 고 문 헌

1. L. L. Foldy, "The multiple scattering of waves," *Phys. Rev.* **67**, 107-119 (1945).
2. M. Lax, "The effective field in dense systems," *Phys. Rev.* **88**, 621-629 (1952).
3. P. C. Waterman and R. Truell, "Multiple scattering of waves," *J. Math. Phys.* **2**, 512-537 (1961).
4. V. K. Varadan, V. V. Varadan, and Y. H. Pao "Multiple scattering of elastic waves by cylinders of arbitrary cross section. I. SH waves," *J. Acoust. Soc. Am.* **63**, 1310-1319 (1978).
5. J. -Y. Kim, J. -G. Ih, and B. -H. Lee, "Dispersive wave propagation in the viscoelastic matrix reinforced by elastic fibers," *J. Acoust. Soc. Am.* **95**, 1213-1222 (1994).
6. V. K. Varadan, V. V. Varadan, and Y. Ma, "Multiple scattering of elastic waves by cylinders of arbitrary cross section. II. Pair-correlated cylinders," *J. Acoust. Soc. Am.* **78**, 1874-1878 (1985).
7. P. Soven, "Coherent-potential model of substitutional disordered alloys," *Phy. Rev.* **156**, 809-813 (1967).
8. B. Velicky, S. Kirkpatrick, and H. Ehrenreich, "Single-site approximations in the electronic theory of simple binary alloys," *Phy. Rev.* **175**, 747-766 (1968).
9. J. E. Gubernatis and J. A. Krumhansl, "Macroscopic engineering properties of polycrystalline materials: elastic properties," *J. Appl. Phys.* **46**, 1875-1883 (1975).
10. J. G. Berryman, "Theory of elastic properties of composite materials," *Appl. Phys. Lett.* **35**, 856-858 (1979).
11. A. J. Devaney, "Multiple scattering theory for discrete, elastic, random media," *J. Math. Phys.* **21**, 2603-2611 (1980).
12. R. Hill, "A self-consistent mechanics of composite materials," *J. Mech. Phys. Solids* **13**, 213-222 (1965).
13. B. Budiansky, "On the elastic moduli of some heterogeneous materials," *J. Mech. Phys. Solids* **13**, 223-227 (1965).
14. F. J. Sabina and J. R. Willis, "A simple self-consistent analysis of wave propagation in particulate composites," *Wave Motion* **10**, 127-142 (1988).
15. F. J. Sabina, V. P. Smyshlyaev, and J. R. Willis, "Self-consistent analysis of waves in a matrix-inclusion composite-I. Aligned spheroidal inclusions," *J. Mech. Phys. Solids* **41**, 1573-1588 (1993).
16. V. P. Smyshlyaev, J. R. Willis, and F. J. Sabina, "Self-consistent analysis of waves in a matrix-inclusion composite-II. Randomly oriented spheroidal inclusions," *J. Mech. Phys. Solids* **41**, 1589-1598 (1993).
17. P. G. J. Bussink, P. L. Iske, J. Oortwijn, and G. L. M. M. Verbist, "Self-consistent analysis of elastic wave propagation in two-dimensional matrix-inclusion composites," *J. Mech. Phys. Solids* **43**, 1673-1690 (1995).
18. J. -Y. Kim, J. -G. Ih, and B. -H. Lee, "Dispersion of elastic waves in random particulate composites," *J. Acoust. Soc. Am.* **97**, 1380-1388 (1995).
19. J. -Y. Kim, "A dynamic self-consistent analysis for elastic wave propagation in fiber reinforced composites," Accepted for publication, *J. Acoust. Soc. Am.* (1996).
20. P. M. Morse and H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics* (McGraw Hill, NewYork, 1953), p. 1466.
21. S. K. Bose and A. K. Mal, "Longitudinal shear waves in fiber-reinforced composite," *Int. J. Solids Structures.* **9**, 1075-1085 (1973).
22. L. Flax, G. Gaunaurd, and H. Uberall, "The theory of resonant scattering," in *Physical Acoustics*, edited by W. P. Mason and R. N. Thurston (Academic, New York, 1981), Vol. XV, Chap. 3, pp. 191-294.
23. D. Brill and G. Gaunaurd, "Resonance theory of elastic waves ultrasonically scattered from an elastic sphere," *J. Acoust. Soc. Am.* **81**, 1-21 (1987).
24. V. K. Kinra, "Dispersive wave propagation in random particulate composite," *Recent Advances in Composites in the U. S. and Japan*, ASTM STP864, 309-325 (1985).
25. V. K. Kinra, E. Ker, and S. K. Datta, "Influence of particle resonances on wave propagation in a random particulate composite," *Mech. Res. Commun.* **9**, 109-114 (1982).
26. G. N. Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions* Cambridge, U. P. NewYork, 1966)

부 록 : 콘벌루션 연산자의 산란체 면적에 대한 평균

콘벌루션 연산자의 산란체 면적에 대한 평균값을 구하는 과정을 간단한 요약한다. 식(6)과 같은 그린함수의 정의로부터 콘벌루션 연산자의 평균은 다음과 같이 표현된다. 즉,

$$\overline{S_x} = \frac{i}{4|\Omega|} \int_{\Omega} dr \int_{\Omega} dr' \partial_i \partial_j H_o(k|r-r'|), \quad (A1)$$

$$\overline{M_t} = \frac{i\omega^2}{4|\Omega|} \int_{\Omega} dr \int_{\Omega} dr' H_o(k|r-r'|), \quad (A2)$$

이다. $\overline{S_x}$ 는 2차 동방텐서(isotropic tensor)이므로, 다음과 같이 쓰여질 수 있다.

$$\overline{S_x} = \frac{i}{8|\Omega|} \delta_{ij} \int_{\Omega} dr \int_{\Omega} dr' \nabla^2 H_o(k|r-r'|). \quad (A3)$$

더욱이 파동방정식에 대한 그린함수의 정의로부터 위의 식은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \overline{S_x} &= \frac{-i}{4|\Omega|} \delta_{ij} \int_{\Omega} dr \int_{\Omega} dr' [H_o(k|r-r'|) + \delta(|r-r'|)] \\ &= \frac{-i}{8|\Omega|} \delta_{ij} \left[\frac{k^2}{|\Omega|} \int_{\Omega} dr \int_{\Omega} dr' H_o(k|r-r'|) + 1 \right]. \end{aligned} \quad (A4)$$

식(A2)과 (A3)에서 다음과 같은 적분이 공통적으로 발견된다. 즉,

$$I = \int_{\Omega} dr \int_{\Omega} dr' H_0(k|r-r'|). \tag{A5}$$

적분을 쉽게 하기 위하여 베셀함수의 합정리⁽²⁶⁾를 이용한다.

$$H_0(k|r-r'|) = \sum_{m=0}^{\infty} \cos m(\phi-\phi') \begin{cases} J_m(kr)H_m(kr'), r < r' \\ J_m(kr')H_m(kr), r > r' \end{cases} \tag{A6}$$

합정리를 식(A5)에 적용하고 r과 r'에 관한 적분으로 표현하면

$$\begin{aligned} I &= (2\pi)^2 \int_0^a r \left[\int_0^r r' J_0(kr') H_0(kr) dr' + \int_r^a r' J_0(kr) H_0(kr') dr' \right] \\ &= \frac{(2\pi)^2}{k} \int_r^a r \{ [H_0(kr) J_1(kr) - J_0(kr) H_1(kr)] \\ &\quad + a J_0(kr) H_1(ka) \} dr, \end{aligned} \tag{A7}$$

으로 된다. 피적분항의 각괄호(bracket) 안에 있는 항에 베셀함수의 Wronskian⁽²⁶⁾을 이용하면 다음과 같이 아주 간단한 형태가 된다.

$$I = \frac{(2\pi)^2}{k} \int_r^a r \left[\frac{2i}{k\pi} + a H_1(ka) J_0(kr) \right] dr. \tag{A8}$$

위의 간단한 적분을 수행하면

$$I = \frac{4\pi a^2}{k^2} [i + \pi H_1(ka) J_1(ka)], \tag{A9}$$

이 되고 따라서 콘벨루션 연산자의 평균은

$$\overline{S_r} = \frac{i\pi H_1(ka) J_1(ka)}{\mu_0}, \tag{A10}$$

$$\overline{M_r} = \frac{1}{\rho_0} [1 - i\pi H_1(ka) J_1(ka)], \tag{A11}$$

이 된다.

▲ 김진연



1963년 12월 4일생

1986년 2월: 연세대학교 기계공학과 (학사)

1988년 2월: 한국과학기술원 기계공학과(석사)

1994년 2월: 한국과학기술원 기계공학과(박사)

1992년 1월~현재: 대우전자 선임연구원

※ 관심분야: wave propagation and scattering, 산란현상을 이용하는 비파괴검사, fuzzy structure의 진동해석