

Von-Kármán 회전 유동 하에서의 물의 결빙

Freezing of Water in Von-Kármán Swirling Flow

유 주 식*
J. S. Yoo

Key words : Phase change(상변화), Freezing(응고), Von-Kármán swirling flow(von-Kármán 회전 유동), Growth of solid(고체의 성장), Freezing rate(응고 속도)

Abstract

Freezing of water in von-Kármán swirling flow is considered. The transient behavior of the temperature distribution in both solid and liquid phases and freezing rate are determined. The fluid flow induced by the rotation of solid strongly inhibits the freezing process. The thickness of frozen layer is inversely proportional to the square root of the angular velocity of solid. As the angular velocity or initial liquid temperature becomes larger, the freezing process is more strongly inhibited by the fluid flow. When phase change is present, the transient heat transfer rate is greater than the case with no phase change.

기 호 설 명

- | | |
|--|--|
| <p>a, b : 유체의 속도 성분의 표현식에서의 계수</p> <p>C : 상수</p> <p>c : 무한히 먼 곳에 있는 유체의 속도 크기</p> <p>C_s : 고체의 비열</p> <p>D_i : 액체의 정상 상태의 온도 분포 표현식에 나타나는 계수</p> <p>erf : 에러 함수</p> <p>$erfc$: 보충 에러 함수</p> <p>F, G, H : 반경, 각도, 수직 방향의 무차원화된 속도 성분</p> <p>K : 열전도도</p> <p>K_R : 고체와 액체의 열전도도 비, K_s/K_l</p> | <p>L : 잠열</p> <p>NF : 전개 함수의 갯수</p> <p>Nu : Nusselt 수, 고체와 액체의 경계면에서의 $-\frac{d\theta_l}{d\zeta}$</p> <p>$Nu_{ss}$: 정상 상태에서의 Nusselt 수</p> <p>P : 무차원화된 압력</p> <p>p : 압력</p> <p>Pr : Prandtl 수, ν/a_l</p> <p>r : 반경 방향의 좌표</p> <p>Ste : Stefan 수, $C_s(T_F - T_C)/L$</p> <p>T : 온도</p> <p>T_C, T_b, T_F : 찬 온도, 뜨거운 온도, 응고 온도</p> <p>u, v, w : 반경, 각도, 수직 방향의 속도 성분</p> <p>$X(t)$: 고체의 성장 길이</p> <p>X_{ev} : 정상 상태의 고체의 성장 길이</p> |
|--|--|

* 안동대학교, 기계공학 교육과

z : 수직좌표

그리스 문자

- α : 열 확산 계수
- α_R : 고체와 액체의 열 확산 계수의 비, α_S/α_L
- δ_S : 무차원화된 고체의 길이
- δ_L : 고체와 액체의 경계면으로부터 온도경계면($\theta = \theta_R$)까지의 거리
- δ_{eq} : 평형 상태에서의 무차원화된 고체의 길이
- ζ : 무차원 좌표, $\sqrt{\frac{\Omega}{\nu}} z$
- η : 치환된 변수, $\zeta/\sqrt{\tau}$
- η_S : 변환된 좌표, ζ/δ_S
- η_L : 변환된 좌표, $(\zeta - \delta_S)/\delta_L$
- θ : 무차원 온도, $(T - T_C)/(T_F - T_C)$
- θ_L : 액체 영역에서의 무차원 온도, $(T - T_H)/(T_F - T_H)$
- $\frac{d\theta_L(0)}{d\zeta}$: 경계면의 액체 쪽에서의 정상 상태의 온도 구배
- θ_R : 온도 비, $(T_H - T_C)/(T_F - T_C)$
- λ : 변수, $exp(-c\zeta)$
- ν : 동점성 계수
- ρ : 밀도
- σ : Neumann 문제에서의 고체의 성장 계수
- τ : 무차원화된 시간, $\frac{\Omega}{Pr} Ste \cdot t$
- Ω : 고체의 회전 속도

하 첨 자

- L : 액체
- S : 고체
- ∞ : 무한대

1. 서 론

액체에서 고체로의 상변화(phase change)가 있는 물질에서의 액체의 결빙과정(freezing process)은, 금속의 주조(casting), 음식의 냉동, 얼음의 생성, 열에너지 저장 시스템 등과 같은 넓은 산업적인 응용 분야로 인해 많은 관심을 받아왔다. 이 분

야에 대한 첫 연구는 Stefan에 의해 수행된 극지의 얼음(polar ice) 두께에 대한 연구인 것으로 알려져 있는데, 이러한 이유로 인하여 결빙 문제는 종종 “Stefan 문제”로 불려오기도 한다⁽¹⁾. 그 이후 상변화 과정에 대한 많은 실험적인 연구와 해석적인 연구들이 수행되었다. 초기에는 액체에서의 유동을 전혀 고려하지 않고 주로 정지해 있는 액체와 고체에서의 순수한 전도(conduction)에 의한 열전달만을 고려하여 온도 분포와 결빙(freezing) 혹은 용해(melting) 과정을 연구하였다⁽²⁾. 그리고 액체 내에서 유체의 흐름(fluid flow)이 있는 경우, 즉, 강제대류(forced flow)^{(3)~(5)} 혹은 자연대류(natural convection)^{(6)~(8)}를 고려한 상변화 문제에 대한 연구도 역시 많이 수행되어 왔다.

강제대류(forced convection)가 있을 때의 상변화에 대한 거의 대부분의 연구들은, 액체와 고체의 경계면에서의 액체 쪽의 대류 열전달률(convective heat transfer rate)을 알고 있는 일정한 값으로 놓고서 고체에서의 온도 분포와 경계면의 위치를 결정하였다^{(3)~(5)}. 즉, 액체에서의 온도 분포의 시간적인 변화는 전혀 고려하지 않았다. 그러나 결빙과정과 액체에서의 온도 분포는 서로 영향을 받을 수가 있다. 비교적 최근에 Yoo⁽⁹⁾는 고체와 액체에서의 온도 분포의 시간적인 변화를 모두 고려하여 상변화 문제를 연구하였다. 그 연구에서는 무한히 큰 평면원반(disk)의 회전으로 인해 일어나는 유동장 하에서의 비압축성 유체(incompressible fluid)의 상변화를 고려하였다. Yoo⁽⁹⁾의 연구는, 강제 대류 하에서 고체와 액체의 비정상 거동(unsteady behavior)을 모두 고려한 최초의 연구인 것으로 알고 있다. Yoo⁽⁹⁾는 열전달률과 고체의 성장(growth of solid)이 정상 상태에 도달하는 시간에 대해 큰 관심을 두었는데, Stefan 수가 작은 경우에는 경계면의 액체 쪽에서의 열전달률을 일정하다고 가정해도 되지만 Stefan 수가 큰 경우에는 액체에서의 온도 분포의 시간적인 변화를 고려해야 한다는 것을 보였다.

본 연구에서는 무한히 넓은 평면 얼음 판의 회전에 의해 일어나는 유동장 하에서의 물의 결빙 과정을 조사한다. Fig.1과 같이 일정한 각속도로 회전하고 있는 무한히 큰 원반(disk) 아래에 반무한 액

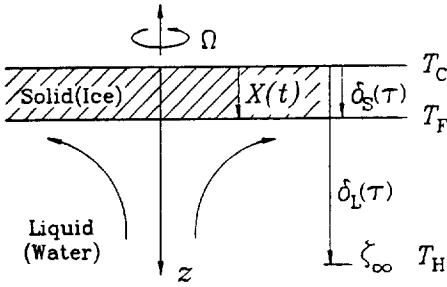


Fig.1 Schematic of physical system

체 층(semi-infinite fluid layer)이 접해 있다. 원반이 느린 속도로 회전하고 있으므로 유체의 유동은 층류(laminar)라고 가정한다. 따라서 유체에서의 속도장(velocity field)은 von-Kármán의 상사식(similarity equation)으로 기술되는데 이것은 일반적으로 von-Kármán swirling flow라고 불리어지고 있다^{(10),(11)}. 초기($t=0$)에는 유체와 원반의 온도가 T_H 로 일정하다. 그러나 $t>0$ 에서 원반의 온도를 결빙온도(freezing temperature) 이하의 온도 T_c ($T_c < T_f$)로 유지시킨다. $T_c < T_f$ 이므로 자연스럽게 액체에서 고체로의 상변화가 생긴다. 이때 일어나는 고체와 액체에서의 온도 변화의 과도 기적인 거동(transient behavior)과 결빙 속도를 동시에 고려한다. 유체유동이 없다면 이 문제는 상변화 문제에 있어서 가장 기본적인 Neumann 문제가 된다⁽¹⁾. 따라서 본 연구의 한 중요한 면은, Neumann 문제에 있어서 고체의 회전에 의한 강제 대류가 있는 경우 상변화가 어떻게 일어나는가를 조사하는 것이 된다. 본 문제의 기본 구조는 참고 문헌 Yoo⁽⁹⁾에 있는 것과 같다. 여기에서는 온도 분포에 대한 약간의 해석적인 표현을 구하고 Stefan 수와 온도 비율 $(T_H - T_c)/(T_f - T_c)$ 등이 물의 결빙과정(freezing process)에 미치는 영향을 조사한다.

2. 해 석

고려하고 있는 문제의 물리적인 구조는 Fig.1과 같다. 고체와 액체에서의 물성치(thermophysical property) 들은 모두 일정하다고 가정한다. 초기상

태에 있어서 유체의 온도는 T_H ($> T_f$)로 일정하게 유지되고 있다. 그리고 고체의 회전에 의해 일어나는 유동장(flow field)은 다음과 같은 경계층 방정식(boundary layer equation)에 의해 결정된다⁽¹⁰⁾.

$$H + 2F = 0 \tag{1}$$

$$F' - HF - F + G^2 = 0 \tag{2}$$

$$G' - HG' - 2FG = 0 \tag{3}$$

$$P - HP + H' = 0 \tag{4}$$

여기에서 프라임 부호는 ζ 에 대한 미분을 나타낸다. 그리고 경계조건은 다음과 같다.

$$G(0) = 1, F(0) = H(0) = G(\infty) = F(\infty) = 0 \tag{5}$$

위의 방정식을 유도하기 위해 다음과 같은 상사해(similarity solution)가 적용되었다.

$$u = r\Omega F(\zeta), v = r\Omega G(\zeta), w = \sqrt{\nu\Omega} H(\zeta), p = -\rho\nu\Omega P(\zeta) \tag{6}$$

$$\text{여기에서 } \zeta = \sqrt{\frac{\Omega}{\nu}} z \tag{7}$$

$\zeta \rightarrow \infty$ 가면 원판(disk)을 향한 유한한 크기의 속도를 갖는 유체의 흐름이 있는데 이 속도를 다음과 같이 정의한다.

$$H(\infty) = -c \ (c > 0) \tag{8}$$

식 (1)을 이용하여 식 (2)와 (3)에서 $F(\zeta)$ 를 소거하면 $G(\zeta)$ 와 $H(\zeta)$ 에 대한 관계식이 구해진다. 그리고 이때의 해는 Runge-Kutta 방법이나 다음과 같이 $\exp(-c\zeta)$ 에 대한 시리즈 해(series solution)로써 구할 수 있다⁽¹²⁾.

$$G(\zeta) = c^2 \sum_{i=1}^{NF} a_i \lambda^i \tag{9}$$

$$H(\zeta) = c(-1 + \sum_{i=1}^{NF} b_i \lambda^i) \tag{10}$$

$$\text{여기서 } \lambda = e^{-c\zeta} \tag{11}$$

$t=0$ 에서 표면($z=0$) 온도를 T_c 로 낮추고 $t>0$

에서 계속 일정하게 유지시킨다. T_C 가 결빙온도 T_F 보다 낮으면 표면에서 응고가 일어나며 액체 영역으로 확대되어 나갈 것이다. 이 현상은 유체의 속도장과 온도장 모두에 있어서 비정상 문제(unsteady problem)를 구성한다. 그러나 Neumann의 해로부터 액체의 결빙은 매우 천천히 일어난다는 것을 알 수 있다. 그와 반대로, 초기에 정지해 있는 원판을 순간적으로 회전(impulsive rotating)시켰을 때 일어나는 유체유동도 단지 2radian의 원판의 회전 운동기간에 점근적인 정상 상태(asymptotic steady state)에 도달한다⁽¹²⁾. 따라서 유체의 속도장은 액체 영역 내에서 준 정상 상태(quasi-steady)를 유지한다고 가정한다. 그리고 본 문제에 있어서는 반경 방향에 대한 결빙된 고체층의 두께 변화가 없다. 왜냐하면 액체 영역에서의 온도 분포는 1차원적으로 고려될 수 있기 때문이다.^{(9), (10), (13)~(17)}.

이러한 가정 하에서 액체와 고체 영역에서의 온도 분포는 다음과 같은 에너지 방정식(energy equation)으로 기술된다. 고체 영역에서의 온도 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha_s \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (12)$$

액체 영역에서는 유체의 흐름(fluid flow)이 있으며 온도 분포는 다음 방정식으로써 기술된다.

$$\frac{\partial T}{\partial t} + w(z; t) \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha_l \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (13)$$

상변화가 일어나고 있는 고체와 액체의 경계면 $z = X(t)$ 에서는, 전도(conduction)에 의해 제거되는 열은 상변화에 의해 없어지는 잠열(latent heat)과 같다는 에너지 균형(energy balance)으로부터

$$K_s \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_s - K_l \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_l = \rho L \frac{dX}{dt} \text{ at } z = X(t) \quad (14)$$

의 관계식이 주어진다. 그리고 다른 경계조건들은 다음과 같다.

$$T = T_C \text{ at } z = 0$$

$$\begin{aligned} T &= T_F & \text{at } z &= X(t) \\ T &= T_\infty & \text{as } z &\rightarrow \infty \end{aligned} \quad (15)$$

응고(solidification)가 일어나기 바로 직전의 액체의 온도는 균일하며 T_∞ 와 같다. 식 (13)에서 대류항(convective term)이 없다면 이 문제는 잘 알려진 Neumann의 해를 갖는 Stefan 문제가 된다⁽¹¹⁾.

특성 길이를 $\sqrt{\nu/\Omega}$ 로 택하여 다음과 같은 무차원 변수를 도입한다.

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{\Omega}{Pr} Ste \cdot t, & \theta &= \frac{T - T_C}{T_F - T_C} \\ Ste &= \frac{C_s(T_F - T_C)}{L}, & Pr &= \frac{\nu}{\alpha_l} \end{aligned} \quad (16)$$

식 (12)~(15)는 다음과 같이 변환된다.

$$\text{In the solid : } Ste \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \alpha_R \frac{\partial^2 \theta}{\partial \zeta^2} \quad (17)$$

$$\text{In the liquid : } Ste \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + Pr H(\zeta; \tau) \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \zeta^2} \quad (18)$$

그리고

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial \zeta} \right)_s - \frac{1}{K_R} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \zeta} \right)_l = \frac{1}{\alpha_R} \frac{d\delta_s}{d\tau} \text{ at } \zeta = \delta_s(\tau) \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \theta &= 0 & \text{at } \zeta &= 0 \\ \theta &= 1 & \text{at } \zeta &= \delta_s(\tau) \\ \theta &= \theta_R & \text{as } \zeta &\rightarrow \infty \end{aligned} \quad (20)$$

$$\text{여기에서 } \delta_s(\tau) = \frac{X(t)}{\sqrt{\nu/\Omega}} \quad (21)$$

$$\text{그리고 } \alpha_R = \frac{\alpha_s}{\alpha_l}, K_R = \frac{K_s}{K_l}, \theta_R = \frac{T_\infty - T_C}{T_F - T_C} \quad (22)$$

$$\text{여기에서 } \theta = \theta(\eta = \frac{\zeta}{2\sqrt{\tau}}) \quad (23)$$

로 놓으면 식 (17)과 (18)은 다음과 같이 변환된다.

$$\text{In the solid : } Ste(2\eta) \frac{d\theta}{d\eta} = -\alpha_R \frac{d^2\theta}{d\eta^2} \quad (24)$$

In the liquid :

$$Ste(2\eta) \frac{d\theta}{d\eta} - 2\sqrt{\tau} PrH(\xi; \tau) \frac{d\theta}{d\eta} = - \frac{d^2\theta}{d\eta^2} \quad (25)$$

따라서 $\tau \rightarrow 0$ 의 극한적인 경우에서 $(\frac{\xi}{2\sqrt{\tau}}) \rightarrow O(1)$

이면, 식 (25)에서의 대류항(convective term)은 제거되고 모든 경계조건과 초기 조건을 만족하는 해는 단일 변수 η 로 표현된다⁽¹⁾. 그 해는 다음과 같다.

$$\text{In the solid : } \theta = \frac{1}{\text{erfc}(\sigma)} \text{erf}\left(\frac{\xi}{2\sqrt{\frac{\alpha_R}{Ste}\tau}}\right) \quad (26)$$

In the liquid :

$$\theta = \theta_R - \frac{\theta_R - 1}{\text{erfc}(\sigma\sqrt{\alpha_R})} \text{erfc}\left(\frac{\xi}{2\sqrt{\frac{1}{Ste}\tau}}\right) \quad (27)$$

$$\text{그리고 } \delta_s(\tau) = 2\sigma \sqrt{\frac{\alpha_R}{Ste}\tau} \quad (28)$$

여기에서 고체의 성장률(growth rate)을 나타내는 변수 σ 는 다음의 관계식으로부터 결정된다.

$$\frac{\exp(-\sigma^2)}{\text{erfc}(\sigma)} - \frac{\sqrt{\alpha_R}}{K_R} \frac{\theta_R - 1}{\text{erfc}(\sigma\sqrt{\alpha_R})} \exp(-\alpha\sigma^2) = \frac{\sqrt{\pi}}{Ste} \sigma \quad (29)$$

위의 해는, 결빙이 시작되는 초기에서의 과정은 순전히 전도(conduction)에 의해 진행됨을 보여 준다. 그리고 $\tau \rightarrow 0$ 의 극한은 $\Omega \rightarrow 0$ 의 극한에 의해서도 일어날 수 있다. 따라서 $\Omega \rightarrow 0$ 의 극한적인 경우에서의 해는 Neumann의 해와 같게 된다. 여기에서 변수 $\xi/\sqrt{\tau}$ 는 점성 계수 ν 와 회전 속도 Ω 와 무관하다는 것에 주의할 필요가 있다.

식 (17)~(21)의 해의 시간 변화적인 거동은 수치적인 방법을 사용하여 구한다. 상변화 문제를 해석하는 수치적인 방법은 여러 가지가 있는데⁽¹⁸⁾

여기에서는 body-fitted 좌표계를 이용한 방법을 사용한다⁽¹⁹⁾.

고체와 액체의 경계면에서의 온도는 $\xi \rightarrow \infty$ 에서의 온도보다 낮기 때문에 $\theta = \theta_R$ 인 일종의 온도 전선(temperature front) $\delta_L(\tau)$ 가 시간이 지남에 따라 액체속을 전파해 나간다. 그리고 실제의 계산에 있어서는, 전 영역에 있어서 균일한 온도 $\theta = \theta_R$ 인 $\xi > \delta_L(\tau)$ 의 영역을 고려해 줄 필요가 없다.

다음과 같이 새로운 공간 좌표를 도입하여 계산 영역을 고정시킨다.

$$\eta_s = \frac{\xi}{\delta_s(\tau)}, \quad \eta_l = \frac{\xi - \delta_s(\tau)}{\delta_L(\tau)} \quad (30)$$

여기에서, 고체 영역에서는 $0 \leq \xi < \delta_s(\tau)$ 이고, 액체 영역에서는 $\delta_s(\tau) < \xi \leq \xi_\infty$ 이며 $\delta_L(\tau) = \xi_\infty - \delta_s(\tau)$ 이다. 따라서 η_s 와 η_l 의 범위는

$$0 \leq \eta_s < 1, \quad 0 < \eta_l \leq 1 \quad (31)$$

로 된다. 그리고 식 (17)~(20)은 다음과 같이 변환된다.

$$\text{In the solid : } Ste \left[\frac{\partial \theta}{\partial \tau} - \frac{\eta_s}{\delta_s} \frac{d\delta_s}{d\tau} \frac{\partial \theta}{\partial \eta_s} \right] = \frac{\alpha_R}{\delta_s^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta_s^2} \quad (32)$$

$$\text{In the liquid : } Ste \left[\frac{\partial \theta}{\partial \tau} - \left(\frac{\eta_l}{\delta_L} \frac{d\delta_L}{d\tau} + \frac{1}{\delta_L} \frac{d\delta_s}{d\tau} \right) \frac{\partial \theta}{\partial \eta_l} \right] + PrH(\delta_L \eta_l) \frac{1}{\delta_L} \frac{\partial \theta}{\partial \eta_l} = \frac{1}{\delta_L^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta_l^2} \quad (33)$$

$$\frac{1}{\delta_s} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \eta_s} \right)_s - \frac{1}{K_R \delta_L} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \eta_l} \right)_L = \frac{1}{\alpha_R} \frac{d\delta_s}{d\tau} \text{ at } \eta_s = 1, \eta_l = 0 \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \theta &= 0 \text{ at } \eta_s = 0, \quad \theta = 1 \text{ at } \eta_s = 1 \\ \theta &= 1 \text{ at } \eta_l = 0, \quad \theta = \theta_R \text{ at } \eta_l = 1 \end{aligned} \quad (35)$$

비효율적인 계산 영역을 피하기 위해 온도 전선(temperature front) $\delta_L(\tau)$ 를 도입하였다. 그리고 $\delta_L(\tau)$ 를 다음과 같이 놓는다.

$$\delta_L(\tau) = C \delta_s(\tau) \quad (36)$$

여기에서 상수 C 는 계산 기간에서 ξ_∞ 를 포함시킬

수 있도록 충분히 크게 잡는다.

변환된 식 (32)와 (33)을 함축적인 유한 차분식(implicit finite difference equation)으로 바꾼다. 차분 방정식에서 τ^{i+1} 에서의 온도 분포를 구하기 위해서는, 경계면의 위치 $\delta_s(\tau)$ 와 $\frac{d\delta_s(\tau)}{d\tau}$ 가 입력치(input)로써 요구된다. 우선, τ^i 에서의 $\frac{\partial\theta_s}{\partial\eta_s}$, $\frac{\partial\theta_L}{\partial\eta_L}$, $\delta_s(\tau)$ 를 사용하여 식 (34)로부터 $\frac{d\delta_s(\tau)}{d\tau}$ 를 구한다. 이 값을 식 (32)와 (33)의 차분화시킨 방정식에 입력치로 사용한다. 그리고, 만일 $\tau = \tau^i$ 에서 $\tau = \tau^{i+1}$ 까지의 기간 동안에 식 (34)에서의 $\frac{\partial\theta_s}{\partial\eta_s}$ 와 $\frac{\partial\theta_L}{\partial\eta_L}$ 를 상수로 가정하여 τ^i 에서의 값과 같다고 가정하면 차분화된 식 (34)는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\delta_s d\delta_s = Q d\tau, \quad Q: \text{상수} \tag{37}$$

$$\text{이 식으로부터 } \delta_s^{i+1} = \sqrt{(\delta_s^i)^2 + 2Q(\tau^{i+1} - \tau^i)} \tag{38}$$

를 얻는다. 여기에서의 값 δ_s^{i+1} 를 차분 방정식에서의 입력치로 사용한다.

지배 방정식을 유한 차분 방정식(finite difference equation)으로 만드는 데 있어서, 고체 영역에서는 균일 격자(uniform grid)계를 사용하고, 액체 영역에서는 경계면 부근의 얇은 온도 경계층(boundary layer)을 분해하기 위해 다음과 같은 불균일 격자계를 사용한다.

$$(\eta_i)_i = \left(\frac{i-1}{N-1} \right)^{1.7} \tag{39}$$

여기에서 N 은 액체 영역에 있는 격자점의 총수이다.

고체 영역에서는 100개, 액체 영역에서는 500개의 격자점(grid point)을 사용하였다. 그리고 식 (32)와 (33)으로부터 나오는 차분 방정식은 트리다이어그널 매트릭스 알고리즘(tridiagonal matrix algorithm)을 이용하여 반복 계산을 하지 않고 바로 풀었다. 위의 방법을 사용하여 Neumann 문제를 풀었을 경우 엄밀해(exact solution)와 0.1%

범위 이내에서 일치하였으며, 유체 유동이 있는 경우에는 시간이 지남에 따라 엄밀한 정상 상태(exact steady state)로 접근해 갔다.

3. 결과 및 논의

Neumann 문제⁽¹⁾에 있어서는 경계조건을 만족하는 정상상태(steady state)의 해가 없으며 고체는 다음의 관계식에 따라 계속 자라난다.

$$X(t) = 2\sigma\sqrt{ast} \tag{40}$$

그러나 본 문제에 있어서는 식 (13)에서 유체의 수직방향 속도가 음의 값(negative value)을 가지므로 시간이 무한히 지나감에 따라 시스템은 최종 정상상태(steady state)에 도달하게 된다. 식 (12)~(15)에서 $\partial/\partial t = 0$ 로 하면 정상상태에 대한 식이 된다. 정상상태의 해는 다음과 같이 구해진다.

고체 영역에서는 선형적인 온도 분포가 확립된다.

$$T(z) = \frac{T_F - T_C}{X_w} z + T_C \tag{41}$$

액체 영역에서는 온도를 다음과 같이 놓으면,

$$\theta_L(\xi) = \frac{T(\xi) - T_H}{T_F - T_H} \tag{42}$$

식 (13)은

$$\frac{d^2\theta_L}{d\xi^2} - PrH(\xi) \frac{d\theta_L}{d\xi} = 0 \tag{43}$$

로 되며 경계조건은 다음과 같이 된다.

$$\theta_L = 1 \text{ at } \xi = 0, \theta_L = 0 \text{ as } \xi \rightarrow \infty \tag{44}$$

여기서 $H(\xi)$ 는 식 (10)으로 주어지므로 $\theta_L(\xi)$ 도 역시 변수 λ 로 표현될 수 있다. 해는 다음과 같다.

$$\theta_L(\xi) = \sum_{k=0}^{NF} D_k \lambda^{k+Pr} \tag{45}$$

여기에서 $D_k = - \frac{Pr}{k(k+Pr)} \sum_{j=1}^k b_j D_{k-j} (k-j+Pr)$ (46)

이고 D_0 는

$$\sum_{k=0}^{NF} D_k = 1 \quad (47)$$

에 의해 결정된다.

성장할 수 있는 최대 고체의 길이(X_{eq})는 경계면에서의 에너지 균형(energy balance)을 나타내는 식 (14)로부터 구할 수 있다.

$$X_{eq} = \frac{K_s}{K_l} \frac{T_F - T_c}{T_F - T_H} \sqrt{\frac{\nu}{\Omega}} \left(\frac{d\theta_L(0)}{d\zeta} \right)^{-1} \quad (48)$$

$$\text{여기에서 } \frac{d\theta_L(0)}{d\zeta} = -c \sum_{k=0}^{NF} (k + Pr) D_k \quad (49)$$

여기에서 D_k 는 Prandtl 수만의 함수이므로 $\frac{d\theta_L(0)}{d\zeta}$ 도 Prandtl 수만의 함수이다. 따라서 성장된 고체의 길이는 다음과 같은 관계식으로 표현된다.

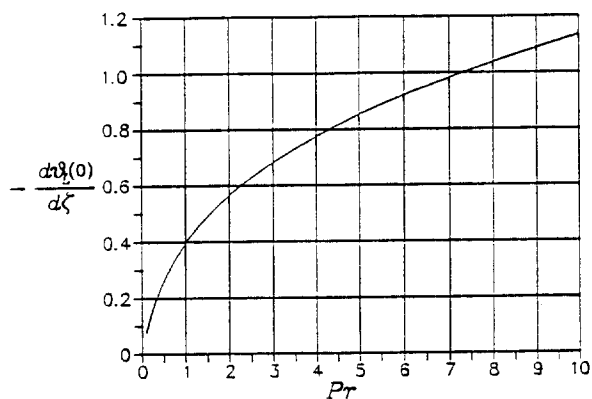


Fig.2 Steady-state heat transfer at the liquid side of solid-liquid interface ($\frac{d\theta_L(0)}{d\zeta}$) as a function of Prandtl number(Pr).

$$X_{eq} = K_R \frac{1}{1 - \theta_R} \frac{1}{\sqrt{\Omega}} F(Pr) \quad (50)$$

윗 식으로부터, 성장된 고체의 길이(X_{eq})는 $\sqrt{\Omega}$ 에 역비례한다는 것을 알 수 있다. 즉, 고체의 회전에 의해 일어나는 유체유동은 그만큼 고체의 성장을 방해한다. 그리고 물질의 잠열(latent heat)과 비열(specific heat)은 최종 평형상태에 아무 영향을 미치지 않는다. 즉, 이들 물성치들은 결빙에 있어서의 과도기적인 거동(transient behavior)만 지배하는 변수들이다. $\Omega \rightarrow 0$ 혹은 $\theta_R \rightarrow 1$ 의 극한적인 경우에 있어서는 Neumann 해와 같은 해를 가지며 $X_{eq} \rightarrow \infty$ 가 된다. 고체와 액체의 경계면에서의 정상상태의 열전달률 ($\frac{d\theta_L(0)}{d\zeta}$)를 Prandtl 수의 함수로써 Fig.2에 도시하였다. 식 (48)과 Fig.2로부터 Prandtl 수가 증가하면 성장할 수 있는 고체의 길이는 작아진다는 것을 알 수 있다.

결빙 온도(freezing temperature) 부근에서의 물과 얼음의 대략적인 물성치들을 Table 1에 나타내었다. 이들 물성치들로부터 무차원 변수 α_R , K_R , Pr 은 각각 $\alpha_R = 8.264$, $K_R = 3.669$, $Pr = 10$ 이 된다. 그리고 물의 결빙온도 $T_F = 0^\circ\text{C}$ 이므로 $T_H = 8.22^\circ\text{C}$, $T_c = -8.22^\circ\text{C}$ 로 택하면 무차원 변수 Ste , θ_R 은 각각 $Ste = 0.05$, $\theta_R = 2$ 로 된다. 물의 결빙에 대한 하나의 보기로써 이들 값들을 변수로 하였을 때 성장하는 고체의 길이 $\delta_s(\tau)$ 를 구하여 Fig.3에 도시하였다. 식 (48)로부터 무차원화된 고체의 최종 성장 길이는 다음과 같이 된다.

$$\delta_{eq} = K_R \frac{1}{1 - \theta_R} \left(\frac{d\theta_L(0)}{d\zeta} \right)^{-1} \quad (51)$$

위의 변수들에 대해서는 $\delta_{eq} = 3.235$ 이며 계산된 $\delta_s(\tau)$ 는 시간이 지남에 따라 평형 상태 δ_{eq} 로 접근해간다. 그리고 고체의 회전 속도 Ω 가 물의 결빙 과정에 미치는 영향은 차원이 있는 실제 시간 t 에

Table 1 Properties of water and ice near the freezing temperature $T_F = 0^\circ\text{C}$

C_s	K_s	K_l	L	α_s	α_l	ν
2.05 J/gram·K	0.0222 W/cm·K	0.00605 W/cm·K	334.9 J/gram	0.0119 cm ² /sec	0.00144 cm ² /sec	0.0144 cm ² /sec

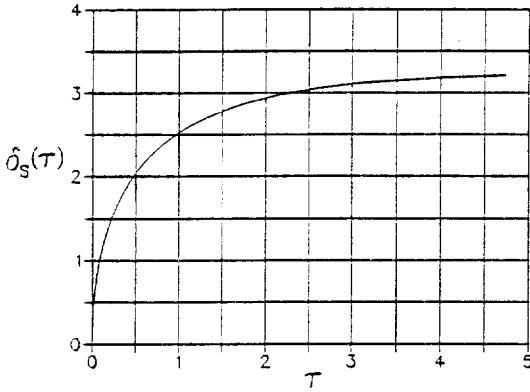


Fig.3 Dimensionless growth length of ice ($\delta_s(\tau)$) as a function of dimensionless time τ . The approximate properties of water and ice near the freezing temperature ($T_f=0^\circ\text{C}$) are given in Table 1. Hot and cold temperatures are taken as $T_H=8.22^\circ\text{C}$, $T_C=-8.22^\circ\text{C}$. These values give the dimensionless parameters as $Ste=0.05$, $\theta_R=2$, $\alpha_R=8.264$, $K_R=3.669$ and $Pr=10$. For this system $\delta_{eq}=3.235$.

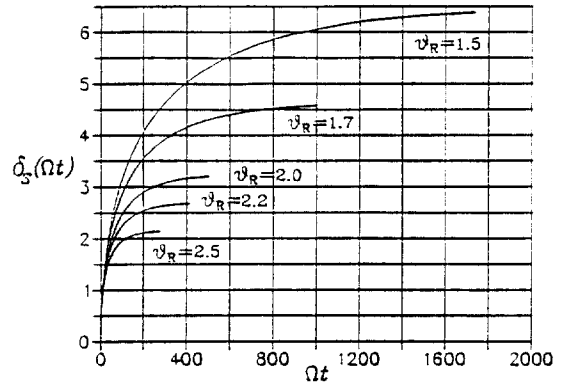


Fig.5 Dimensionless growth length of ice (δ_s) as a function of dimensionless time (Ωt) for several temperature ratios with $Ste=0.1$, $\alpha_R=8.264$, $K_R=3.669$, $Pr=10$: $\theta_R=1.5$ ($\delta_{eq}=6.47$), $\theta_R=1.7$ ($\delta_{eq}=4.62$), $\theta_R=2.0$ ($\delta_{eq}=3.24$), $\theta_R=2.2$ ($\delta_{eq}=2.70$), $\theta_R=2.5$ ($\delta_{eq}=2.16$).

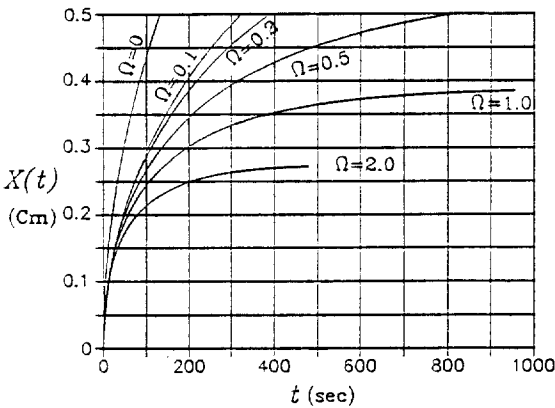


Fig.4 Dimensional growth length of ice ($X(t)$) obtained from the result of Fig.3 for several angular velocities: $\Omega=0, 0.1, 0.2, 0.5, 1, 2$. Unit of Ω is rad/sec.

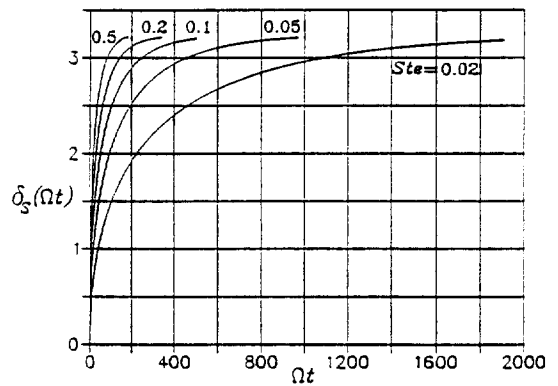


Fig.6 Dimensionless growth length of ice (δ_s) as a function of dimensionless time (Ωt) for several Stefan numbers ($Ste=0.02, 0.05, 0.1, 0.2, 0.5$) with $\alpha_R=8.264$, $K_R=3.669$, $Pr=10$, $\theta_R=2$. The equilibrium value is $\delta_{eq}=3.24$.

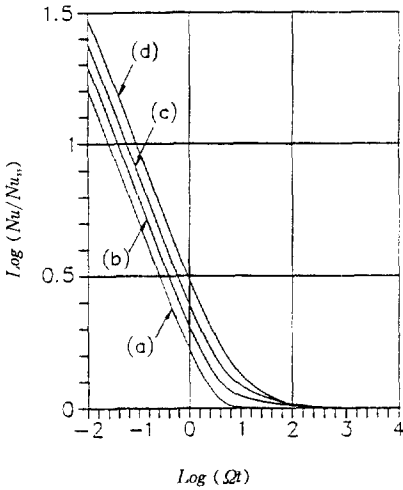


Fig.7 Transient heat transfer from the liquid side of solid-liquid interface for several Stefan numbers with $\alpha_R = 8.264$, $K_R = 3.669$, $Pr = 10$, $\theta_R = 2$.
 (a) The case with no phase change;
 (b) $Ste = 0.01$; (c) $Ste = 0.05$;
 (d) $Ste = 0.2$.

대한 고체의 성장 길이 $X(t)$ 의 변화 거동을 조사해 보면 알 수 있다. 식 (16)과 (21)로부터

$$t = \frac{Pr}{\Omega \cdot Ste} \tau \tag{52}$$

$$X(t) = \sqrt{\frac{\nu}{\Omega}} \delta_s(\tau) \tag{53}$$

가 된다.

Fig.3의 결과로부터 $\Omega = 0.1, 0.2, 0.5, 1, 2$ 에 대해 성장하는 얼음의 길이 $X(t)$ 를 구하여 Fig.4에 도시하였다. Fig.4에서 $\Omega = 0$ 의 곡선은 유체유동이 없는 경우의 얼음의 성장, 즉, Neumann 문제⁽¹⁾의 해를 나타내는데, 이 곡선과 비교하였을 때 다른 곡선들은 얼음의 회전(Ω)이 물의 결빙과정에 미치는 영향을 명확하게 보여주고 있다. 즉 얼음의 회전에 의해 일어나는 유체의 유동은 물의 결빙과정을 강하게 방해하고 있음을 알 수 있다.

본 문제에 있어서는 5개의 무차원 변수 $\alpha_R, K_R, Pr, \theta_R, Ste$ 가 나타난다. 여기에서 α_R, K_R, Pr 은 고려되는 물체의 물성치에 의해 결정되는 변수들이

다. 물과 얼음에 대한 물성치를 고정시키면 온도비 θ_R 과 Ste 가 변수가 된다. θ_R 과 Ste 의 변화에 대한 얼음의 성장 $\delta_s(\Omega t)$ 를 Fig.5와 Fig.6에 나타내었다. Fig.5는 θ_R 이 커질수록 얼음의 성장이 억제됨을 보여주고 있다. 그리고 Fig.6을 보면 Ste 가 커질수록 얼음의 성장이 빠르게 된다. 그러나 Ste 는 다르지만 시간이 지날수록 똑같은 평형상태에 도달하게 된다. 즉, Ste 는 얼음의 성장과정에 있어서 단지 시간지배 변수(time-governing parameter)일 뿐이고 평형상태에는 영향을 미치지 않는다.

Homsy and Hudson⁽¹⁴⁾과 Olander⁽¹⁵⁾는 상변화가 없는 경우에 있어서의 회전 원판으로부터의 비정상 열전달(unsteady heat transfer)을 고려하였다. 그러나 고체 표면의 온도가 결빙 온도보다 낮으면 자연적으로 액체는 응고되기 시작할 것이다. 여기에서는 상변화가 있는 경우에 대해 비정상 열전달을 계산하여 Fig.7에 도시하였다. Fig.7에서 (a) 곡선은 상변화가 없는 경우에 해당되며 $Ste = 0.01, 0.05, 0.2$ 에 대한 (b), (c), (d) 곡선은 상변화가 비정상 열전달에 미치는 영향을 잘 보여주고 있다. 즉, 과도기(transient period)에 있어서 상변화가 있는 경우의 열전달률은 상변화가 없는 경우보다 항상 크다. 그리고 그 차이는 Ste 가 커질수록 증가한다.

4. 결 론

von-Kármán 회전 유동 하에서 일어나는 물의 결빙 과정과 비정상 열전달률을 고려하였다. 고체와 액체 영역 모두에 대해서 온도 분포의 과도기적인 거동(transient behavior)을 고려하여 얼음의 성장 과정을 조사하였다. 얼음의 회전에 의해 일어나는 유체 유동은 물의 결빙 과정을 강하게 방해한다. 그리고 결빙되는 얼음의 두께는 얼음의 회전속도의 제곱근에 역비례한다. 회전 속도 혹은 초기의 액체의 온도가 증가하면 고체의 성장은 유체 유동에 의해 더 강하게 억제된다. 과도기(transient period)에 있어서의 열전달률은, 상변화가 있는 경우가 상변화가 없는 경우보다 항상 크다. Stefan 수가 증가하면 과도기에서의 열전달률도 함께 증가한다.

참 고 문 헌

1. Carslaw, H. S. and Jaeger, J. C., 1959, "Conduction of heat in solids", 2nd edn., pp. 282~296, Clarendon Press, Oxford.
2. Muehlbauer, J. C. and Sunderland, J. E. 1965, "Heat conduction with freezing or melting", *App. Mech. Rev.*, vol. 18, pp. 951~959.
3. Beaubouef, R. T. and Chapman, A. J., 1967, "Freezing of fluids in forced flow", *Int. J. heat and Mass Transfer*, vol. 10, pp. 1581~1587.
4. Savino, J. M. and Siegel, R., 1969, "An analytical solution for solidification of a moving warm liquid onto an isothermal cold wall", *Int. J. heat and Mass Transfer*, vol. 12, pp. 803~809.
5. Epstein, M., 1976, "The growth and decay of a frozen layer in forced flow", *Int. J. heat and Mass Transfer*, vol. 19, pp. 1281~1288.
6. Sparrow, E. M., Patankar, S. V. and Ramadhyani, S., 1977, "Analysis of melting in the presence of natural convection in the melt region", *J. Heat Transfer, ASME, Series C*, vol. 99, pp. 520~526.
7. Ho, C. J. and Chen, S., 1986, "Numerical simulation of melting of ice around a horizontal cylinder", *Int. J. heat and Mass Transfer*, vol. 29, pp. 1359~1369.
8. Benard, C., Gobin, D. and Zanolli, A., 1986, "Moving boundary problem: heat conduction in the solid phase of a phase-change material during melting driven by natural convection in the liquid", *Int. J. heat and Mass Transfer*, vol. 29, pp. 1669~1681.
9. Yoo, J. S., 1991, "Effect of fluid flow induced by a rotating disk on the freezing of fluid", *Int. J. Heat and Fluid Flow*, vol. 12, pp. 257~262.
10. Schlichting, S., 1979, "Boundary layer theory", 7th ed., pp. 102~107, McGraw-Hill.
11. Zandbergen, P. J. and Dijkstra, D., 1987, "von-Kármán swirling flows", *Annu. Rev. Fluid. Mech.*, vol. 19, pp. 469~491.
12. Benton, E. R., 1996, "On the flow due to a rotating disk", *J. Fluid Mech.*, vol. 24, pp. 781~800.
13. Burton, J. A., Prim, R. C. and Slichter, W. P., 1953, "The distribution of solute in crystals growth from melt. Part I. Theoretical", *J. Chem. Phys.*, vol. 21, pp. 1987~1991.
14. Homsy, G. M. and Hudson, J. L., 1969, "Unsteady heat transfer from a rotating disk", *J. Heat Transfer, ASME, Series C*, vol. 191, pp. 162~163.
15. Olander, D. R., 1962, "Unsteady-state heat and mass transfer in the rotating-disk-revolving-fluid system", *Int. J. heat and Mass Transfer*, vol. 5, pp. 825~836.
16. Kobayashi, S., 1986, "Effects of an external magnetic field on solute distribution in Czochralski growth crystals-a theoretical analysis", *J. Crystal Growth*, vol. 75, pp. 301~308.
17. Sparrow, E. M. and Gregg, J. L., 1960, "Mass transfer, flow, and heat transfer about a rotating disk", *J. Heat Transfer, ASME, Series C*, vol. 82, pp. 294~302.
18. Crank J., 1981, "How to deal with moving boundaries in thermal problems, In Numerical method in heat transfer, R. W. Lewis, K. Morgan and O. C. Zienkiewicz, eds., John Wiley and Sons Ltd., New York., pp. 177~200.
19. Sparrow, E. M., Ramadhyani, S. and Patankar, S. V., 1978, "Effect of subcooling on cylindrical melting", *J. Heat Transfer, ASME, Series C*, vol. 100, pp. 395~402.