

칼만 게인 제환 평균을 이용한 적응 EWMA 관리도 설계

윤상원

영동공과대학교 산업공학과

윤석환

한국전자통신연구소

신용백

아주대학교 산업공학과

A Study on the Design of Adaptive EWMA Control Chart using Kalman Gain Recursive Average

Sangwon Yoon

Dept. of Industrial Engineering, Youngdong University

Seokhwan Yoon

Electronics and Telecommunications Research Institute

Yongback Shin

Professor, Dept. of Industrial Engineering, Ajou University

Abstract

Adaptive EWMA(Exponentially Weighted Moving Average)-x control chart using the Kalman gain recursive average is designed. The designed control chart is effective to on-line process monitoring as continuous flow processes. Performance evaluation between the designed control chart and traditional one is implemented. For this, ARL(Average Run Length) is adopted as a criterion.

Results show that the designed adaptive EWMA-x control chart has shorter ARL than EWMA-x control chart when process mean is shifted. This model can be extended to process prevention control. The methodology proposed in this research is turned out to show the high performance than that of the given methodologies.

1. 서론

통계적 공정관리는 공정으로부터의 샘플 조사 결과를 통계적으로 분석하여 공정의 관리상태 점검 및 공정개선의 기초자료를 제공한다. 통계적 공정관리의 대표적기법중의 하나인 관리도(control chart)는 공정개선 및 공정관리를 위한 좋은 도구로 이용된다. 관리도는 Shewhart가 제안한 이래 수많은 관리도가 개발되어 사용되어져 왔다. 특히, EWMA, CUSUM 관리도는 Shewhart가 제안한 전통적 관리도와는 달리 공정의 미세한 변동에 효과적으로 적용될 수 있는 통계적 공정관리 수단으로 평가되고 있다[Hubele & Chang(1990), Montgomery(1991), Page(1961), Roberts(1959)].

한편, 최근에 들어 생산공정 시스템이 자동검사장치를 이용한 전수검사체제, 공정관리의 온-라인화 및 실시간화, 예방관리 위주의 공정관리 등의 성격을 띄게 됨에 따라, 이러한 상황에 대응할 수 있는 효율적인 동적 통계적 관리 시스템이 요구된다. 동적 통계적 공정관리 시스템을 위해 Hunter는 통계적 공정관리 기법 및 공정예측 기법으로서 EWMA 관리도를 연구하여 계산 및 해석 측면에서 효율성이 높음을 입증하였다[Hunter(1986)]. Hebele와 Chang은 EWMA의 λ 값을 갱신하기 위해 칼만 필터링을 사용하여 적용 EWMA 관리도를 제안함으로써[Hubele & Chang(1990)], 제어이론을 SPC(Statistical Process Control) 영역으로 변환하기 위한 방법으로서 칼만필터링이 적용되었다.

이와 관련하여 기존 연구결과들을 고찰해 보면 다음과 같다. Ledolter는 회귀모형과 ARIMA 시계열 모형에서의 궤환 추정치를 계산하기 위해 칼만모형을 사용하였으며[Ledolter(1979)], Sallas와 Harville는 혼합 모형을 위한 궤환 추정 방정식을 유도하기 위해 칼만모형을 확장시켰다[Sallas & Harville(1981)].

Duncan과 Horn은 오차 벡터(error vector)들이 정규분포가 아닐 경우(평균 0, 분산 σ_v^2 , σ_w^2)에도 칼만추정은 선형 최소 제곱 추정량(minimum least square linear estimator)이 된다고 증명하였다[Duncan & Horn(1972)].

Sastri는 기존의 시계열 모형을 상태공간 모형으로 변형시켜 온-라인 실시간 예측이 가능한 궤환 데이터 처리기로서 칼만필터링을 도입시켰다[Sastri(1985)]. Crowder는 단일 변량(univariate) 공정 모니터링과 최적 제어의 도구로서 칼만필터링을 적용하였다[Crowder(1986)].

Sastri와 English는 칼만필터링에 근거한 일반적인 ARIMA 관리도를 설계하였으며[Sastri & English(1993)], 공정 데이터로부터의 자동상관을 제거하기 위한 대안으로서 궤환 칼만 필터링이 제안되었다[English, Krishnamurthi & Sastri(1991)].

English와 Case는 피드백 제어 루프(loop)를 이용한 통계적 품질관리 필터들을 설계하여 그들의 적용절차를 설명하였다[English & Case(1990)]. Phadke는 공정평균 변화에 민감한 품질평가계획(quality evaluation plan)을 수립하기 위하여 적용 칼만필터링을 이용하였다[Phadke(1982)].

본 논문은, 기존의 접근방법과는 달리, 새로운 상태 공간 모형을 설계하였으며, 이를 중심으로 동적 품질 모니터링 시스템 구축을 위하여 칼만게인(Kalman Gain)에 의한 적응(Adaptive) EWMA 관리도를 설계하였다.

설계된 관리도는 실시간으로 입력되는 실측 데이터의 궤환적 평균 및 분산을 이용하여 관리한계선을 구할 수 있으며, 칼만계인은 상태 공간 모형의 필터 추정에 따른 칼만 개인 궤환 평균을 이용하여 구해진다. EWMA에서의 오차 가중치 λ ($0 < \lambda < 1$, 일정한 값) 대신에 칼만 개인 궤환 평균을 이용하는 것이다. 제안하는 관리도의 효율성을 검증하기 위해 기존 EWMA 관리도에서의 여러 λ 값의 변화에 대한 ARL을 구하고, 각 경우의 오차제곱 합을 기준으로 제안하는 관리도의 그것과 비교하였다.

2 칼만 필터링(Kalman Filtering)

랜덤변수에 관한 데이터 프로세싱(data processing)이 1800년 가우스(Gauss)에 의해 시작된 이래 1960년 칼만은 시간영역을 기준으로한 최적 궤환 필터링(optimal recursive filtering)방식을 제안하였다[Lewis(1986)].

칼만은 위너(Wiener) 필터링 문제에 있어서 스펙트럼 밀도함수를 생각하는 대신 신호나 잡음의 시계열 그 자체를 실시간으로 파악했으며, 신호는 어떤 백색신호(white signal)에 의해 구동(驅動)된 선형 동적 시스템(linear dynamical system)의 출력으로 처리했다. 또한 신호의 상관성(공분산 함수 혹은 스펙트럼 밀도 함수)은 동력학(dynamics)의 구조에 유래하는 것으로 간주하고, 그 동력학을 근간으로 하여 최적 필터를 구했다. 선형 필터를 구성하는 칼만필터링은 선형 동적 시스템의 실현이론(system realization theory)으로서 정식화되어 확률통계 이론과는 무관하게 최종적으로 선형시스템 이론의 틀 안에서 해석되어졌다[金治弘(1985)].

칼만 방법은, 시시각각의 관측치와 예측치를 비교하여 필터를 개량해 나가므로 오차를 점점 줄일 수 있는 방법이며, 반드시 시스템의 장래를 관측해서 얻어지는 확률과정이 정상적이 아니더라도 응용할 수 있다. 다중과정에 의해 정식화되는 것이 특징 중의 하나이며, 신호과정과 예측과정을 분리하고 있으며, 각각의 잡음(noise)은 독립이고, 백색 가우스 과정(white Gauss process)을 전제로 하고 있다.

칼만 필터링은 시스템의 현재 상태에 관한 추정값들을 예측하거나 과거의 관측치들을 정확히 수정하는 데에 쓰인다. 반복적인 최적 추정량로서 수행시간이 비교적 짧고 신호대 잡음비(signal to noise ratio)를 향상시키는 특성을 갖고 있다. 잡음이 섞인 입력 데이터를 반복하여 처리하기 때문에 온-라인 디지털 데이터 처리(on-line digital data processing)에 적합하다[Bozic(1979), Lewis(1986)].

칼만필터링 모형은 추계적 모형(stochastic model)으로서 조건부 추정오차를 최소화하는 동적 예측 모형이 되며, 모델링은 초기 조건에 대한 정보, 시스템의 동적 상태에 대한 모델링이 요구된다. 필터링은 신호의 초기 추정치, 오차 공분산(error covariance)과 새로운 측정치를 이용하여 필터링의 이전 추정치를 새로운 추정치로 교체한다. 이러한 과정은 시스템이 관측 가능한 상태에서 초기 추정치를 더 이상의 향상이 불가능한 안정 상태(steady state)에 도달할 때까지 새로운 측정 데이터를 이용하여 개선된다. 칼만필터링의 응용분야로서는 적응 제어를 갖는 자동제어계의 최적 설계 응용(자동제어 및 신호 프로세싱 등), 추적시스템(유도탄, 미사일, 레이다, 인공위성, 선박 등), 기계공학 분야로서 기계

진동제어, 산업공학 분야로서 자동공정제어, 재고통제, 인간-기계 시스템의 최적 제어, 통계적 공정관리, 통계적 예측, 신경망 이론에서의 신경망 학습기법 등을 들 수 있다[金治弘(1985), Bozic(1979), Lewis(1986), 尹尙元 外 2人(1994)].

2.1 기본 모형 구조

칼만 모형은 다음과 같은 행렬 형태의 일반적인 모형으로 표현할 수 있다.

$$X(k) = A(k, k-1) X(k-1) + W(k-1) \tag{1}$$

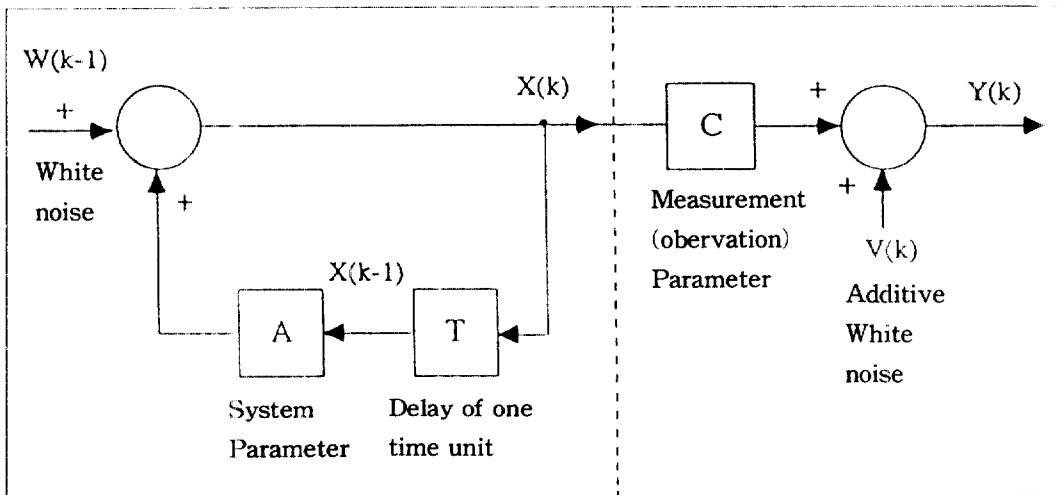
$$Y(k) = C(k) X(k) + V(k) \tag{2}$$

단, $A(k, k-1), C(k)$ 는 기지이며 $k = 1, 2, 3, \dots$

위의 모형에서 시간 k 시점에서의 데이터(스칼라, 벡터)는 $Y(k)$ 로 표시되며, 측정치를 고려하지 않는 시간 갱신 방정식 $X(k)$ 에 종속된 $Y(k)$ 를 측정방정식이라고 한다.

관측 오차 $V(k)$ 는 평균 0, 기지분산 $R(k)$ 인 정규분포 $N(0, R(k))$ 를 따른다고 가정한다. 시스템의 상태를 나타내는 $X(k)$ 는 시간에 따라 변하는 시변시스템(time-varying system)의 (신호)방정식이다. 행렬 $A(k, k-1)$ 는 시간 $(k-1)$ 에서 k 로 시스템의 상태를 전이시켜 주는 시간 전이 행렬(time transition matrix)이 된다. $W(k)$ 는 $V(k)$ 와 동일하게 평균 0, 기지분산 $Q(k)$ 인 $N(0, Q(k))$ 를 따르며, $W(k)$ 와 $V(k)$ 는 독립이라고 가정한다.

특히 $A(k, k-1), C(k)$ 는 행렬 $Q(k), R(k)$ 가 시간에 따라 비정상적(nonstationary)으로 변하는 것과 같이 변할 수 있는 행렬이 되며, 이 때는 주어진 시스템의 상태가 시간에 따라 동적으로 변하는 경우로서 고려될 수 있다. 칼만 모형의 개념도를 제시하면 <그림 1>, <그림 2>와 같다.



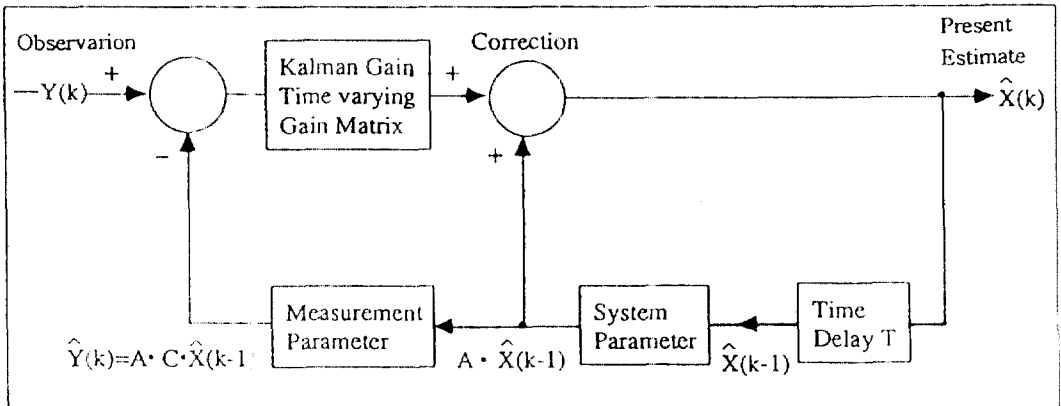
<그림 1> Block Diagram of System (Signal) Model <그림 2> Block Diagram of Measurement Model

2.2 알고리즘

칼만 필터링 알고리즘의 흐름도는 <그림 3>을 고려함으로써 매우 간단하게 표현할 수 있다[Bozic(1979)]. 시점 $(k-1)$ 에서의 상태추정치 $\hat{X}(k-1)(=\hat{X}(k-1|k-1))$ 을 알고 있다고 가정하여 측정치 $Y(k)$ 가 주어졌을 때, $\hat{X}(k)(=\hat{X}(k|k))$ 를 구하기 위한 계산 사이클은 다음과 같다.

- (1) $\hat{X}(k-1)$ 에 시스템 행렬 $A(k, k-1)$ 을 곱함으로써 시간 갱신 예측 방정식 $\hat{X}(k|k-1)=A(k, k-1) \hat{X}(k-1|k-1)$ 이 성립된다. $\hat{X}(k|k-1)$ 은 $k-1$ 시점에서 k 시점의 상태를 추정한 시간갱신 1단계 예측값이 되며, $\hat{X}(k-1|k-1)$ 은 $k-1$ 시점에서 $k-1$ 시점의 상태를 추정한 필터링된 값을 나타낸다.
- (2) $\hat{X}(k|k-1)$ 에 $C(k)$ 를 곱하면 $\hat{Y}(k)=C(k) \hat{X}(k|k-1)$ 가 되고, 실측치 $Y(k)$ 에서 $\hat{Y}(k)$ 를 빼면 잔차 $e(k) = Y(k) - \hat{Y}(k)$ 를 얻는다.
- (3) 잔차에 $K(k)$ 를 곱해 $\hat{X}(k|k-1)$ 에 더하면 아래식의 필터된 추정치 $\hat{X}(k|k)$ 를 얻는다.

$$\hat{X}(k|k) = \hat{X}(k|k-1) + K(k) e(k)$$
 $K(k)$ 는 최적 $\hat{X}(k|k)$ 를 구하기 위한 칼만게인 값으로 시변(time-varying)의 값을 가지면서 잔차를 케환되게 수정해 준다.
- (4) $\hat{X}(k|k)$ 는 다음의 추정치가 고려될 때까지 저장되고 이러한 계산 사이클이 반복되어 시간의 변화에 따라 계속해서 필터된 추정치를 구하게 된다.



< 그림 3 > Kalman Filtering Calculation Cycle

3. EWMA(Exponentially Weighted Moving Average) 관리도

EWMA는 현재의 측정치를 고려한 1단계 예측 재환(recursive) 모형으로서 과거의 데이터일수록 가중치가 줄어드는 특성을 가진 통계량이다. EWMA 모형은 현재 예측된 값에 관측 오차의 λ 배를 더한 형태로서 다음과 같이 표현된다[Hubele(1986), Hunter(1986), Montgomery(1991)].

$$\begin{aligned} \text{EWMA} &= z_{k+1} = z_k + \lambda e_k \\ &= z_k + \lambda(y_k - z_k) \\ &= \lambda y_k + (1-\lambda)z_k \quad k=0, 1, \dots \end{aligned} \quad (3)$$

z_{k+1} : 시간 $(k+1)$ 시점에서 예측된 값(새로운 EWMA 값)

y_k : 시간 k 시점에서 관측된 값

z_k : 시간 k 시점에서 예측된 값(과거의 EWMA 값)

e_k : 시간 k 시점에서 관측된 에러($=y_k - z_k$)

λ : 가중치($0 < \lambda < 1$)

y_k 의 분산이 σ^2 이고 서로 독립일 때, z_k 의 분산은

$$V[z_k] = \frac{\lambda}{(2-\lambda)} [1 - (1-\lambda)^{2k}] \sigma^2 \quad (4)$$

이 되고, k 가 증가함에 따라

$$\lim_{k \rightarrow \infty} V[z_k] = \frac{\lambda}{(2-\lambda)} \sigma^2 \quad (5)$$

이 되어 시간 k 가 어느 정도 커지면 EWMA 관리도의 3σ 관리한계선은 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} UCL &= \mu + 3\sigma \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}} \\ LCL &= \mu - 3\sigma \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}} \end{aligned} \quad (6)$$

가중치 λ 는, 공정이 안정적이고 공정상의 작은 변화를 민감하게 탐지코자 할 경우에는 일반적으로 작은 값을 사용하고, λ 값을 1과 0에 근접시킴으로서 Shewhart 관리도와

CUSUM 관리도에 접근할 수 있다. 특히 λ 는 기지의 임의 고정 상수값으로 관리상태에서의 ARL값과 오보율을 고려한 공정의 변화에 민감하게 반응하는 값이 선택된다. 선택된 λ 는 변화된 새로운 데이터에 의해 새로운 EWMA값(예측된값)의 예측효율을 고려할때 유연성이 떨어질 가능성을 내포하고있다. 따라서 정적인 λ 선택방법과는 다른 데이터 변화에 민감하게 적응되는 동적 λ 선택이 요구된다.

4. 적응(Adaptive) EWMA-x 관리도 설계

4.1 관리도 설계를 위한 상태 공간 모형

신호(signal) 모형과 측정모형의 전형적인 형태로서

$$X(k+1) = A(k+1, k) X(k) + W(k)$$

$$Y(k+1) = C(k) X(k+1) + V(k+1)$$

로서 표시될 때, 시간 갱신 방정식은

$$\hat{X}(k+1|k) = A(k+1, k) \hat{X}(k|k)$$

이 된다. $A(k+1, k)$ 는 시간 전이 행렬(time transition matrix)로서 측정치에 대한 고려 없이 기준 시간을 중심으로 계속적으로 그 상태만 갱신시키는 모형이 된다.

이러한 맥락에서 연구되었던 기존의 상태 공간 모형(Constant, Linear, Quadratic, Exponential growth rate Model 등)[Morrison & Pike(1977), Sastri(1985)]들은 시간 전이 행렬 $A(k+1, k)$ 를 어떻게 설정하는가 하는 문제 접근이 다를 뿐이지, 칼만필터링의 상태 및 측정방정식의 범주에 포함시킬 수 있는 일반적인 모형이 된다. 각 모형중 상수 모형은[Morrison & Pike(1977)] 측정방정식 $y(k)$ 를 고려하면서 시간변화에 대해 일정하게 $\mu(k)$ 를 추정하는 모형이고, 2차 모형(quadratic model)은 α_1 의 별도 상태 방정식을 시간 변화에 대해 일정하게 처리하고, α_2 의 상태 방정식에 1/2의 가중치를 주어 이전 시점의 추정치에 더함으로써 $\mu(k)$ 를 추정하는 모형이 된다.

선형 모형은 시간 전이 행렬 $A(k+1, k)$ 가 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 의 일정한 값으로 $\mu(k)$ 를 추정하는 상태 공간 모형이 된다. 측정방정식 $y(k)$ 에 따라 α_1 이 시간 변화에 대해 시불변(time invariant)으로 추정되고, 추정된 α_1 이 $\mu(k-1)$ 에 더해지면서 최종 $\mu(k)$ 를 추정하는 모형이 된다. 본 연구에서 제시하는 새로운 모형은 기존 선형모형에서의 α_1 을 시변(time varying)변수로 처리하는 모형으로서 다음과 같이 설정된다.

〈 상태 방정식 〉

$$X(k) = \begin{bmatrix} \theta & 1-\theta \\ 0 & \gamma \end{bmatrix} X(k-1) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w(k-1) \quad (7)$$

$$\text{단, } X(k) = \begin{bmatrix} \mu(k) \\ \alpha_1(k) \end{bmatrix} \text{ 인 벡터량, } \theta: 0 < \theta < 1, \gamma: \text{ 기저의 모수}$$

$$\mu(k): k \text{ 시점에서의 관측치}$$

$$\alpha_1(k): k \text{ 시점에서의 추정치}$$

$$w(k) \sim N(0, \sigma_w^2)$$

(측정 방정식)

$$y(k) = [1 \ 0] X(k) + v(k) \quad (8)$$

$$\text{단, } v(k) \sim N(0, \sigma_v^2)$$

식 (7), (8)로 표현되는 모형은 실측데이터를 상태공간 모형화로 변형시킴으로서, $\hat{X}(0)$ 를 실측데이터의 평균값, 0 시점에서의 추정치 $\alpha_1(0) = 0$ 및 시간전이행렬 $A(k+1, k)$ 에 의한 새로운 추정값 $\hat{X}(k)$ 들을 구할 수 있는 동적 케환 추정모형이 된다. θ, γ 의 값은 이전 관측치와 추정치를 동시에 고려한 최종상태 추정치의 오차를 가장 최소화 시켜 주는 값으로 선택되는 가중치로서 부여된 값이 된다. 본 연구에서는 $\theta=0.5, \gamma=1$ 로 설정하여 분석한다.

4.2 관리도 설계

작은 공정변화를 탐지하는데 EWMA 관리도가 효율적으로 사용되지만, EWMA 관리도의 λ 값이 관리상태에서 통계적 척도(오차 제곱합이 최소화되는 λ 값), ARL, 오보율을 평가하여 선택되는 점에서 최소오차 제곱합을 나타내는 λ 의 정확한 값을 구하는데(예를 들어 소수점 n 자리인 λ)시간 및 노력이 요구된다는 측면에서 보통 근사치 값으로 사용된다. 또한 공정에 맞는 적절한 λ 값은 고정값으로 처리되며, 공정의 변동값에 민감하게 반응한다는 측면에서 품질관리 전문가들의 판단에 의존하게 된다[Hunter(1986)].

오차 제곱합이 최소가 되는 0~1사이의 λ 값이 선택되었을때, 추후 공정의 변화된 품질 데이터인 경우 관리상태에서 기 설정된 λ 값에 의해 오차 제곱합이 크게 되는 현상이 존재하기 때문에, 새로운 EWMA값의 예측효율 저하에 따른 품질 모니터링의 방법으로서 효율성이 떨어질 가능성을 내포하게 된다. 이에 본 연구에서는 EWMA 관리도의 λ 값을 임의의 시점까지 칼만 게인 케환 평균값에 의해 동적으로 변화시켜 가면서 예측효율 향상 및 효율적으로 공정을 탐지하는 적응(adaptive) EWMA 관리도를 설계한다. 관리도 설계 절차는 다음과 같다.

실측치 y_k (k 시점에서의 관측된 값)가 실시간으로 들어옴에 따라 그들의 케환평균 $\bar{y}_k, \bar{y}_{(k+1)}, \bar{y}_{(k+2)}, \dots$ 과 케환 분산들 $V(y_k), V(y_{k+1}), V(y_{k+2}), \dots$ 이 구해진다. 그에 따른 EWMA 관리도가 다음과 같이 설계된다.

$$UCL = \bar{y}_{k+n} + 3 \sqrt{V(y_{k+n}) \lambda / (2-\lambda)}$$

$$CL = \bar{y}_{k+n} \quad (9)$$

$$LCL = \bar{y}_{k+n} - 3 \sqrt{V(y_{k+n}) \lambda / (2-\lambda)}$$

단, $n \geq 0$ 인 임의의 정수

λ 는 칼만모형의 칼만 계인과 물리적인 속성이 같으므로[Hubele & Chang(1990)], 현재까지의 칼만 계인 케환 평균값을 최종 λ 로 설정하는 방법이 된다. 칼만 계인에 의한 관리한계선은

$$UCL = \bar{y}_{k+n} + 3 \sqrt{V(y_{k+n}) \lambda_k / (2-\lambda_k)}$$

$$CL = \bar{y}_{k+n} \tag{10}$$

$$LCL = \bar{y}_{k+n} - 3 \sqrt{V(y_{k+n}) \lambda_k / (2-\lambda_k)}$$

단, $n \geq 0$ 인 임의의 정수

λ_k ($k+n$) 시점까지의 칼만 계인 케환 평균 최종값

와 같고 식(10)와 같이 동적으로 변하는 적응 관리한계선을 설정하여 공정 품질을 모니터링할 수 있는 관리도가 된다. 실시간 데이터 입력에 따른 관리도 설계는 <그림 4>의 블록 다이어그램에 제시된다. 실측값 및 칼만 계인에 따른 케환 평균과 분산은 다음의 알고리즘을 적용하여 구한다[Lewis(1986)].

$$\bar{y}_{k+1} = \bar{y}_k + \frac{1}{(k+1)} (y_{k+1} - \bar{y}_k) \tag{11}$$

$$V(y_{k+1}) = V(y_k) + \frac{1}{(k+1)} \left[\frac{1}{(k+1)} (y_{k+1} - \bar{y}_k)^2 - V(y_k) \right] \tag{12}$$

<증명>

$$\begin{aligned} (1) \bar{y}_{k+1} &= \frac{1}{(k+1)} \sum_{i=1}^{k+1} y_i = \frac{k}{(k+1)} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k y_i + \frac{1}{(k+1)} y_{k+1} \right) \\ &= \frac{k}{(k+1)} \bar{y}_k + \frac{1}{(k+1)} y_{k+1} \end{aligned}$$

$\therefore \bar{y}_{k+1} = \bar{y}_k + \frac{1}{(k+1)} (y_{k+1} - \bar{y}_k)$ 이 성립한다.

(2) $V(y_k) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (y_i - \bar{y}_k)^2$ 에서 새로운 측정치 y_{k+1} 를 고려하면,

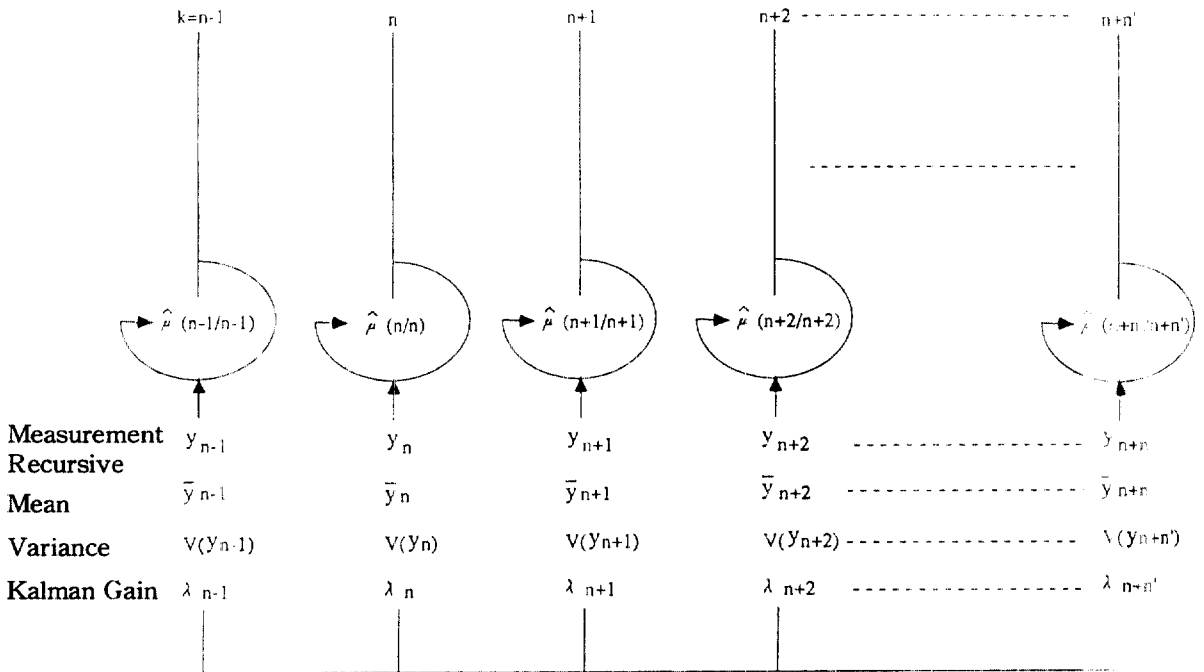
$$\begin{aligned} V(y_{k+1}) &= \frac{1}{(k+1)} \sum_{i=1}^{k+1} (y_i - \bar{y}_{k+1})^2 \\ &= \frac{1}{(k+1)} \sum_{i=1}^{k+1} \{ (y_i - \bar{y}_k) + (\bar{y}_k - \bar{y}_{k+1}) \}^2 \end{aligned}$$

$$= \frac{k}{(k+1)} V(y_k) + \frac{1}{(k+1)} (y_{k+1} - \bar{y}_k)^2 - (\bar{y}_{k+1} - \bar{y}_k)^2$$

여기에서, $(\bar{y}_{k+1} - \bar{y}_k)^2 = \frac{1}{(k+1)^2} (y_{k+1} - \bar{y}_k)^2$ 이므로,

$$V(y_{k+1}) = \frac{k}{(k+1)} V(y_k) + \frac{k}{(k+1)^2} (y_{k+1} - \bar{y}_k)^2 \text{ 이 되어,}$$

$$V(y_{k+1}) = V(y_k) + \frac{1}{(k+1)} \left[-\frac{k}{(k+1)} (y_{k+1} - \bar{y}_k)^2 - V(y_k) \right] \text{ 이 성립한다.}$$



Measurement Recursive Control Chart Design

< 그림 4 > Block Diagram for Control Chart Design

5. 적응 EWMA-x 관리도와 EWMA-x 관리도의 수행도 평가

관리도의 수행도는 측정치로부터 얻은 통계량이 관리한계선을 벗어날 때까지의 평균 측정치 횟수를 나타내는 평균 런의 길이(ARL: Average Run Length)에 근거하여 평가될 수 있다. ARL은 두 관리도를 비교 검토하는 데에 사용되는 척도가 된다[Montgomery

〈 표 2 〉 Error Sum of Squares Following a Change of Process Condition and λ

λ	process condition(mean 20, var.1)
	$\lambda_k = 0.178$ Error Sum of Squares by Kalman Estimate = 65.54
	Error Sum of Squares
0.10	412.69
0.17	413.48
0.178	65.54
0.18	413.72
0.20	414.29
0.30	418.18
0.40	422.36
0.50	425.55
0.60	427.23
0.70	427.36
0.80	426.15
0.90	423.88
1.00	412.68

〈표 2〉의 분석 결과를 보면 평균 20, 분산 1인 안정된 공정에서 얻어진 30개 데이터를 근거로 일반 EWMA 관리도에서 최소오차 제곱합이 되는 λ 는 0.1~1.0까지의 오차 제곱합중에 최소값을 구해보면 0.1일때 412.69, 0.2일때 414.29 및 1.0일때 412.68의 근사값들을 얻게된다. λ_k 는 귀환되게 구해진 최종값 0.178로서 구해지며 그때의 오차 제곱합이 65.54로서 그 만큼의 오차가 적은 EWMA 모형이 된다. ARL값을 보면 일반 EWMA에서, $\lambda=0.1$ 일때 68.841, $\lambda=0.2$ 일때 2516.739등이 얻어지고, 적응 EWMA에서의 ARL은 1166.559가 얻어진다. 관리상태에서 $\lambda=0.178$ 일때의 일반 EWMA의 ARL도 1168.544가 되어 거의 같은 값이 구해지며, 공정평균이 변하는 이상상태에서의 두 방법의 ARL을 비교한 결과는 〈표 1〉과 같다.

λ_k 와 비슷한 값인 $\lambda=0.2$ 에서의 ARL을 보면 공정평균 변화가 0%일 때에는 λ_k 가 λ 에 의해 구해진 ARL 값보다 2.15배 정도 작게 나타나고 있어 공정 변동을 빨리 탐지함을 알 수 있으며, 공정 평균 변화가 큰 경우(20% 이상)에는 두 방법의 ARL 값들이 비슷하게 나타나고 있다. 한편, $\lambda=0.1$ 에서는 λ_k 의 ARL보다 17.14배 정도 작게 나타나고 있어 공정변화에 너무 민감한 값이 된다. 〈표 2〉에서 칼만 모형에 의한 추정 오차 제곱합이 65.54이고, 일반 EWMA 모형에서의 $\lambda=0.17$, $\lambda=0.18$, $\lambda=0.20$ 에 대한 오차제곱합들이 비슷하게 나

타나고 있으며, λ_k 에서의 오차제곱합보다 약 6.30배의 효율 차이가 발생하고 있다. $\lambda=0.1$, $\lambda=1.0$ 에서는, 모든 λ 값중에서 최소 오차제곱합을 나타내고 있지만, $\lambda=0.17$, $\lambda=0.18$, $\lambda=0.20$ 의 경우와 비슷한 결과값이 되어 $\lambda=0.1$, $\lambda=1.0$ 의 선택보다 $\lambda=0.20$ 수준을 갖는 동적으로 구해진 $\lambda_k=0.178$ 이 ARL 분석 결과에서도 공정 변동 탐지에 효율적인 값이 된다.

따라서, 일반 EWMA 모형의 최소 오차 제곱합을 나타내는 값으로 설계된 관리도 보다, λ_k 설계 방법에 의한 적응 EWMA 관리도가 예측효율 측면에서 우수함은 물론 설계방법의 간편성을 얻을 수 있어, λ 를 동적으로 구해진 λ_k 로 대체함으로써 적응 EWMA-x 관리도 설계를 통한 공정 모니터링이 효율적인 방법으로 평가 될 수 있다.

6. 결론

본 연구에서는 칼만 게인 케환 평균에 의해 공정으로부터 얻은 실측치를 실시간으로 처리할 수 있는 적응(Adaptive) EWMA-x 관리도를 설계하였으며, 설계된 관리도의 타당성과 수행도를 기존 EWMA 관리도와 비교 평가하였다. 그 결과, 칼만게인에 의해 구해진 최종 λ_k 값과 여러 λ 값들에 대한 컴퓨터 시뮬레이션을 실시하여 평균 런의 길이(ARL) 계산 결과, 기존의 EWMA 관리도보다 작은 공정 변화에 민감하다는 결론을 얻었다.

칼만게인 케환 평균값을 구하기 위해 선형 상태 공간 모형을 새롭게 설계하였으며, 설계된 모형은 공정의 온라인 모니터링을 가능케 하는 방법이 된다.

결론적으로, 본 연구에서 구축된 시스템은 공정의 예방관리 및 품질 모니터링을 통해 전체 시스템의 생산능률 향상 측면에서도 좋은 결과를 줄 수 있고, 실제 제조현장의 적용 가능성을 더욱 높여주는 새로운 연구분야로서의 효과적인 동적 품질 모니터링 시스템이 된다고 할 수 있다.

본 연구에서 제안된 방법과 관련하여 향후 연구과제는 첫째, 기존의 전통적인 관리도(계수치, 계량치)에의 적용을 통한 동적 품질 모니터링 시스템 설계, 둘째, 공정 조건을 잘 표현해 주는 상태 공간 모형 설정 등으로 확장하여 연구될 수 있다고 본다.

참고문헌

- [1] 金治弘(1985), 豫測科學, 成均館大學校, 서울, pp. 107-125.
- [2] Bozic, S. M., Digital and Kalman Filtering(1979); An Introduction to Discrete Time Filtering and Optimum Linear Estimation, *Edward Arnold*, pp. 113-120.
- [3] Lewis, F. L. (1986), Optimal Estimation, *John Wiley & Sons*, pp. 67-80.
- [4] Montgomery, D. C. (1991), Introduction to Statistical Process Control, 2nd Edition, *John Wiley & Sons*, pp. 299-305.

- [5] 尹尙元, 尹錫煥, 辛容伯(1994), "A Study on the Construction of Dynamic Recursive Control Model through a Machine state Monitoring," 韓國工業經營學會, Vol. 17, No. 30, pp. 107-116.
- [6] Crowder, S. V. (1986), "Kalman Filtering and Statistical Process Control," Unpublished Ph. D. Dissertation, Iowa State University Library, Ames, Iowa
- [7] Duncan, D. B. and S. D. Horn(1972), "Linear Dynamic Recursive Estimation from the viewpoint of Regression Analysis," *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 67, pp. 815-821.
- [8] English, J. R. and Case, K. E. (1990), "Control Charts Applied as Filtering Device within a Feedback Control Loop," *IIE Transactions*, Vol. 22, No. 3, pp. 255-268.
- [9] English, J. R., Krishnamurthi, M. and Sastri, T. (1991), "Quality Monitoring of Continuous Flow Process," *Computers and Industrial Engineering*, Vol. 20, No. 2, pp. 251-260.
- [10] Hubele, N. F. and Chang, S. I. (1990), "Adaptive Exponentially Weighted Moving Average Schemes using a Kalman Filter," *IIE Transaction*, Vol. 22, No. 4, pp. 361-369.
- [11] Hunter, J. S. (1986), "The Exponentially Weighted Moving Average," *Journal of Quality Technology*, Vol. 18, No. 18, pp. 203-210.
- [12] Ledolter, J. (1979), "A Recursive Approach to Parameter Estimation in Regression and Time Series Models," *Communication in Statistics*, Vol. A-10, pp. 227-1246.
- [13] Morrison, G. W. and D. H. Pike(1977), "Kalman Filtering Applied to Statistical Forecasting," *Management Science*, Vol. 23, pp. 768-774.
- [14] Page, E. S. (1961), "Cumulative Sum Charts," *Technometrics*, Vol. 3, No. 1 pp. 1-9.
- [15] Phadke, M. S. (1982), "Quality Evaluation Plan using Adaptive Kalman Filtering," *The Bell System Technical Journal*, Vol. 61, No. 8, pp. 2081-2107.
- [16] Roberts, S. W. (1959), "Control Charts Tests Based on Geometric Moving Averages," *Technometrics*, Vol. 1, No. 3, pp. 239-250.
- [17] Sallas, W. M. and D. A. Harville (1981), "Best Linear Recursive Estimation for Fixed Linear Models," *Journal of the American Statistical Association*. Vol. 76, pp. 860-869.
- [18] Sastri, T. (1985), "A State Space Modelling Approach for Time Series Forecasting," *Management Science*, Vol. 31, No. 11, pp. 1451-1470.
- [19] Sastri, T. and English, J. R. (1993), "On Sensitivity Analysis of Kalman Filter Based on Control Charts," *Computers and Industrial Engineering*, Vol. 23 No. 3, pp. 1-12.