

기하 공차의 수학적 표현 : 1 편

박상호*, 이건우**

Mathematical Representation of Geometric Tolerances : Part 1

Sangho Park*, Kunwoo Lee**

ABSTRACT

Every mechanical component is fabricated with the variations in its size and shape, and the allowable range of the variation is specified by the tolerance in the design stage. Geometric tolerances specify the size or the thickness of each shape entity itself or its relative position and orientation with respect to datums. Since the range of shape variation can be represented by the variation of the coordinate system attached to the shape, the transformation matrix of the coordinate system would mathematically express the range of shape variation if the interval numbers are inserted for the elements of the transformation matrix. For the shape entity specified by the geometric tolerance with reference to datums, its range of variation can be also derived by propagating the transformation matrices composed of interval numbers. The propagation depends upon the order of precedence of datums.

Key Words : geometric tolerance (기하 공차), tolerance representation (공차 표현), transformation matrix (변환 행렬)

서론

과거에는 산업구조에서 제품의 설계에 관련된 과정과 가공이 분리되어 왔다. 도면에 의해서 설계와 가공사이에 정보가 교환되어 온 것이다. 이 도면은 제품의 이상적인 형상과 실제 형상의 허용 범위 등 많은 정보를 포함한다. 왜냐하면 가공에서 이상적인 형상의 물체를 만들수 없고 부품은 가공단계에서 항상 형상 오차를 수반하기 때문이다. 그 오차의 허용영역은 설계단계에서 공차로 지정된다.

이러한 도면의 저장과 검색을 위하여 전산기 이용 도면 시스템 (computer aided drafting system)이 개발되고 사용되었다. 이 시스템은 가공에 전기적으로 연결되어 빠른 전달을 가능케 했다. 이러한 시스템을 개발하고자 하는 노력은 계속 발전하여 최근에 공칭 모델 (nominal model)의 삼차원 형상을 저장하는 솔리드 모델링 시스템 (solid modeling system)이 개발되어 그 사용이 점점 늘어가는 추세이다. 이 시스템은 솔리드의 기하학적인 성질을 자동으로 계산할 수 있게 하여 유한 요소 해석 (finite elements analysis), NC 코드 생성 (NC code

* 시스템 공학 연구소

** 서울대학교, 기계설계학과.

generation and verification)등과 같은 설계와 가공에 필요한 기하학적인 정보를 제공한다^(1,2)

그러나 현재의 솔리드 모델러는 조립 계획 (assembly planning), 공차 분석 (tolerance analysis)이나 검사 (inspection)등과 같은 설계와 가공에 필요한 모든 정보를 포함하는 것은 아니었고, 이러한 단점으로 설계와 가공이 분리되어 진행되었다. 이러한 단점을 극복하기 위하여 동시 공학 (concurrent engineering)의 개념이 도입되었고 이것의 기본 개념은 부품의 설계와 함께 동시에 가공 공정 (manufacturing process)을 고려하는 것이다. 이를 위하여는 제품에 관련된 모든 필요한 정보를 공칭 모델과 함께 저장하여야 한다. 물론 이 정보는 공차 정보를 포함하여야 한다.

설계단계에서 설계자는 공칭 모델을 정의하고 공차를 할당한다. 설계에서 의도하는 품질 및 기능을 충분히 발휘하려면 치수와 더불어 형상 (form), 자세 (orientation) 및 위치 (location)를 설계의도에 대응시킨 공차가 선택되고 결정되어야 한다는 것이다. 기하 공차는 형상 자체의 치수 및 두께를 구속하거나 데이텀 (datum)에 대하여 형상의 자세 및 위치를 구속한다. 또한 가공과 검사단계에서 중요한 개념인 데이텀이 각 형체를 정의하는 기준 좌표계 (reference frame)를 제공한다.

이러한 기하 공차가 형상 모델링 시스템에 저장되어 있다면, 가공된 부품의 측정 데이터로부터 그 부품이 공차를 만족하는지도 검사할 수 있기 때문에, 기하 공차의 수학적 표현 및 저장은 품질 검사의 자동화 (inspection automation)에도 매우 중요한 요소가 된다.

2. 관련연구

Hillyard⁽³⁾는 공차를 표현하기 위한 수학적인 이론에 대해서 처음연구하였다. 스티프너 (stiffener)와 구속조건 (constraints)에 기초하여 치수 및 공차의 모델링 방법에 대하여 연구하였으며 구속조건을 풀기위하여 강성 행렬 (rigidity matrix)의 역행렬을 구했다. 비슷한 방법이 Light등⁽⁴⁾에 의하여 연구되었다. 이들 방법은 몇가지 단점을 안고 있는데 그것은 치수 공차에 국한되고 기하공차에 쉽게 확장할 수 없다는 것이다.

Requicha⁽⁵⁾는 치수와 기하학적인 정보를 포함하는 기하공차의 이론을 제시하였다. 그는 형상의 경계를 오프셋 (offset)하여 만들어진 공간으로 공차영역을 표현하고 이러한 공차영역을 나타내는 공간 안에 물체의 경계가 놓이

면 주어진 공차를 만족하는 것으로 판단하도록 하였다. 또한 이러한 연구를 바탕으로 오프셋에 관한 연구도 Rossignac등⁽⁶⁾에 의해서 진행되었고 Etesami⁽⁷⁾도 비슷한 공차이론에 관하여 연구하였다.

공차가 주어진 물체의 모델링 공간에서 알맞은 위상적인 형태 (topological form)를 위한 수학적인 조건에 관한 연구도 Stewart등^(8,9)에 의해서 수행되었다.

Bernstein등⁽¹⁰⁾은 솔리드 모델러에서 치수를 표현하는 구속 조건 네트워크 (constraint network)을 이용하는 방법을 제시하였다. 모델은 공간적인 정보를 표현하는 구속 조건 네트워크에 의하여 연결된 면 (faces)들로 이루어진다. 형상의 상대위치를 구속하는 변환 행렬이 면을 표현하는 네트워크의 각 노드 (node)들 사이의 아크 (arc)로 나타난다. 각 면에 대하여 다른 면과의 상대위치는 면을 표현하는 두 노드사이의 경로에 따라 변환 행렬을 계산하여 결정된다. 그러나 그의 연구는 이 방법을 이용하여 공차를 어떻게 표현할 수 있는 지를 명백하게 제시하지 못하고 있다. 이것과 유사한 방법을 이용하여 공차의 전파^(11,12)나 경계표현 모델링 시스템의 자유 곡면cite{CARD93}에 대해서 언급하고 있는 연구 논문도 발견할 수 있다.

벡터 공차법 (Vectorial Tolerancing)^(14,15,16)은 부품의 좌표계에서 공칭 물체를 방향과 위치의 벡터로 표현하고 또한 실제 물체도 벡터로 표현하였으며 이들 벡터들간의 편위 (deviation)가 공차를 나타내도록 하였다.

Turner⁽¹⁷⁾는 벡터 공간에서 공칭모델의 허용범위를 모델변수 (model variable)로 정의하였다. 예를 들면, 2차원 문제에서 부품의 경계를 나타내는 모서리 (edge)는 평행이동과 경사를 나타내는 두 개의 모델 변수를 가진다. 이 두 변수에 의해 결정되는 모서리의 꼭지점은 이웃 근접한 모서리와 교차점으로 결정된다. 이들 모델변수의 합수로 공차의 구속조건을 표현하였다.

본 연구에서는 기하 공차를 미소 변환 행렬과 인터벌 수의 개념을 도입하여 수학적으로 표현하고 이를 이용하여 형상 모델과 함께 공차 정보까지 저장할 수 있도록 하였다. 특히 데이텀에 대해 자세 및 위치를 구속하는 기하 공차가 주어진 형상에 대해서는 데이텀의 우선 순위를 고려한 변환 행렬의 전파에 의해 그 허용 범위가 유도될 수 있을 것이다.

3. 인터벌 연산

인터벌 연산 (interval arithmetic)은 응용 수학의 새

로운 분야이다. Moore^(18,19)는 일반적인 인터벌이론에 대하여 설명하였다. 인터벌 수는 실제적인 수의 집합으로 이루어지며 공차의 성질과 매우 유사하다. 또한 인터벌 연산은 공차분석을 손쉽게 구현할 수 있도록 한다. 그 이유는 인터벌 연산이 최악의 경우를 고려한 공차 분석(worst case tolerance analysis)의 방법을 제공하고 이 방법에 통계적인 기법을 첨가함으로써 통계적인 공차 분석(statistical tolerance analysis)을 가능하게 하기 때문이다.

3.1 정의 및 용어

인터벌 수는 실수의 집합으로 다음과 같이 정의된다.

$$[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}$$

a 와 b 는 인터벌수의 경계(bounds)라고 불리며 a 를 하한값(lower bound), b 를 상한값(upper bound)라고 하며 a 는 b 보다 작거나 같아야 한다. 실수 c 는 인터벌수, $c = [c, c]$ 로 생각할 수 있다. 인터벌 수의 폭과 절대값은 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$width([a, b]) = b - a$$

$$abs([a, b]) = \max(abs(a), abs(b))$$

여러 인터벌 수로 구성된 n 차원 벡터,

$$A = \{A_1, A_2, \dots, A_n\} \\ = \{[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_n, b_n]\}$$

도 정의될 수 있다. 예를 들면, 인터벌 수로 구성된 2차원 벡터는 2차원 공간에서 사각형을 나타내며, 반면에 인터벌 수의 3차원 벡터는 3차원 공간에서 직육면체를 나타낸다. 즉, 인터벌 수는 벡터의 변화(variation)를 나타낼 수 있다. 이러한 벡터의 폭과 절대값도 다음과 같이 정의된다.

$$width(A) = \max(width(A_1), width(A_2), \dots, width(A_n))$$

$$abs(A) = \max(abs(A_1), abs(A_2), \dots, abs(A_n))$$

3.2 인터벌 연산

인터벌 연산은 다음과 같이 정의된다.

$$[a, b] \circ [c, d] = \{x \circ y | x \in [a, b] \text{ and } y \in [c, d]\}$$

여기에서 \circ 는 $\circ \in \{+, -, \times, /$ 와 같은 덧셈, 뺄셈, 곱셈과 나눗셈을 나타낸다. 인터벌의 하한값과 상한값을 이용하여 윗 식은 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$[a, b] + [c, d] = [a + c, b + d]$$

$$[a, b] - [c, d] = [a - d, b - c]$$

$$[a, b] \times [c, d] = [\min(ac, ad, bc, bd), \max(ac, ad, bc, bd)]$$

$$[a, b] / [c, d] = [\min(a/c, a/d, b/c, b/d), \max(a/c, a/d, b/c, b/d)]$$

나눗셈 관계에서는 인터벌 $[c, d]$ 은 0을 포함하지 않는 조건이 요구된다. 연산은 교환 법칙과 결합법칙이 성립한다.

$$[a, b] + [c, d] = [c, d] + [a, b]$$

$$[a, b] \times [c, d] = [c, d] \times [a, b]$$

$$[a, b] + ([c, d] + [e, f]) = ([a, b] + [c, d]) + [e, f]$$

$$[a, b] \times ([c, d] \times [e, f]) = ([a, b] \times [c, d]) \times [e, f]$$

배분법칙은 성립하지 않으나 부배분법칙(subdistributive)은 성립한다.

$$[a, b] \times ([c, d] + [e, f]) \subseteq [a, b] \times [c, d] + [a, b] \times [e, f]$$

4. 미소 변환 행렬

변환 행렬(homogeneous transformation matrix, T로 표기)은 형상들의 좌표계간의 위치와 방향의 관계를 4 x 4 행렬로 표현한다. 처음의 세 열 벡터는 기준 좌표계에 대한 변환된 좌표계의 X, Y와 Z축의 방향을 나타내고 네번째 열벡터는 변환된 좌표계의 위치를 나타낸다. 각각의 형상에 부착된 좌표계는 6개의 자유도를 가지고 기준 좌표계 또는 다른 형상에 부착된 좌표계에 대해서

4 x 4변환 행렬로 구축될 수 있으며 변환 행렬은 평행이동 (translation, Q로 표기), 회전 (rotation, R로 표기), 확대 (scaling, S로 표기)행렬의 곱으로 주어진다.

4.1 미소 변환 행렬의 정의

어떤 좌표계가 기준 좌표계로 부터 변환 행렬 T 에 의해 정의되어 있을 때, 이 좌표계 T 에 $(I + \Delta)$ 만큼 작은 변화를 준다고 가정하면, 새로운 좌표계는 기준 좌표계로부터 $T(I + \Delta) = T + T\Delta$ 의 변환 행렬로 표시할 수 있다. 작은 미소 변화 (differential variation)인 δ 에 대해 삼각함수는

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sin \delta = \delta$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \cos \delta = 1$$

로 선형화 될수 있으므로 미소 변환 행렬 Δ 를 고려해 보면

$$I + \Delta = Q_{XYZ}(d_X, d_Y, d_Z)R_{XYZ}(\delta_X, \delta_Y, \delta_Z)S_{XYZ}(1 + \lambda_X, 1 + \lambda_Y, 1 + \lambda_Z)$$

로 나타낼 수 있다. 여기에서 I 는 단위 변환 행렬 (identity transformation matrix), Q_{XYZ} 는 좌표계의 위치를 나타내는 평행 이동 행렬 (translation matrix), R_{XYZ} 는 좌표계의 방향을 나타내는 회전 행렬 (rotation matrix)과 S_{XYZ} 는 확대 또는 축소를 나타내는 확대 행렬 (scaling matrix)이다. 따라서 미소 변환 행렬은 다음과 같이 유도된다.⁽²⁰⁾

$$\Delta = \begin{bmatrix} \lambda_X & -\delta_Z & \delta_Y & d_X \\ \delta_Z & \lambda_Y & -\delta_X & d_Y \\ -\delta_Y & \delta_X & \lambda_Z & d_Z \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

이후의 미소 변환 행렬의 표시는 편의상 미소 변환 행렬 안의 변수를 할당하는 것으로 나타내고 할당되지 않은 변수는 0으로 하겠다.(예를 들면 d_X 방향으로의 미소 변화만 있고 다른 미소 변화가 없을 경우에는 $\Delta(d_X = \text{미소 변화량})$ 으로 나타낸다.)

4.2 좌표계간의 미소 변화의 전파

두 좌표계간의 미소 변화의 관계를 고려하기 위하여 Fig. 1의 (a)를 보자. A좌표계와 B좌표계는 각각 오목한

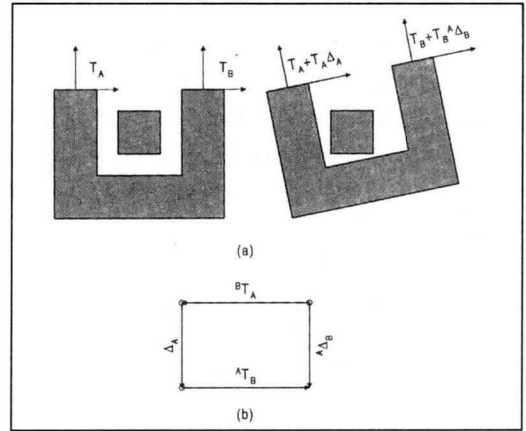


Fig. 1 Propagation of a differential transformation matrix: (a) shows the propagation of the effect of a differential matrix and (b) shows the graph interrelating transformation matrices and differential matrices shown in (a).

다각형의 양끝 부분에 놓인 좌표계를 나타낸다. A좌표계가 미소 변화인 Δ_A 에 의해 움직일 경우, B좌표계도 A좌표계가 부착된 물체에 같이 부착되어 있으므로 B좌표계 또한 움직이게 되는데 그 움직임은 Figure(b)의 변환 행렬의 그래프로써 설명할 수 있다. 이 그래프에서 A좌표계에 작용하는 미소 변화인 Δ_A 에 의해 전파된 B좌표계의 미소 변화가 ${}^A \Delta_B$ 일 때 B좌표계의 새로운 변환 행렬은 $T_B + T_B {}^A \Delta_B$ 가 된다.

그런데 이 좌표계는 변환된 A좌표계로부터 상대 변환 행렬 ${}^A T_B$ 를 A좌표계에 적용시켜 주면 되므로 다음 식이 성립한다.

$$T_B + T_B {}^A \Delta_B = (T_A + T_A \Delta_A) {}^A T_B$$

여기에서 $T_B = T_A {}^A T_B$ 이므로 $T_B {}^A \Delta_B = T_A \Delta_A {}^A T_B$ 가 된다. 따라서

$${}^A \Delta_B = T_B^{-1} T_A \Delta_A {}^A T_B$$

$$= {}^B T_A \Delta_A {}^A T_B \tag{1}$$

라고 할 수 있다. 이것은 한 좌표계에 미소 변화가 있을 경우 이 미소 변화가 다른 좌표계에 어떤 영향을 미치는가 하는것을 두 좌표계간의 변환 행렬을 이용하여 간단히 계산할 수 있음을 의미한다.

변환 행렬이 연산의 순서에 따라 다른 결과를 내는 것과 달리 미소 변환 행렬은 연산의 순서와 상관없이 같은 결과를 나타낸다. 즉, 미소 변환 행렬은 교환 법칙이 성립한다. 한 좌표계에 여러 미소 변화가 적용되면 전체 미소 변화의 결과는 각 미소 변화의 합으로 표시될 수 있다. 변환 행렬 T 에 의해 정의된 좌표계에 미소 변화 $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ 이 적용되는 경우는

$$T(I + \Delta) = T(I + \Delta_1)(I + \Delta_2) \dots (I + \Delta_n) \\ = T \prod_{i=1}^n (I + \Delta_i)$$

이 되는데 미소 변화가 작다고 가정하였으므로 미소 변화가 두번 연산되어 나타나는 값은 무시할 만하다. 따라서 위 식은

$$T + T\Delta = T + T\Delta_1 + T\Delta_2 + \dots + T\Delta_n \\ = T + T \sum_{i=1}^n \Delta_i$$

로 나타낼 수 있고 따라서 전체 미소 변화는

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \Delta_i \quad (2)$$

가 된다.

두 좌표계간의 미소 변화의 전파 관계를 여러 좌표계에 확장하여 생각할 수 있는데 1, 2, ..., n개의 좌표계가 미소 변화를 가질때 이들이 j좌표계에 주는 미소 영향은(1)와(2)식에 의해 다음과 같이 표시될 수 있다.

$$\Delta_j = \sum_{i=1, i \neq j}^n {}^i \Delta_j \\ = \sum_{i=1, i \neq j}^n {}^j T_i \Delta_i {}^i T_j$$

5. 변화형상

본 연구에서는 솔리드, 면, 모서리, 꼭지점과 같은 요소들을 형상 요소 (shape entity or feature)라고 정의한다. 이러한 형상 요소에 움직일 수 있는 허용 범위를 나타

내는 변화 (variation)가 주어지면 그것을 변화 형상 (variational shape)이라고 하고 변화가 주어지지 않은 형상을 공칭 형상 (nominal shape)이라고 한다. 형상 요소에 주워지는 변화는 인터벌 수로 구성된 미소 변환 행렬로 표현이 가능하다. 여기서 인터벌 수로 구성된 미소 변환 행렬이란 행렬내의 각 요소가 인터벌 수임을 의미한다. 공칭 형상과 변화 형상의 관계는 그 형상에 주어진 좌표계의 변환 행렬과 작은 변화를 나타내는 미소 변화를 이용하여 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$T_F = T_f + T_f \Delta$$

여기에서 T_f 는 공칭형상의 좌표계를 나타내는 변환 행렬, T_F 는 변화형상의 좌표계를 나타내는 변환 행렬, Δ 는 형상에 변화를 주는 인터벌 수로 구성된 미소 변환 행렬이다. 변화 형상의 경계는 미소 변화의 인터벌 수로 인하여 공차와 같은 허용 영역을 갖는다. 본 연구에서는 대부분의 기계부품에서 기하공차에 대한 형상의 경계가 대개 평면이나 원통면으로 나타나므로 이들의 변화에 의해 얻어지는 변화형상에 대해 아래에 설명하겠다.

5.1 변화 평면

3차원에서 강체의 운동은 6개의 독립적인 요소로 이루어진다. 3개는 평행이동을 나타내는 요소이고 나머지 3개는 회전을 나타낸다. 이 6개의 독립적인 요소는 6 자유도 (degree of freedom)라고 불린다. 이 6자유도는 형상의 위치와 방향을 결정하는데 사용될 수 있다. 그러나 주어진 형상의 종류에 따라 위치와 방향의 변화없이 움직일 수 있는 자유도를 결정할 수 있는데, 이러한 자유도는 열린 자유도 (open degree of freedom)라고 불린다. 예를 들면, 평면의 경우 평면상에 포함되는 벡터의 방향으로의 평행이동은 아무 변화를 수반하지 않는다. 열린 자유도가 결정되면, 형상의 변화를 나타내는 성분을 결정할 수 있다. 일반적으로, 위치와 방향의 변화없이 평행이동하거나 회전할 수 없는 자유곡면은 열린 자유도를 갖지 않는다. 만일 형상이 열린 자유도를 갖는다면, 그것에 해당하는 변화도 갖지 않는다.

무한평면은 위치와 방향의 변화없이 두 방향으로 평행 이동할 수 있고, 한 방향에 관하여 회전할 수 있다. 이 두 평행이동 자유도는 평면의 법선 벡터와 수직이고 회전이동 자유도는 법선 벡터의 방향에 관한 회전이다. 따라서 평면은 6개의 자유도 중에서 이러한 3개의 열린 자유도

를 가지고 있고 이로 인하여 평면은 3점으로 위치와 방향을 결정할 수 있다.

평면의 법선 벡터를 좌표계의 Z축이라고 하면, 평면의 위치 변화는 미소 변환 행렬의 d_x, d_y, d_z 의 성분으로 구속할 수 있다. 그러나 X와 Y방향의 자유도는 열려 있으므로 이 두 방향으로의 변화인 d_x, d_y 를 가질수 없다.

마찬가지로 평면의 회전 변화는 미소 변환 행렬의 $\delta_x, \delta_y, \delta_z$ 의 성분으로 구속할 수 있다.

Z방향에 관한 회전 자유도는 열려있으므로 δ_z 의 변화는 가질 수 없다. 따라서 평면은 미소 변환 행렬의 d_z, δ_x, δ_y 의 세 성분의 변화를 가질 수 있다. 즉 변화 평면 (variational plane)은 $\Delta(d_z, \delta_x, \delta_y)$ 의 미소 변환 행렬로 변화를 표현할 수 있다.

5.2 변화 원통면

앞에서 설명한 평면의 경우와 유사하게 중심축 방향으로 무한인 원통에 관해서 열린 자유도를 결정할 수 있다. 무한 원통은 위치와 방향의 변화없이 중심축방향으로 평행이동할 수 있고 중심축방향에 대하여 회전할 수 있다. 그러므로 원통은 2개의 열린 자유도를 가지며, 이 열린 자유도를 고려하여 위치와 방향의 성분을 결정할 수 있다. 또한 원통은 위치와 방향뿐만이 아니고 반지름에 관한 변화도 고려하여야 한다.

5.2.1 위치와 방향의 미소 변화

원통의 중심축방향을 Z축이라 할 때 Z축에 따른 평행이동은 열려 있다. 따라서 원통은 X와 Y축방향으로만 위치의 변화를 가지므로 미소 변환 행렬의 d_x, d_y 의 성분으로 위치를 구속할 수 있다. 또한 Z축에 관한 회전은 열려 있으므로 Z축에 수직인 축에 관한 회전을 나타내는 미소 변환 행렬의 δ_x, δ_y 의 변화가 원통의 방향 변화를 나타내게 된다. 따라서 변화 원통 (variational cylinder)의 위치와 방향을 구속하는 미소 변환 행렬은 $\Delta(d_x, d_y, \delta_x, \delta_y)$ 이다.

5.2.2 반지름의 미소 변화

원통 반지름의 변화를 표현하기 위하여 Fig.2를 보자. 원통 형상의 좌표계인 A좌표계에서 Z축에 관해서 ϕ 만큼 회전한 좌표계를 B좌표계라고 설정하자. 원통의 임의의 위치에서의 반경의 변화를 표현하기 위해서는 ϕ 가 $[0, 2\pi]$ 안에 존재하는 임의의 값이다. 그러면 두 좌표계 사이의 변환 행렬은

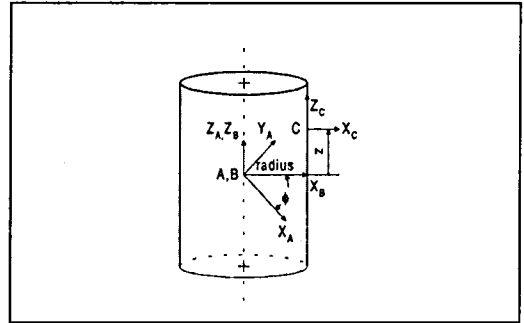


Fig. 2 The coordinate frames of a variational cylinder : Setting up coordinate frames to find the components of the differential matrix to define the radius of a cylinder.

$${}^A T_B = R_Z(\phi) \tag{3}$$

로 주어진다. 여기에서 $R_Z(\phi)$ 는 Z축에 관한 회전 변환 행렬이다.

B좌표계에 가할 수 있는 미소 변환 행렬에 의한 변화중의 d_x, δ_y, λ_x 의 성분이 반지름의 변화에 관계된다.

따라서 B좌표계에서 반지름의 변화를 구속하는 미소 변환 행렬은 Φ 로 표기하여 $\Phi(d_x, \delta_y, \lambda_x)$ 와 같이 정의하자.

앞에서 설명한 두 미소 변환 행렬을 이용하여(3)의 A좌표계와 B좌표계 사이의 변환 행렬에 다음과 같이 미소 변화를 줄 수 있다.

$$\begin{aligned} {}^A T_B &= (I + \Delta(d_x, d_y, \delta_x, \delta_y))R_Z(\phi)(I + \Phi(d_x, \delta_y, \lambda_x)) \\ &= R_Z(\phi) + \Delta R_Z(\phi) + R_Z(\phi)\Phi \end{aligned} \tag{4}$$

(4)식에서 알 수 있듯이 원통면은 위치와 방향을 제어하기 위한 4개의 변화성분과 반지름을 제어하기 위한 3개의 변화성분을 가진다.

6. 공차의 전파

형상 자체를 구속하는 치수 공차 및 형상 공차는 인터벌 수와 미소변환 행렬을 이용하여 앞에서 설명한 변화 형상을 이용하여 간단히 표현할 수 있으나 다른 형상을 기준으로 하여 형상의 위치 및 자세를 구속하는 공차는 그 기준이 되는 데이텀 (datum)이 필요하게 되고, 데이텀 형상 (datum feature)에 주어지는 공차의 영향을 받게 된

다. 이러한 영향은 데이텀으로 주어지는 각 형상의 자유도를 고려한 공차의 전파의 관점에서 설명할 수 있으며 이를 위하여 데이텀 기준 좌표계를 확립하여야 한다.

6.1 데이텀과 데이텀 형상

데이텀은 규정된 데이텀 형상 (specified datum feature)을 이루는 진의 기하학적인 상대 형상 (true geometric counterpart)으로부터 유도된, 이론적으로 정확한 점 (point), 축선 (axis) 또는 평면 (plane) 등이다. 또한 데이텀은 부품 형상의 위치 또는 기하학적인 특성이 확립된 원점 (origin)을 나타낸다.

실제 요구 조건이나 기능을 나타내는 위의 데이텀과 가공된 부품의 실제 데이텀 형상 사이에는 차이가 있다. 데이텀 형상은 데이텀을 확립하는데 쓰이는 부품의 실제 형상이다. 형상을 데이텀으로 정의하기 위해서는 데이텀 식별기호 (datum feature symbol)가 쓰이고 위치도 공차 등에서는 두개 또는 세개의 데이텀을 기준으로 규제하는 경우가 있다. 이 경우 데이텀은 그 중요도 순으로 우선 순위 (precedence)를 가지며 이들을 제일 데이텀 (primary datum), 제이 데이텀 (secondary datum)과 제삼 데이텀 (tertiary datum)이라고 한다.

6.2 데이텀 기준 좌표계

데이텀들로 확립되는 데이텀 기준 좌표계 (datum reference frame)는 3개의 이론적으로 정확하고 또 상호 직각을 이루는 평면으로 구성되는 좌표계를 말한다. 이 좌표계는 이론상으로는 존재하지만, 부품상에는 존재하지 않는다. 데이텀 평면은 요구된 우선 순위에 따라 가공 장치 또는 검중장치에 부품의 실제 형상을 적절하게 접촉시켜서 실용화한다.

데이텀 기준 좌표계와 관련하여 방향과 위치를 구속하는 공차는 데이텀에 주어지는 자유도를 고려하여 실제 가공된 물체의 좌표계를 맞추게 된다. 예를 들면, 평면 데이텀계에 구속된 부품은 각 데이텀 형상이 제일 데이텀에 3점 이상, 제이 데이텀에 2점 이상, 제삼 데이텀에 1점 이상으로 접촉한다. 이것은 부품이 6개의 자유도를 갖는데 그 중에서 제일 데이텀이 3개의 자유도를, 제이 데이텀이 2개의 자유도를, 제삼 데이텀이 1개의 자유도를 구속함을 뜻한다. 즉, 우선 순위 (precedence)를 갖고 서로 직각인 데이텀의 자유도가 데이텀 기준 좌표계 (datum reference frame)를 결정하게 된다. Fig. 3는 데이텀의 우선 순위에 의하여 데이텀 기준 좌표계를 어떻게 결정할

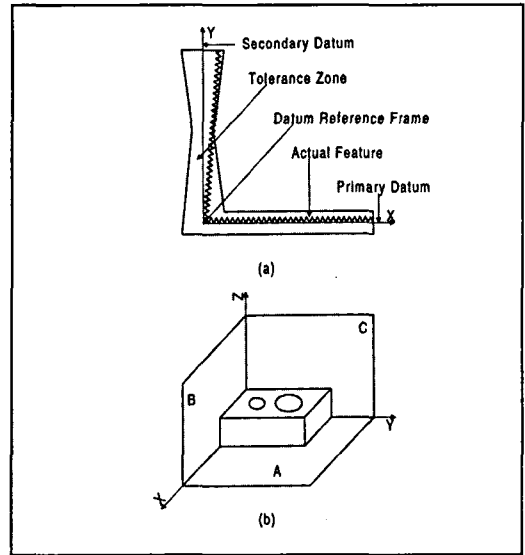


Fig. 3 Construction of a datum reference frame: (a) shows fitting the datum reference frame in 2 dimension and (b) shows setting up A, B and C datum in 3 dimension according to their precedence.

수 있는가를 보이는 그림이다. Fig.(a)는 데이텀 우선 순위의 원리를 설명하고자 하는 2차원의 경우이다. 실제 부품의 데이텀 형상에 데이텀 기준 좌표계를 맞출 경우, 우선 순위에 따라 먼저 제일 데이텀을 맞추고 그 다음에 제이 데이텀을 맞추게 된다.

이는 제일 데이텀이 데이텀 기준 좌표계의 Y 방향의 평행 이동 자유도와 회전 자유도를 먼저 구속하고 제이 데이텀이 남은 X 방향의 평행 이동 자유도를 구속함을 의미한다. 만일 제이 데이텀을 먼저 맞추고 제일 데이텀을 맞춘다면, 제이 데이텀이 X 방향의 평행 이동 자유도와 회전 자유도를 구속하고 제일 데이텀이 Y 방향의 평행 이동 자유도를 구속한다. 이것은 데이텀의 우선 순위의 규칙에 어긋나므로 제일 데이텀과 제이 데이텀이 같은 회전 자유도를 구속할 수 있는 경우에는 우선 순위에 따라 제일 데이텀이 그 자유도를 구속하게 되는 것이다. 실제 부품은 이렇게 맞추어진 데이텀 기준 좌표계에 대하여 주어진 공차 영역안에 존재하여야 한다.

Fig. 3의 (b)는 (a)의 예를 3차원으로 확장한 그림이다. 세면 A, B와 C가 각각 제일, 제이, 제삼 데이텀으로 주어졌을 경우, 이들 데이텀의 자유도가 우선순위에 따라 기준 좌표계의 자유도를 나타내는 미소 변한 행렬의 성분인 $d_x, d_y, d_z, \delta_x, \delta_y, \delta_z$ 의 6개를 결정한다. 먼저 제일

데이텀인 A는 기준 좌표계의 d_x, δ_x, δ_y 의 3개의 자유도를 구속한다. 그리고 제이 데이텀인 B는 d_x, δ_y, δ_z 의 3개의 자유도를 구속하나 δ_x 는 제일 데이텀과 같은 자유도를 구속하므로 기준 좌표계에 영향을 미치지 못한다. 마찬가지로 제삼 데이텀인 C는 d_x, δ_y, δ_z 를 구속하나 δ_y 는 제일 데이텀과 같은 자유도를 구속하고 δ_z 는 제이 데이텀과 같은 자유도를 구속하므로 이들 두개의 자유도는 기준 좌표계에 영향을 미치지 못한다. 따라서 각 데이텀의 자유도는 Table 1와 같이 이들로 확립되는 기준 좌표계의 자유도를 구속한다.

이러한 영향은 각 데이텀의 자유도를 나타내는 미소 변

Table 1 Degrees of freedom for a datum reference frame : Datums constrain the degrees of freedom of a datum reference frame, according to their precedence where the frame has six degrees of freedom, $d_x, d_y, d_z, \delta_x, \delta_y, \delta_z$

Precedence of Datum	Degrees of Freedom
Primary Datum	d_z, δ_x, δ_y
Secondary Datum	d_y, δ_z
Tertiary Datum	d_x

화를 다음과 같이 전파함으로써 설명할 수 있다.

$$\Delta_R(d_x, d_y, d_z, \delta_x, \delta_y, \delta_z) = {}^A \Delta_R(d_z, \delta_x, \delta_y) + {}^B \Delta_R(d_y, \delta_z) + {}^C \Delta_R(d_x)$$

여기에서 Δ 는 미소 변환 행렬이고 아래 첨자 R은 데이텀 기준 좌표계를 나타내고, A, B, C는 우선 순위에 따른 데이텀을 나타낸다. 앞의 결과를 간단히 요약하면, 데이텀을 기준으로 하는 형상에 대하여 각 데이텀은 다음 규칙에 따라 형상의 자유도를 구속한다고 할 수 있다.

한 형상의 기준이 되는 두 개 이상의 데이텀이 같은 자유도를 구속할 수 있는 경우, 가장 우선 순위가 높은 데이텀이 그 자유도를 구속한다.

따라서 구속되는 자유도를 나타내는 미소 변화를 전파함으로써 데이텀 형상에 주어지는 공차를 그 데이텀을 기준으로 하는 형상에 전파할 수 있다. 이는 다음의 알고리즘을 이용하여 설명할 수 있다.

1. 가장 우선순위가 높은 데이텀의 변화가 먼저 전파된다.

2. 먼저 전파된 데이텀의 변화는 제외하고 다음 우선순위의 데이텀의 변화가 전파된다.
3. 우선 순위가 가장 낮은 데이텀까지 앞의 과정을 반복한다.

7. 적용예

Fig. 4 와 같은 예를 생각해 보자.

형상 요소에 주어진 좌표계는 평면일 경우에는 평면의 법선방향과 좌표계의 Z축이 일치하도록 잡아주고 원통면일 경우에는 중심축의 방향이 Z축과 일치하도록 하여 Fig. 5와 같이 주어졌다고 할때 각 형상의 위치 관계는 각 좌표계간의 변환 행렬에 의해 나타낼 수 있다.

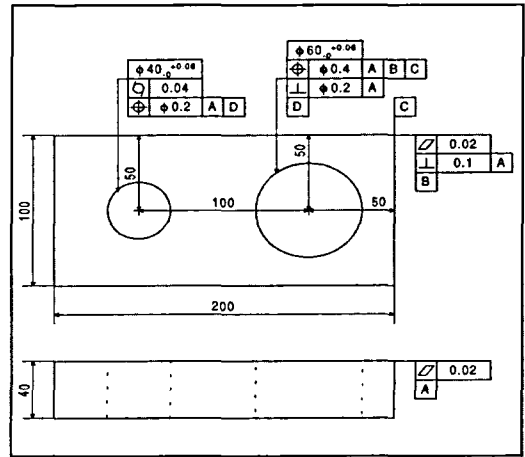


Fig. 4 A drawing example

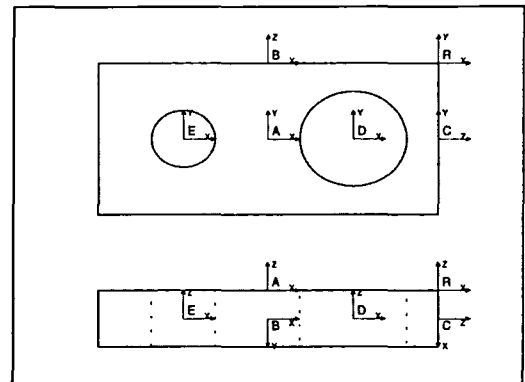


Fig. 5 The coordinate frames of the drawing example

A형상에는 편평도가 0.02로 주어져 있으므로 이에 해당하는 미소 변화는

$$\Delta_A(d_Z = [-0.01, 0.01])$$

이다.

B형상에는 직각도와 편평도가 주어져 있다. 0.02로 주어져 있는 편평도의 미소 변화를 먼저 고려하면

$$\Delta_B(d_Z = [-0.01, 0.01])$$

이 된다. 0.1로 주어진 직각도는 X축에 관하여 기울기를 허용하고 좌표축이 B형상의 중간에 있으므로 Y축쪽 길이의 반인 20을 주어진 직각도에 나누어 주어야 한다. 따라서 직각도의 미소 변화는 다음과 같이 된다.

$$\Delta_B(\delta_X = [-0.05, 0.05]/20)$$

또한 직각도는 A형상과 관련되어 주어져 있으므로 A형상의 미소 변화를 B형상으로 전파하면

$${}^A\Delta_B = {}^B T_A \Delta_A(d_Z, \delta_X, \delta_Y) {}^A T_B$$

이다. 따라서 직각도와 관련된 전체 미소 변환 행렬은 기울기 허용량과 A형상의 미소 변화가 B형상으로 전파된 양의 합으로 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\Delta_B(\delta_X = [-0.05, 0.05]/20 + {}^A\Delta_B$$

D원통형상에 대해서는 치수공차, 직각도, 위치도공차가 주어져 있다. 치수공차의 미소 변화는

$$\Phi_D(d_X = [0, 0.06])$$

이다. 0.2로 주어진 직각도는 반지름의 미소 변화로 표시되어 있으므로 이를 회전각의 미소 변화로 바꾸어야 한다. 좌표계가 원통의 중간에 있고 원통의 길이가 40이므로 기울기 허용량은 주어진 직각도를 원통 길이의 반인 20으로

나누어 주어야 한다. 따라서 직각도의 미소 변화는

$$\Phi_D(\delta_Y = [-0.1, 0.1]/20)$$

이고 데이텀으로 주어지는 A형상에서 전파된 미소 변화는

$${}^A\Delta_D = {}^D T_A \Delta_A(d_Z, \delta_X, \delta_Y) {}^A T_D$$

이 된다. 또한 위치도공차는 A, B, C형상과 관련되어 있다. B데이텀의 영향을 살펴보면

$${}^B\Delta_D = {}^D T_B \Delta_B(d_Z, \delta_X, \delta_Y) {}^B T_D$$

에서 X축 방향의 회전 자유도를 나타내는 δ_X 는 A데이텀과 같은 자유도를 구속하므로 우선순위에 따라 그 영향을 제외하면 B데이텀의 영향은

$${}^B\Delta_D = {}^D T_B \Delta_B(d_Z, \delta_Y) {}^B T_D$$

이 된다. 한편, C데이텀의 영향은

$${}^C\Delta_D = {}^D T_C \Delta_C(d_Z, \delta_X, \delta_Y) {}^C T_D$$

이 되고 데이텀의 우선순위에 따라 A와 B데이텀의 영향을 제외하면

$${}^C\Delta_D = {}^D T_C \Delta_C(d_Z) {}^C T_D$$

가 C 데이텀의 영향이다.

E원통형상에 대해서도 앞의 방법과 마찬가지로 구할 수 있으며 다음 Table 2는 각 형상에 주어진 공차의 결과를 정리한 것이다. 공차를 표현하는 미소 변화를 저장하고 전파하기 위하여 본 연구에서는 객체지향언어 (object oriented language)인 C++를 사용하였다. C++ 언어는 객체 지향 개념을 지원하는 언어중 가장 보편적으로 사용하는 언어이다. 부록에서는 C++ 언어를 사용하여 구현한 자료구조를 보이고 있다.

Table 2 The results of tolerance representation of the drawing example

Feature	Form and Size	Orientation	Location
A(Δ)	$d_z = [-0.01, 0.01]$		
B(Δ)	$d_z = [-0.01, 0.01]$	$\delta_x = [-0.05, 0.05]/20$	
D(Φ)	$d_x = [0, 0.06]$	$\delta_y = [-0.1, 0.1]/20$ ${}^A\Delta_D$	$d_x = [-0.2, 0.2]$ ${}^A\Delta_D$ ${}^B\Delta_D$ ${}^C\Delta_D$
E(Φ)	$d_x = [-0.02, 0.02]$ $d_x = [0, 0.06]$		$d_x = [-0.1, 0.1]$ ${}^A\Delta_E$ ${}^D\Delta_E$

8. 결 론

미소 변환 행렬을 이용한 공차법 (간단히 미소 공차법 (differential tolerancing)이라고 하자.)은 현재의 표준⁽²¹⁾과 호환이 가능하다. 미소 공차법은 평면과 원통에 대하여 공차를 표현할 수 있고 또한 공차의 영향을 데이터의 우선 순위를 고려하여 다른 관계된 형상에 간단한 합 의 연산으로 전파할 수 있다. 이런 간단한 공차의 표현과 전파는 CAD/CAM의 통합에 있어서 매우 중요한 역할을 담당할 수 있다. 예를 들면, 미소 공차법은 3차원에서의 공차 분석 문제등 다양한 문제에 쉽게 적용할 수 있다. 왜냐하면 변화를 표현하는 미소 변환 행렬의 각 성분이 공차와 유사한 성질을 갖는 인터벌 수로 표현되었기 때문이다. 이러한 인터벌수의 연산에 통계적인 기법을 도입하면 통계적인 공차 분석 (statistical tolerance analysis)이 가능할 것이다.

조립체를 구성하는 대부분의 부품이 평면과 원통으로 이루어졌기 때문에 공차를 표현하고 저장하기 위하여 이 두 형상만을 고려하였다. 그러나 구형, 도우넛형 (torus) 이나 자유곡면등의 형상에 공차를 부여하거나 이들 형상의 조립체를 고려하고자 하는 경우에는 미소 변환 행렬의 성분을 형상의 특징에 맞도록 결정하여야 할 것이다.

참 고 문 헌

1. A.A.G. Requicha and H.B. Voelcker. Solid modeling: a historical summary and contemporary assessment. *IEEE Computer*

- Graphics and Applications, 2(2):9-24, 1982.
2. A.A.G. Requicha and H.B. Voelcker. Solid modeling: Current status and research direction. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 3(7):25-37, 1983.
3. R.C. Hillyard and I.C. Braid. Analyses of dimensions and tolerance in computer aided tolerances. *Computer Aided Design*, 10(3):161-166, 1978.
4. R.A. Light and D.C. Gossard. Modification of geometric models through variational geometry. *Computer Aided Design*, 14(4):209-214, July 1982.
5. A.A.G. Requicha. Toward a theory of geometric tolerance. *International Journal of Robotic Research*, 2(4):45-60, 1983.
6. J.Rossignac and A.A.G. Requicha. Offsetting operations in solid modeling. *Computer Aided Geometric Design*, 3:129-148, 1986.
7. F.Etesami. Tolerance verification through manufactured part modeling. *Journal of Manufacturing System*, 7(3):223-232, 1988.
8. M.Boyer and N.F. Stewart. Modeling spaces for toleranced objects. *International Journal Robotics Research*, 10(5):570-582, October 1991.
9. N.F. Stewart. Sufficient condition for correct topological form in tolerance specification. *Computer Aided Design*, 25(1):39-48, January 1993.
10. N.S. Bernstein and K.Preiss. Representation of tolerance information in solid models. In *ASME 15th Design Automation Conf.*, pages 37-48. ASME, 1989.
11. L.Rivest, C.Fortin, and C.Morel. Tolerancing a solid model with a kinematic formulation. *Computer Aided Design*, 26(6):465-476, June 1994.
12. T.Binford, L.Frants, M.R. Cutkosky, and J.C. Tsai. Representation and propagation of tolerances for CAD/CAM systems. In *Proceedings of The IFIP WG5.2 Workshop*

on Geometric Modeling, 1990.

13. M.J. Cardew-Hall, T.Labans, G.West, and P.Dench. A method of representing dimensions and tolerances on solid based freeform surfaces. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, 10(3):223-234,1993.
14. A.Wirtz. Vectorial tolerancing for quality control and functional analysis in design. In *CIRP International Working Seminar on Computer Aided Tolerancing*, PennState University, May 1991.
15. K.Martinsen. Vectorial tolerancing for all types of surfaces. In *Advances in Design Automation*, volume2, pages 187-198. ASME, 1993.
16. G.Henzold. Comparison of vectorial tolerancing and conventional tolerancing. In *Dimensional tolerancing and metrology*, volume 27, pages 147-160. ASME, 1993.
17. J.U. Turner. A feasibility space approach for automated tolerancing. *Journal of Engineering for Industry*, 115:341-346, August 1993.
18. R.E. Moore. *Interval Analysis*. Prentice-Hall, 1966.
19. R.E. Moore. *Methods and Applications of Interval Analysis*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1979.
20. R.P. Paul. *Robot Manipulators: Mathematics, Programming and Control*. The MIT Press, 1981.
21. ISO. *ISO standards*.

부 록

자료 구조

Entity 클래스를 기본으로 하여 Fig.6 과 같은 계층적인 구조를 이루며 상위 클래스의 연산과 같은 성질을 상속 받도록 하였다.

Interval은 상한값과 하한값을 갖는 인터벌 수를 저장하기 위한 클래스이며 이에 필요한 각종 연산을 정의하게 된다. 실수는 사칙연산이 가능하며 또한 인터벌 수로 이

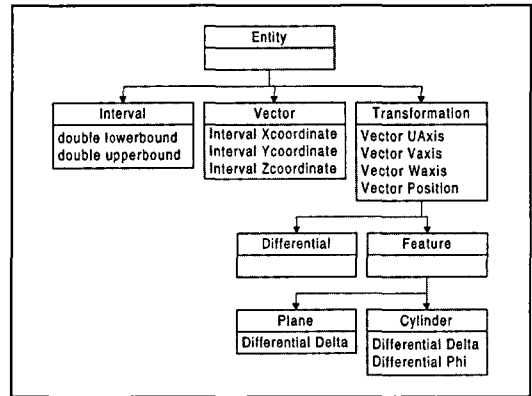


Fig. 6 A data structure for tolerance representation This figure shows the class hierarchies to represent tolerance using C++. The Differential class stores tolerance information and the Feature class plays a role of bridge between geometric modeling system and tolerance information.

러한 사칙 연산 및 실수에 적용할 수 있는 모든 연산을 정의할 수 있다. Vector와 Transformation은 인터벌수로 구성된 벡터와 변환 행렬을 저장하기 위한 클래스이며 이들 클래스 간의 각종 연산을 정의한다. 이들 클래스에서 가장 기본적인 연산은 벡터 및 위치를 나타내는 점을 변환행렬에 의해서 평행이동, 회전 또는 확대하도록 하는 것이다. 또한 변환 행렬 사이에는 집합 연산 (concatenation)이 가능하다.

Differential은 Transformation의 성질을 상속받아 미소 변환 행렬을 표현하며 상속된 변환 행렬에 관계된 연산 이외의 연산을 정의한다. 예를 들면, 변환 행렬 사이의 합 연산은 의미가 없으나 미소 변환 행렬사이에서는 합 연산이 필요하다. 이 클래스는 공차정보를 저장하는데 사용된다.

Feature 클래스는 형상에 관한 정보를 저장하기 위한 가장 기본적인 클래스이며 형상의 자세와 위치를 결정하기 위하여 Transformation 클래스로부터 성질을 상속 받는다. 따라서 이 클래스는 형상 모델링 시스템과 연결시킬 경우 매우 중요한 클래스이다. 형상 모델링 시스템에 공차를 저장하고자 하는 경우에는 형상 모델의 모서리, 면, 꼭지점과 같은 형상이 Feature 클래스로부터 상속받도록 한다.

그리고 공차는 미소 변환 행렬로 표현할 수 있으므로 Feature 클래스에서 상속된 형상 클래스들은 Differen-

tial 클래스를 저장하므로써 간단히 공차 정보를 가질 수 있다. 예를 들면, 본 연구에서 고려하는 형상은 평면과 원통 형상이므로 이들 두 형상에 관한 클래스를 정의할 수 있다. Plane과 Cylinder 클래스는 Feature 클래스로부터 그 성질을 상속받고 공차를 저장하고 전파하기 위한

Differential 클래스를 저장한다. 여기에서 Plane은 앞에서 설명한 바와 같이 미소 변환 행렬이 Delta 하나만이 필요하지만 Cylinder는 Delta와 Phi의 두개가 필요하게 된다. 이때 이들 미소 변환 행렬은 주어지는 공차에 따라 그 값이 결정된다.