

불완전한 기계에서의 경제적 생산량 결정 (II)

An EMQ Model In An Unreliable Machine (II)

김창현*, 홍유신**, 김수영**

Chang Hyun Kim*, Yushin Hong**, Soo-Young Kim**

Abstract

This paper presents an EMQ model which determines an economic manufacturing quantity in an unreliable machine. It is assumed that life time of a machine is generally distributed and it requires an instantaneous repair time when a machine fails. Depending on various types of failure rate function of a machine, it is discussed how to determine an EMQ and prove its uniqueness. Variations of an EMQ depending on repair cost are also examined. Through numerical experiments, extensive investigations are carried out on the effects of repair cost and setup cost to an EMQ as well as average cost, and some interesting behaviors are observed.

1. 서 론

단일 기계로 구성된 배치 (Batch) 생산 시스템하에서의 경제적인 생산량 결정에 관한 여러 연구들이 과거 수많은 저자들에 의해 진행되어져 왔다. 그 가운데 아직까지 널리 연구되고 있는 주제중의 하나는 고전적인 경제적 생산량 (Economic Manufacturing Quantity) 결정 모형을 현실의 여러가지 상황을 고

려한 실제 문제로의 확장하는 내용일 것이다 (Hax and Candea[6], Silver and Peterson [17]). 그러나 운용되고 있는 생산시스템이 불완전한 경우의 경제적 생산량 결정에 관한 연구는 그다지 폭 넓게 진행되지 못했다. 이 주제에 대한 최근의 연구 방향을 살펴보면, 다음과 같이 크게 두 가지 내용으로 대별할 수 있다. 첫번째 방향은 생산 과정 도중의 어느 시점에 생산과정 자체에 불완전성이 존재

* 포스코 경영연구소/ 포항공과대학교

** 포항공과대학교 산업공학과

하여 불량품을 생산하게 되고, 이에 따라 수율 또한 떨어지게 되는 경우에서의 경제적 생산량 결정에 관한 연구이며, 두번째 방향은 생산시스템 그 자체의 불완전성으로 인하여 생산 과정 도중에 고장이 발생하여 이를 수리하여야만 다시 생산을 시작할 수 있는 경우에서의 경제적 생산량 결정에 관한 연구이다.

첫번째 연구 방향에 대한 연구 결과로는 Rosenblatt and Lee[15]는 생산 진행과정에서 기계의 성능이 점차 퇴화하여 비정상적으로 작동함에 따라, 일정 비율만큼 불량품을 생산한다고 가정할 때의 EMQ 모형을 발표하였다. 그 후 이들[9]은 최적 생산량과 검사계획을 동시에 고려하는 모형을 발표하였는데, 기계가 지수 분포의 정상 작동상태(in-control state)의 간격을 가질 때, 기계의 비정상 작동상태를 검출하고자 하는 검사계획은 등간격(equally spaced period)을 가짐을 보여주었다. 나아가 이들[10]은 비정상적으로 작동중인 기계의 복구비용이 비정상적인 작동상태로부터 검사 후 수리하기까지의 지연시간에 비례한다고 가정하였을 때, 최적 생산계획 및 검사계획을 동시에 결정하는 모형을 발표하였다. Rahim[14]은 생산 공정의 정상 작동상태 간격이 고장을 증가함수인 일반분포를 가지며, 주기적인 샘플링 검사로 생산공정의 작동 상태를 검사하는 경우에 최적 생산량과 검사계획 및 관리도 설계안을 동시에 결정하는 재고문제와 품질문제의 혼합 모형을 발표하였다. Porteus[13]는 제품 한 단위 생산할 때마다 공정 상태가 비정상 작동상태로 바뀌는 확률이 일정하게 주어지고, 일단 비정상적인 작동상태가 되면 해당 로트를

모두 생산할 때까지 이 상태가 지속되면서 불량품을 생산한다고 가정할 때, 최적 생산량을 구하는 모형을 제시하였다. 그는 로트 크기를 적게 하면 적게 할수록 불량품 생산비율이 떨어진다는 품질과 생산량과의 관계를 명시적으로 나타내었으며, 불량품 생산비율과 로트 크기를 줄임으로써 단위 시간당 비용을 줄이기 위한 방안도 함께 제시하였다. Lee[11]는 반도체산업의 특징을 반영하여 애로 공정상에서의 평균 생산주기를 줄일 수 있는 로트 크기를 결정하는 모형을 발표하였다. 주요 가정은 웨이퍼 한 장 생산할 때마다 일정 비율로 생산공정이 비정상적인 작동상태가 되며, 이렇게 되면 다음 웨이퍼를 생산하기 전에 일정 확률로 이를 감지하여 비정상적인 작동상태를 정상 작동상태로 복구하고 재작업을 하게 된다.

두번째 연구 방향에 대한 연구 결과로는 Groenevelt et al.[4]이 기계가 불완전하여 고장이 일어날 수 있으며 지수분포의 수명을 가질 때, 수리시간을 필요로 하지 않을 경우에서의 EMQ모형을 발표하여 고전적인 EMQ모형과는 다른 여러 특성들을 보여 주었다. 또한, 그들의 또 다른 논문[5]에서는 보유 재고를 운영재고(running stock)와 안전재고로 구분한 후 생산되는 제품의 일정 비율 만큼씩 각각의 재고로 나누어 생산하고, 기계의 수명이 지수분포를 가지며, 수리시간이 임의의 분포를 가질 때 일정한 Service level을 만족시켜 주는 EMQ모형을 대기이론을 적용하여 제시하였다. 김창현 등[1]은 Groenevelt et al.[4]의 모형을 확장하여 기계의 수명이 지수분포를 가지며 일정한 수리시간을 필요로 하는 경우에서의 EMQ모형에 대해서 발

표하였는데, 비용함수는 두 부분의 실행가능 영역에 따라 달리 표현된다는 것과 최적 생산량이 속하게 되는 존재 영역에 관한 결정 조건 및 수리시간을 허용할 때와 허용하지 않을 때의 최적 생산량과 그 때의 비용 관계를 주어진 관련 비용모수와의 관계식으로 나타내었다.

이상에서 기계가 불완전할 때의 EMQ모형에 대한 연구를 간략히 살펴보았다. 본 연구에서는 Groenevelt et al.[4]의 논문을 일반화하여 기계의 수명이 일반분포를 따를 때 평균비용을 최소화하는 최적 생산량 결정모형을 제시하였다. 일반적으로 기계의 수명분포에 따른 고장율 함수(Failure Rate Function)를 유형별로 분류하여 보면 [그림 1]과 같다. 먼저 기계의 수명 분포가 지수분포인 경우 [그림 1.a]와 같이 고장율은 가동시간에 관계없이 일정하게 되고, 고장율이 시간이 경과함에 따라 증가하게 되는 경우의 고장율 함수는 볼록함수(Convex Function)인 경우([그림 1.b] 참조), 오목함수(Concave Function)인 경우([그림 1.c] 참조)와 [그림 1.c]에서 보는 바와 같이 볼록함수와 오목함수가 합쳐진 형태 등 세 가지로 구분될 수 있다. 고장율이 시간이 경과함에 따라 감소하는 경우는 [그림 1.e]에서와 같이 볼록함수인 경우를 생각할 수 있는데, 이 형태는 기계가 휴지 상태일 때의 고장율이 유한한 경우라고 생각할 수 있다. 기계가 휴지상태에서의 고장율은 기계 특성상 가동 전에 원천적으로 내재하고 있는 시간 0에서의 순간 고장율로 해석할 수 있으며, 이러한 형태는 감마 분포나 와이블 분포의 형상모수가 1보다 작을 때의 감소함수 형태 즉, 시간 0에서의

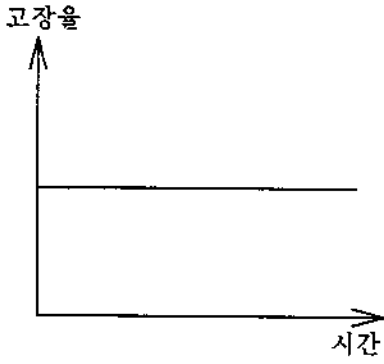
순간 고장율이 무한대인 형태와 비교하여 볼 때 전자가 훨씬 현실적인 것으로 사료된다. 한편 신뢰도 이론[2, 7, 8]에 의하면 기계의 수명 분포에 대한 고장율 함수가 욱조형의 볼록함수 형태를 가지고 있는 경우도 많이 있는 것으로 알려져 있다([그림 1.f] 참조). 즉 기계의 가동이 안정화 상태로 진행되는 초기단계에서는 고장율이 점차 감소하다가 일단 안정화 단계에 들어가면 고장율이 크게 변하지 않고 일정한 수준을 유지하게 되며 다시 부품의 마모 등으로 고장율이 증가하게 되는 경우라 할 수 있다.

본 연구에서는 기계의 고장율 함수가 [그림 1]에 주어진 바와 같이 6가지의 유형을 갖고, 고장이 발생하게 되면 모듈라 타입의 수리 부품을 사용하여 즉시 수리가 이루어지는 경우에서의 수리모형을 개발하였다. 본 연구의 구성은 2절에서는 수리모형을 위한 가정 및 전제조건을 설명하고 모형에 대한 수식화 및 해의 결정을 다루었으며, 3절에서는 본 모형의 행태를 살펴보기 위하여 수치실험 결과를 제시하였다. 최종 결론과 함께 향후 연구방향에 대하여는 4절에 기술되어 있다.

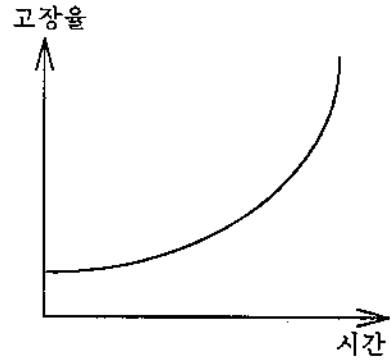
2. 수리모형

본 논문에서 제시된 수리모형은 고전적인 EMQ모형을 기본으로 하여 아래와 같은 가정하에서 개발되었다.

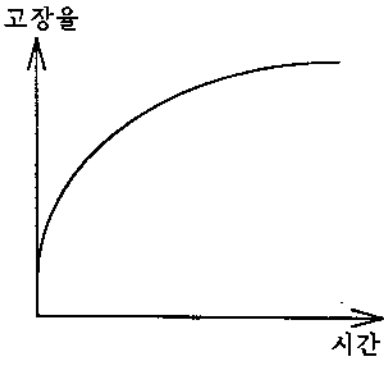
- 기계는 고장이 발생할 수 있으며, 기계의 수명분포는 [그림 1]에서 주어진 6가지 형태의 고장율 함수를 갖는 임의의 일반 분포를 따르며 이의 평균과 분산은 유한하다.
- 가동중 고장으로 생산이 중단된 경우의



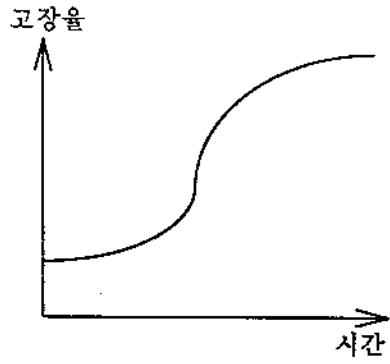
(a)



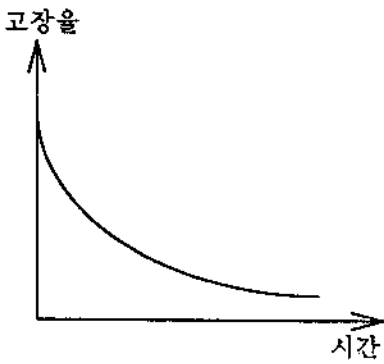
(b)



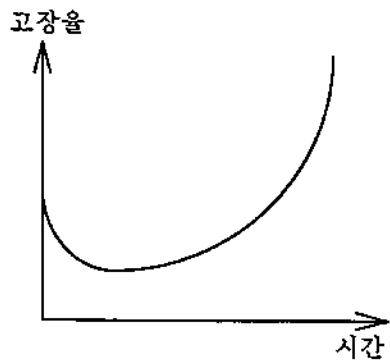
(c)



(d)



(e)



(f)

그림 1. 기계 수명 분포에 따른 고장율 함수의 유형

수리시간은 모듈러 타입의 부품을 사용하여 즉시 수리하는 만큼 무시한다.

- 고장이 발생하게 되면 이미 편성된 로트는 취소하고 생산된 보유재고로 수요를 충족시키며 이들이 모두 소진되면 다시 생산을 시작한다.

- 기계가 고장나지 않고 정해진 로트만큼 생산하거나, 혹은 수리를 마친 후, 새로이 생산에 투입될 때의 기계 상태는 항상 초기 작동상태로 돌아간다.

- 제품 단위당 생산비용은 로트 크기와는 무관하다.

수리모형의 개발에 앞서 이에 필요한 기계의 특성치를 포함한 관련 모수 및 비용치들을 아래와 같이 정의한다.

- d : 수요율 (개/시간)
- p : 생산율 (개/시간)
- h : 재고 보유비용(원/시간/개)
- S : 생산 준비비용(원)
- M : 기계 고장시의 수리비용(원)
- Q : 생산량 (개)
- T : 기계의 수명(시간), $T \sim f(t)$
- $f(t)$: 기계수명의 확률 밀도 함수
- $F(t)$: 기계수명의 누적 밀도 함수, $\bar{F}(t) = 1 - F(t)$
- $r(t)$: 기계수명의 고장을 함수
($=f(t)/\bar{F}(t)$)

본 모형에서는 [그림 2]에서와 같이 두 가지 유형의 재고 Cycle이 발생하게 된다. [그림 2]에서 첫번째 재고 수준의 궤적은 최적 생산량을 생산할 때까지 기계에 고장이 발생하지 않고 정상적으로 가동된 경우에서의 궤적으로 생산 준비비용 및 재고비용이 발생하게 되고, 두번째 궤적은 기계가동중에 고장이 발생했을 때의 재고 수준 궤적으로서 위

의 두 가지 비용요소 이외에 고장 수리를 위한 수리비용이 발생하게 된다. 이러한 모형에서 단위시간당 평균비용, $C(Q)$, 은 Renewal Reward Theorem[16]에 의하여 아래와 같이 정의된다.

$$C(Q) = \frac{E[\text{한 Cycle 내에서 발생하는 비용}]}{E[\text{한 Cycle의 길이}]}$$

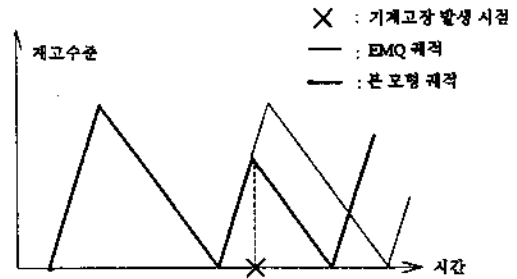


그림 2. 재고 수준 궤적

$W(Q)$ 를 한 Cycle의 평균길이, $U(Q)$ 를 한 Cycle내에서 발생하는 비용으로 정의하게 되면

$$W(Q) = \int_0^{Q/p} \frac{p}{d} f(t) dt + \int_{Q/p}^{\infty} \frac{Q}{d} f(t) dt$$

$$= \frac{p}{d} \int_0^{Q/p} t f(t) dt + \frac{Q}{d} \bar{F}(Q/p) \quad (1)$$

$$U(Q) = \int_0^{Q/p} \{S + M + \frac{1}{2}h(p-d)\frac{p}{d} f(t)\} dt +$$

$$\int_{Q/p}^{\infty} \{S + \frac{1}{2}h\frac{p-d}{pd} Q^2 f(t)\} dt$$

$$= S + MF(Q/p) + \frac{1}{2}h(p-d) \times$$

$$\frac{p}{d} \{(Q/p)^2 \bar{F}(Q/p) + \int_0^{Q/p} t f(t) dt\} \quad (2)$$

와 같이 나타낼 수 있으므로 평균비용함수

$C(Q)$ 는 Groenevelt et. al[4]에서 제시된 바와 같이 아래의 식 (3)으로 주어진다.

$$C(Q) = \frac{S + MF(Q/p) + \frac{1}{2}h(p-d)\frac{Q}{d}\{F(Q/p)\bar{F}(Q/p) + \int_0^{Q/p} f(t)dt\}}{\frac{Q}{d}\left\{\int_0^{Q/p} f(t)dt + \frac{Q}{d}\bar{F}(Q/p)\right\}} \quad (3)$$

비용함수 $C(Q)$ 의 모양을 살펴보기 위하여 극한치를 구하여 보자. Q 가 0에 접근할 때의 극한치는

$$\lim_{Q \rightarrow 0^+} W(Q) = 0, \quad \lim_{Q \rightarrow 0^+} U(Q) = S$$

가 되어 Q 가 0으로 접근함에 따라 비용함수 $C(Q)$ 는 무한대로 증가하는 한편, Q 가 무한대로 증가하게 되면

$$\lim_{Q \rightarrow \infty} W(Q) = \frac{p}{d}E(T),$$

$$\lim_{Q \rightarrow \infty} U(Q) = S + M + \frac{1}{2}h(p-d)\frac{Q}{d}\{Var[T] + E[T]^2\} \quad (4)$$

가 되어 평균비용함수 $C(Q)$ 는 유한한 값으로 존재한다. 최적 생산량 Q^* 가 무한대라는 의미는 매 Cycle마다 고장이 날 때까지 생산하는 정책을 뜻한다.

위의 수리모형에서 단위 시간당 평균 비용을 최소화하는 최적 생산량 Q^* 를 구하기 위하여 $C(Q)$ 의 일차 도함수를 구하여 보자.

$$C'(Q) = \frac{\{U'(Q)\bar{F}(Q/p)W(Q) - \{W'(Q)\bar{F}(Q/p)U(Q)\}\bar{F}(Q/p)\}}{[W(Q)]^2}$$

위의 식에서

$$q(Q) = \{U'(Q)\bar{F}(Q/p)W(Q) - \{W'(Q)\bar{F}(Q/p)U(Q)\} \quad (5)$$

라 정의하게 되면, $q(Q)$ 는 다음과 같이 정리된다.

$$q(Q) = \left[\frac{M}{p}r(Q/p) + \frac{h(p-d)}{pd}Q\right]W(Q) - \frac{1}{d}U(Q) \quad (6)$$

함수 $q(Q)$ 의 극한값은

$$\lim_{Q \rightarrow 0^+} q(Q) = -S/d < 0, \quad \lim_{Q \rightarrow \infty} q(Q) = \infty > 0 \quad (7)$$

이 됨에 따라 $C'(Q)$ 의 극한값은

$$\lim_{Q \rightarrow 0^+} C'(Q) = -\infty < 0, \quad \lim_{Q \rightarrow \infty} C'(Q) = 0^+ > 0$$

가 되며, 식 (7)로부터 $C'(Q^*) = 0$ 를 만족하는 최적 생산량 Q^* 가 적어도 한 개는 존재함을 알 수 있으며, 아래의 [정리 1]에서 그 해가 유일함을 증명하였다.

[정리 1] (최적 생산량의 유일성)

$C'(Q^*) = 0$ 을 만족하는 최적 생산량 Q^* 는 유일하며, 그 때의 비용함수의 값은 아래의 식 (8)과 같이 주어진다.

$$C(Q^*) = \frac{U(Q^*)}{W(Q^*)} = \frac{dM}{p}r(Q^*/p) + \frac{h(p-d)}{p}Q^* \quad (8)$$

(증명)

식 (6)에서 주어진 $q(Q) = 0$ 가 유일한 해를 가짐을 증명하게 되면 $C'(Q) = 0$ 역시 유일한 해를 가지게 된다. 식 (5)로부터 $q'(Q)$ 는 식 (9)와 같이 주어진다.

$$q'(Q) = \left[\frac{M}{p^2}r'(Q/p) + \frac{h(p-d)}{pd}\right]W(Q) \quad (9)$$

고장율 함수가 비감소 함수일 때([그림 1. a,b,c,d])

이 경우에는 모든 시간 t 에 대해서 $r(t) \geq 0$ 이므로 식 (9)에서 항상 $q(Q) > 0$ 가 되어 $q(Q)$ 는 모든 Q 에 대하여 증가함수이므로 식 (7)로부터 $q(Q^*) = 0$ 를 만족시키는 해 Q^* 는 유일함을 알 수 있으며, 이에 따라 $C'(Q^*) = 0$ 를 만족하는 해 역시 유일하다.

고장율 함수가 블록형 감소함수([그림 1.e]) 및 블록형 육조 형태를 가질 때 ([그림 1.f])

고장율 함수가 블록형 감소 함수인 경우에는 고장율 함수의 기울기가 모든 시간 t 에 대해 $r(t) < 0$ 이지만 $r(t)$ 가 비감소 함수이고 $\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = 0$ 이므로 시간 0^+ 에서의 순간 고장율의 값에 따라서 다음과 같이 두 가지 경우로 나누어 생각할 수 있다.

i) $\frac{M}{p^2}r(0) + \frac{h(p-d)}{pd} \geq 0$ 일 때

이 때는 항상 $q(Q) \geq 0$ 가 되어 $q(Q)$ 는 모든 Q 에 대하여 비감소 함수이므로 Q^* 는 유일하다.

ii) $\frac{M}{p^2}r(0) + \frac{h(p-d)}{pd} < 0$ 일 때

Q^* 가 $\frac{M}{p^2}r(Q^*/p) + \frac{h(p-d)}{pd} = 0$ 를 만족시킨다고 하자. Q 가 0에서 부터 Q^* 까지 증가함에 따라 $q(Q)$ 는 $q(0^+) < 0$ 이므로 음의 부호를 띄면서 감소한다. 즉, $q'(Q) < 0$. 그러나, Q 가 Q^* 보다 커지면 $q(Q) > 0$ 이 되므로 $q(Q)$ 는 모든 Q 에 대하여 Q 가 증가함에 따라 $q(Q)$ 는 단조 증가한다. 따라서, $q(Q^*) = 0$ 을 만족하는 해 Q^* 는 유일하다. 고장율 함수가 블록형의

육조 형태를 가질 때에도 유사하게 증명되므로 생략한다.

Q^* 에서의 비용함수 값은 $q(Q^*) = 0$ 을 만족하는 식 (6)으로부터 [정리 1]에서와 같이 쉽게 유도될 수 있다. ■

일반적으로 고장율 함수가 단조감소일 경우 감소형태가 블록함수와 오목함수가 여러 번 혼합된 형태이면 기계 가동시간이 길어짐에 따라 시간 t 에 대해 $\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = 0$ 와 같은 특성을 보인다 하더라도 $q(Q^*) = 0$ 을 만족하는 해 Q^* 는 여러개가 존재할 수 있다.

[정리 1]에서 $q(Q^*) = 0$ 을 만족하는 최적생산량 Q^* 는 Closed 형태로는 나타낼 수 없으나, Newton Raphson 방법과 같은 수치적 방법으로 간단히 구할 수 있다.

한편, 식 (6)을 전개하면 아래와 같이 정리된다.

$$q(Q) = \frac{M}{d} \left[r\left(\frac{Q}{p}\right) \int_0^{Q/p} \frac{f(t)}{r(t)} dt - F\left(\frac{Q}{p}\right) \right] - \frac{S}{d} + h(p-d) \frac{p}{d} \times \left[\int_0^{Q/p} t f(t) dt - \frac{1}{2} \int_0^{Q/p} t^2 f(t) dt + \frac{1}{2} \frac{Q^2}{p^2} F\left(\frac{Q}{p}\right) \right] \quad (10)$$

식 (10)에서 기계의 수명분포가 지수분포를 가질 때에는 첫번째 항의 값이 0이 되기 때문에 최적 생산량은 수리 비용과 무관하게 결정되며, 식 (8)로부터 최소 평균비용은 최적 생산량 및 수리비용과는 선형관계를 가지게 된다[4]. 이는 고장율이 가동시간에 관계 없이 일정하다고 가정했기 때문에 연간 고장 횟수는 고장율과 연간 총 생산시간에 의해서만 결정될 뿐이므로 연간 총 생산시간이 년

간 생산로트내에 어떻게 분할되어 들어가는지 하는 문제, 즉, 생산로트의 크기와는 전혀 관계가 없기 때문이다. 그러나, 본 모형에서와 같이 고장율이 가동시간에 따라 변화하는 경우에는 식 (10)으로 부터 최적 생산량은 수리비용에 의존적이 되며, 따라서 최소 평균비용은 최적 생산량은 물론 수리비용에 따라 더 이상 선형 관계를 가질 수 없게 된다. 아래의 [정리 2]에서는 본 모형에서의 수리비용이 최적 생산량에 미치는 영향을 알아보고자 한다.

[정리 2] (수리비용의 최적 생산량에 대한 영향)

기계의 고장을 함수가 증가함수일 경우에는 수리비용이 증가함에 따라 최적 생산량은 감소하며, 감소함수일 경우에는 수리비용이 증가함에 따라 최적 생산량 역시 증가한다.

<증명>

수리비용이 M_1 일 때의 식 (6) 및 최적 생산량을 각각 $q(Q_1|M_1)$, Q_1^* 라 하고 $M_2(M_1 < M_2)$ 일 때의 식 (6) 및 최적 생산량을 각각 $q(Q_2|M_2)$, Q_2^* 라 정의하면, Q_1^* , Q_2^* 는 각각 $q(Q_1^*|M_1) = 0$, $q(Q_2^*|M_2) = 0$ 을 만족한다. 만일, 임의의 생산량 Q 가 $q(Q|M_2) < 0$ 이면 [정리 1]의 증명에서 설명된 바에 따라 $Q_2^* < Q$ 가 된다. 식 (10)에서

$$q(Q_1^*|M_2) = \frac{M_2 - M_1}{d} \left[r \left(\frac{Q_1^*}{p} \right) \int_0^{Q_1^*/p} \frac{f(t)}{r(t)} dt - F \left(\frac{Q_1^*}{p} \right) \right] \quad (11)$$

기계의 고장을 함수가 증가함수일 경우에는 식 (11)에서 대괄호안의 값이 항상 양이

되므로 $q(Q_1^*|M_2) > 0$ 이 되어 $Q_1^* > Q_2^*$ 이 된다. 따라서, 수리비용이 증가함에 따라 최적 생산량은 감소함을 알 수 있다. 한편, 고장을 함수가 감소함수일 때에는 $q(Q_1^*|M_2) < 0$ 이 되어 $Q_1^* < Q_2^*$ 관계가 성립하므로 수리비용이 증가함에 따라 최적 생산량이 증가하게 된다. ■

이어서, 본 모형과 기계의 고장이 발생하지 않는 고전 모형에서의 최적 생산량을 비교하여 보고자 한다. 기계수명이 지수분포를 따를 때의 최적 생산량은 고전 모형에서의 최적 생산량보다 항상 크다는 사실은 Groenevelt et al.[4]의 모형에서 제시된 바 있다. 그러나, 기계의 수명이 일반분포를 따르게 되면 본 모형의 최적 생산량은 수리비용에 의존적이 되기 때문에 Groenevelt et al.[4]모형의 결과가 더 이상 성립될 수 없음을 명백하다.

[정리 3] (본 모형과 고전 모형에서의 최적 생산량 비교)

기계의 고장을 함수가 증가함수일 때에는 수리비용에 따라 두 모형에 대한 최적 생산량의 대소가 결정되며, 고장을 함수가 감소함수일 경우에 본 모형에서의 최적 생산량은 수리비용에 관계없이 고전 모형의 최적 생산량보다 항상 크다.

<증명>

Q_0^* 를 고전 모형에서의 최적 생산량이라 정의하면 아래와 같다.

$$Q_0^* = \sqrt{\frac{2dS}{h(1-d/p)}}$$

이를 식 (10)에 대입하여 정리하면

$$q(Q_0^*) = \frac{M}{d} \left[r(Q_0^*) \int_0^{Q_0^*/p} \frac{f(t)}{r(t)} dt - F(Q_0^*) \right] - \frac{2\beta^2 S}{dQ_0^*} \left\{ \int_0^{Q_0^*/p} (Q_0^* - t) F(t) dt \right\} \quad (12)$$

고장을 함수가 증가함수일 경우에는 식 (12)의 첫번째 항이 항상 양이 되므로 $q(Q_0^*)$ 의 부호에 따라 두 모형에 대한 최적 생산량의 대소 관계가 결정된다. 상대적으로 수리비용을 무시할 수 있을 경우에는 식 (12)에서 $q(Q_0^*) < 0$ 이므로 본 모형의 최적생산량은 고전 모형의 최적 생산량보다 크게 됨을 알 수 있으며, 수리비용이 점차적으로 커지게 되면 $q(Q_0^*) > 0$ 이 되어 본 모형의 최적 생산량이 적다.

한편, 고장을 함수가 감소함수일 때에는 첫 번째 항이 항상 음이 되어 $q(Q_0^*) < 0$ 이 되므로 항상 $Q_0^* > Q_0^*$ 이 성립한다. 즉, 고장을 함수가 감소함수인 경우, 본 모형의 최적 생산량은 고전 모형의 최적 생산량보다 항상 크다. ■

3. 수치실험

본 절에서는 Groenevelt et al.[4]모형의 예제에서 사용한 입력자료를 바탕으로 기계의 고장을 함수가 [그림 1]에 나타난 바와 같이 여러 유형을 가질때 유형별로 모수에 따른 비용함수의 모양, 생산 준비비용과 기계 수리비용에 따른 최적 생산량 및 그 때의 최소비용을 중심으로 수치실험을 수행하고, 그 분석 결과를 예시하고자 한다. 이와 같은 수치실험은 고장을 함수의 유형에 따른 기계의 특성치를 포함한 관련 모수 및 비용요소들에

대한 민감도를 여러 형태로 분석하여 모형의 행태를 파악함으로써, 본 모형이 실제 현장에서 적용될 때 의사 결정상 하나의 지침을 제공해 줄 수 있다.

[그림 1]에 주어진 고장을 함수의 유형에 따른 분포는 [표 1]에 정리되어 있다. [그림 1.b]와 [그림 1.c]는 Weibull 분포를 이용하여 표현할 수 있으며, [그림 1.d]의 경우에는 적절한 분포로 표현할 수 없어 수치실험을 생각하였다. [그림 1.e]와 [그림 1.f]의 경우는 아래와 같이 3개의 모수를 사용한 확률 밀도함수 및 고장을 함수를 갖는 분포를 정의함으로써 표현할 수 있다[7,8].

$$f(t) = \frac{(1 + \eta t)\theta t + \lambda}{(1 + \eta t)^{\lambda/\eta + 1}} e^{-\theta t^2/\eta}, \quad \theta, \lambda, \eta \geq 0, t > 0$$

$$r(t) = \theta t + \frac{\lambda}{1 + \eta t}, \quad t > 0$$

$\theta = 0$: 단조감소형 고장을
 $0 < \theta < \lambda \eta$: 육조형 고장을

수치실험에 있어 분포별로 고장간 평균시간(MTBF)이 같도록 분포의 모수를 설정하였으며, [표 1]은 수치 실험을 위한 시나리오 분포별 모수를 나타낸 것으로서 예시된 그림들에서 범례로 사용하였다. 또한, 수치실험을 위한 비용요소와 함께 실험 대상 시나리오는 [표 2]에 나타난 바와 같다.

[그림 3]에서는 [표 1]의 6개의 시나리오에 대하여 생산량의 증가에 따른 평균 비용함수의 변화를 살펴보았다. 고전 EMQ 모형(S1)에서는 최소점을 지나서 일정한 생산량까지는 평균비용이 가장 적었으나 생산량이 점차 커짐에 따라 재고비용이 증가하게 되어

표 1. 수치실험상의 분포별 모수

시나리오	분포	평균	분산	고장율유형
S1	EMQ	-	-	-
S2	Exp (0.2)	5	25	[그림 1.a]
S3	Wei(3, 0.1786)	5	3.30	[그림 1.b]
S4	Wei(1.75, 0.1781)	5	8.70	[그림 1.c]
S5	Bat(0, 0.25, 0.05)	5	41.67	[그림 1.e]
S6	Bat(0.04, 0.25, 2.2)	5	12.44	[그림 1.f]

표 2. 비용요소 및 적용분포

그림번호	비용요소	시나리오
[그림 3]	$p=35, d=30, h=75, S=450, M=1000$	S1 - S6
[그림 4]	$p=35, d=30, h=10, S=450, M : \text{변화량}$	S1 - S6
[그림 5]	$p=35, d=30, h=10, S=450, M : \text{변화량}$	S1 - S6
[그림 6]	$p=35, d=30, h=10, S=450, M : \text{변화량}$	S3
[그림 7]	$p=35, d=30, h=10, S : \text{변화량}, M=1000$	S1 - S6
[그림 8]	$p=35, d=30, h=10, S : \text{변화량}, M : \text{변화량}$	S6

평균비용도 지속적으로 커지게 된다. 그러나, 기계에 고장이 발생하게 되는 경우에는 생산량이 증가함에 따라 생산시간중에 고장이 일어날 확률이 높아지기 때문에 생산량이 평균비용에 미치는 영향이 점차 감소된다. 이에 따라 평균비용의 증가세는 점차 둔화되어 일정한 값에 수렴하게 된다(식 (4) 참조). 이는 또한 생산량이 커지게 되면 재고비용이

평균비용에 미치는 영향이 수리비용의 영향보다 적다는 것을 의미한다.

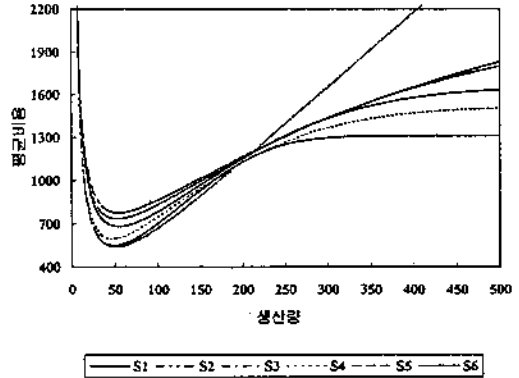


그림 3. 생산량에 따른 비용함수

[그림 4]는 수리비용의 증가에 따른 최적 생산량의 변화를 나타낸 것으로 [정리 2]에서 증명된 결과를 수치실험을 통하여 검증하여 본 결과로서, 고장율이 감소하는 경우(S5), 수리비용이 증가함에 따라 최적 생산량은 커지게 된다. 이는 생산시간이 길어질수록, 즉 생산량이 많아질수록 기계의 고장율이 감소하기 때문에 수리비용이 커짐에 따라 재고비용을 더 부담하더라도 생산량을 늘려 고장율을 낮춤으로써 수리비용을 줄일 수 있기 때문이다. 반면에 고장율이 증가하는 경우에는 위의 설명과 반대의 경우로 쉽게 설명될 수 있으며, 고장율이 일정한 지수분포의 경우(S2)에는 수리비용에 관계없이 최적 생산량이 일정하다는 것은 이미 알려져 있다 [4]. 또한 고장율이 감소하는 경우(S5)의 최적 생산량은 고전모형의 EMQ보다 항상 크며, 고장율이 증가하는 경우(S3, S4) 수리비용이 극히 적은 범위에서는 최적 생산량이 고전모형의 EMQ보다 크게 되지만, 그 밖의 범위에서는 고전모형의 EMQ보다 최적 생산

량이 작아진다는 것을 볼 수 있다.([정리 3] 참조). 한편 고장을 함수가 육조형인 경우(S6), [그림 4]에는 수리비용이 증가함에 따라 최적 생산량이 감소하는 것으로 나타나 있지만 수리비용 및 준비비용에 따라 일정한 수준을 유지, 혹은 증가하는 경우가 있음이 뒤에 설명되어 있다.

이외에도 Weibull 분포의 예에서 보는 바와 같이 동일한 분포(지수 분포 포함)내에서 고장간 평균시간을 같게 유지하고, 모수를 변화시켜 분산의 크기만 달리하면서(S2, S3, S4) 최적 생산량을 구해 본 결과 [그림 4]에서 보는 바와 같이 최적 생산량의 대소관계는 분산의 대소관계와 그 움직임을 같이 하고 있는 것으로 나타났다. 이와 같은 현상은 감마 분포일 때도 관찰할 수 있었으며 수리적으로 입증하지는 못했지만, 식 (4)에서 보는 바와 같이 비용함수의 극한값 행태를 통하여 위와 같은 결론을 유추할 수 있다.

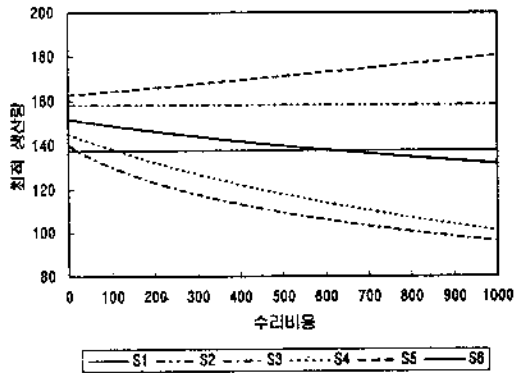


그림 4. 수리비용의 변화에 따른 최적 생산량

[그림 5]는 수리비용과 최적 생산량에서의 최소 평균비용의 관계를 표시한 그림으로서 기계에 고장이 발생하는 경우에는 수리비용이 증가함에 따라 최소 평균비용은 항상 증

가하는 것으로 나타나 있다. 특히 지수분포를 가질 때에는 식 (8)에서 고장율이 일정함에 따라 수리비용과 최소 평균비용과는 완전한 선형관계를 유지하고 있다[4]. 그러나 일반분포의 경우(S3, S4, S5, S6)에는 수리비용과 최소 평균비용이 선형관계가 아님을 앞에서 설명한 바 있지만 [그림 5]를 보면 선형 회귀식의 R^2 가 0.993 이상으로 거의 선형 관계를 유지하고 있음을 알 수 있다. 그러나 고장을 함수가 증가함수일때(S3), [그림 6]에 나타난 수리비용과 최소 평균비용을 구성하는 평균 수리비용 및 평균 재고비용의 관계를 보면 수리비용이 증가함에 따라 평균 수리비용은 비선형으로 증가하고, 평균 재고비용은 비선형으로 감소하지만 두 비용의 합인 최소 평균비용은 거의 선형으로 증가하고 있는 재미있는 현상을 볼 수 있다.

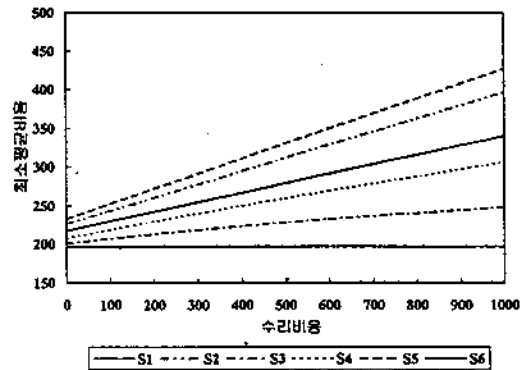


그림 5. 수리비용의 변화에 따른 최소 평균비용

[그림 7]은 수리비용을 일정하게 하고 준비비용과 최적 생산량의 관계를 나타낸 그림으로, 각 분포별로 준비비용의 변화에 따른 최적 생산량의 민감도를 분석하기 위하여 회귀분석을 실시하였다. 고전 EMQ 모형의 경우, 최적 생산량은 준비비용의 제곱근에 비

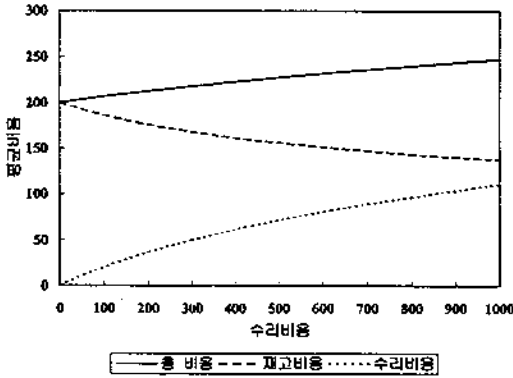


그림 6. 수리비용의 증가에 따른 비용요소별 평균비용

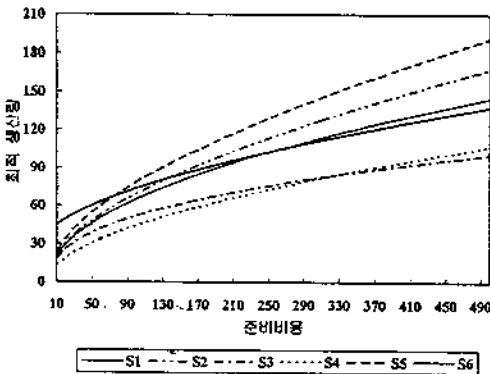


그림 7. 준비비용에 따른 최적 생산량

례함에 따라 아래와 같은 회귀식을 이용한 회귀분석의 결과가 [표 3]에 주어져 있다.

$$Q^* = \sqrt{2d/h(1-d/p)} S^*$$

[표 3]을 보면 지수분포의 경우(S2) 준비비용이 최적 생산량에 미치는 영향은 고전 EMQ 모형(S1)과 비슷한 수준을 보이고 있으나 고장을 함수가 증가함수인 경우(S3,S4)에는 고전 EMQ 모형과 비교할 때 준비비용이 최적 생산량에 미치는 영향은 적은 것으

표 3. 생산 준비 비용에 따른 최적생산량 추이

시나리오	회귀식	R2
S1	$Q^* = 6.4807S^{0.5}$	1
S2	$Q^* = 6.4807S^{0.5192}$	0.9984
S3	$Q^* = 6.4807S^{0.445}$	0.9969
S4	$Q^* = 6.4807S^{0.4385}$	0.9585
S5	$Q^* = 6.4807S^{0.543}$	0.9996
S6	$Q^* = 6.4807S^{0.5068}$	0.6728

로 나타난 반면에, 감소함수인 경우(S5)에는 오히려 준비비용의 영향이 더 커지는 것을 볼 수 있다. 한편, 육조형 분포의 경우에는 R²의 값이 너무 낮기 때문에 준비비용의 영향에 대한 비교에는 적절치 못하다. 이러한 결과들은 생산시스템이 완전한 경우와 불완전한 경우에서 서로 다른 행태를 보여주고 있기 때문에 이 분야에 대한 여러 측면에서의 비교 연구도 충분한 가치가 있다고 생각된다. 예를 들면, 일정한 투자나 노력을 통하여 준비비용을 절감하여 배치 생산에서의 로트 크기를 줄여 재공을 줄임으로써 재고 비용뿐만 아니라 제품 수율의 증대, 수요가에 대한 인도시간 감소, 시장 수요에 대한 기민한 대응 효과를 얻고자하는 일련의 연구[3, 12, 13]가 있었는데, 이들 연구들은 생산시스템이 완전한 경우에서의 연구들[3, 12]인 경우이거나, 생산과정 자체에 불완전성이 존재하여 불량품을 생산하게 되는 경우[13]에서의 연구였다. 이와 같은 투자에 의한 준비비용의 절감문제를 불완전한 생산시스템에 적용할 경우 기계의 수명 분포에 따라 준비비용의 절감효과도 상당히 다르리라고 예상된다.

[그림 8]은 육조형 고장을 함수(S6)에 대

한 준비비용별로 수리비용에 따른 최적생산량의 변화를 도식한 그림으로서 매우 재미있는 현상을 볼 수 있다. 즉, 준비 비용이 적을 때에는($S=50$) 수리비용이 증가함에 따라 최적 생산량 역시 증가하고, 준비비용이 클 때에는($S=450$) 수리비용이 증가함에 따라 최적 생산량은 감소하는 반면에, 준비비용이 특정 범위(본 예에서는 $S=150$ 부근)에 있을 때에는 수리비용의 변화에 따른 최적 생산량의 변화는 거의 없음을 관찰할 수 있었다. 이와 같은 현상에 대한 설명은 현재로서는 알 수 없으나 앞으로 연구하여 불만한 가치가 있는 문제라고 생각된다.

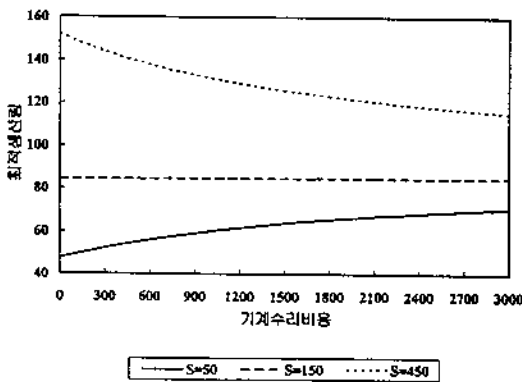


그림 8. 준비비용별 수리비용에 따른 최적 생산량

앞에서 여러 차례의 수치실험을 통하여 살펴본 바와 같이 기계의 고장을 함수의 형태에 따라 기계의 수리비용 및 준비비용 등이 최적 생산량 및 최소 평균비용에 미치는 영향이 매우 다르다는 것을 알 수 있음에 따라 앞으로도 불완전한 생산시스템의 제 문제에 대하여 보다 많은 연구가 수행되어야 한다고 생각된다.

4. 끝맺음말

본 연구를 통하여 생산시스템이 불완전한 경우 기계 수명의 고장율이 단조적 형태의 고장율 함수를 갖거나 욱조형태의 고장율 함수를 갖는 일반분포를 따르며, 모듈라 타입의 부품을 사용하는 관계로 즉시 수리가 이루어지는 경우에서의 경제적인 생산량 결정에 관한 문제를 분석하였다. 연구 결과로는 비교적도로서 사용된 비용함수를 도출하였고, 기계의 수명분포에 따른 수리비용의 최적 생산량에 대한 영향도를 수학적으로 명시하였으며, 수리비용의 변화에 따른 최적 생산량의 대소관계와 EMQ와의 관계에 대해서 살펴보았다. 본 연구의 의의로는 이전의 논문들이 수리적 전개상 기계의 수명분포를 지수분포로 가정하여 모형을 분석하였으나, 본 논문에서는 이를 일반화하여 그 이전의 논문들이 명시적으로 나타내지 못한 정리들을 도출하였으며, 수치실험을 통하여 특이한 모형의 행태를 관찰할 수 있었다는데 그 의의가 있다. 그리고, 본 논문에 대한 확장으로는 지금 현재 저자들에 의하여 연구중이지만 기계의 수명이 일반분포를 따르고, 수리시간을 필요로 하는 경우를 들 수 있는데 이 연구 역시 김 창현 등[1]의 논문을 일반화시키는 내용이 될 것이다.

참 고 문 헌

[1] 김 창현, 홍 유신, 김 수영, "불완전한 생산시스템에서의 경제적인 생산량 결정", 대한산업공학회, 제 20권 2호, pp.3-17, 1994

- [2] Barlow, R.E., and Proschan, F., *Statistical Theory of Reliability and Life Testing-Probability Models*, Rinehart and Winston, New York, 1975
- [3] Billington, P.J., "The Classic Economic Production Quantity Model with Set Up Cost as A Function of Capital Expenditure", *Decision Sciences*, Vol.18, pp.25-42, 1987
- [4] Groenevelt, H., Pintelon, L., and Seidmann, A., "Production Lot Sizing with Machine Breakdowns", *Management Science*, Vol. 38, No.1, pp.104-123, Jan. 1992
- [5] ———, "Production Batching with Machine Breakdowns and Safety Stocks", *Operations Research*, Vol.40, No.5, pp. 959-971, 1992
- [6] Hax, A.C., and Candea, D., *Production and Inventory Management*, Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1984
- [7] Hjorth, U., "A Reliability Distribution with Increasing, Decreasing, Constant and Bath-Tub Shaped Failure Rates", *Technometrics*, Vol.22, No.1, pp.99-104, 1980
- [8] Kececioglu, D., *Reliability Engineering Handbook*, Volume 1, Prentice Hall, New Jersey, 1991
- [9] Lee, H.L., and Rosenblatt, M.J., "Simultaneous Determination of Production Cycle and Inspection Schedules In a Production System", *Management Science*, Vol. 33, No.9, pp.1125-1136, Sep. 1987
- [10] Lee, H.L., and Rosenblatt, M.J., "A Production and Maintenance Planning Model with Restoration Cost Dependent on Detection Delay", *IIE Transactions*, Vol.21, No.4, pp.368-375, 1989
- [11] Lee, H.L., "Lot Sizing to Reduce Capacity Utilization in A Production Process with Defective Items, Process Corrections, and Rework" *Management Science*, Vol.38, No.9, pp.1314-1328, Sep. 1992
- [12] Porteus, E.L., "Investing in Reduced Setups in The EOQ Model" *Management Science*, Vol.31, No.8, pp.998-1010, Aug. 1985
- [13] Porteus, E.L., "Optimal Lot Sizing, Process Quality Improvement and Setup Cost Reduction" *Operations Research*, Vol.34, No.1, pp.137-144, 1986
- [14] Rahim, M.A., "Joint Determination of Production Quantity, Inspection Schedule, and Control Chart Design" *IIE Transactions*, Vol.26, No.6, pp.2-11, 1994
- [15] Rosenblatt, M.J., and Lee, H.L., "Economic Production Cycles with Imperfect Production Processes", *IIE Transactions*, Vol.18, No.1, pp.48-55, 1986
- [16] Ross, S.M., *Stochastic Processes*, John Wiley, New York, 1983
- [17] Silver, E.A., and Peterson, R., *Decision Systems for Inventory Management and Production Planning*, Wiley, New York, 1985