Journal of the Korean Institute
of Industrial Engineers
Vol.22, No.1, March, 1996

2단계 서비스와 일반휴가 대기행렬

Two-phase Queueing System with Generalized Vacation

김태성*, 채경철**

Kim, Tae Sung* · Chae, Kyung Chul**

Abstract

We consider a two-phase queueing system with generalized vacation. Poisson arrivals receive a batch type service in the first phase and individual services in the second phase. The server takes generalized vacation when the system becomes empty. Generalized vacation includes single vacation, multiple vacation, and other types. We consider both gated batch service and exhaustive batch service. This is an extension of the model presented by Selvam and Sivasankaran [6].

1. 서론

2단계서비스 (two-phase service) 모형은 Krishna와 Lee[5]가 처음으로 제안하였다. 포아송 과정 (Poisson process) 에 따라 도착하는 고객은, 한 사람의 서버 (server) 로부터, 첫번째 단계에서는 배치 (batch) 서비스를 받고 두번째 단계에서는 개별 (individual) 서비스를 받는다. 예를 들어, 수리공이 기계를 수리하는 경우에, 첫단계에서는 대기중인 작업 (고장난 기계) 을 모아서 작업에 필요한 서비스를 일괄적으로 분석한다. 그 다음, 일괄적인 작업분석과정을 거친 작업들을 순서대로 개별서비스하는 두번째 단계가 따른다. 그리고, 개별서비스를 모두 마쳤을 때 대기중인 작업이 없으면 휴무기간 (idle period) 이 시작되지만, 대기중인 작업이 있으면 다시 이들을 모두 모아서 배치서비스를 시작한다.

Krishna와 Lee[5]는 서비스시간이 지수분포를 따르는 경우를 연구하였는데, Doshi[4]는 이를 서비스시간이 일반분포를 따르는 경우로 확장하였다. 그리고, 최근에는 서버가

* 한국과학기술원 산업경영학과 박사과정
** 한국과학기술원 산업경영학과 부교수

휴무기간중에 복수휴가 (multiple vacation)를 가지는 모형이 Selvam과 Sivasankaran[6]에 의해 발표되었다.

휴가를 갖는 $M/G/1$ 모형에 대해서는 그 동안 많은 연구가 있었다[3,7]. 휴가모형은 휴무기간중 단 한번의 휴가를 떠나는 단일휴가 (single vacation) 모형과 고객이 도착할 때까지 여러번의 휴가를 떠나는 복수휴가 모형으로 크게 구분된다. 단일 및 복수휴가 뿐만 아니라 어떠한 이유에서든 서버가 서비스를 제공하지 않는 시간구간을 일반 (generalized) 휴가라 부르는데, 대표적으로 작업준비 (set-up) 시간을 들 수 있다.

본 논문의 목적은 두 가지인데, 그 첫째는 Selvam과 Sivasankaran[6]의 복수휴가 모형을 일반휴가모형으로 확장하는 것이다.

2단계서비스 중 첫번 단계인 배치서비스는 크게 두가지 형태가 있다. 배치서비스 진행 도중에 추가로 도착하는 고객을 배치에 포함시켜서 한꺼번에 처리하는 경우를 고갈 (exhaustive) 배치서비스라 하고, 추가도착분을 포함시키지 않는 경우를 게이티드 (gated) 배치서비스라 한다(Doshi[4]). Selvam과 Sivasankaran[6]은 Doshi[4]의 모형에 복수휴가를 추가하기는 했지만 게이티드 경우는 다루지 않고 고갈배치서비스 경우만 다루었다.

본 논문의 두번째 목적은 Selvam과 Sivasankaran[6]의 복수휴가모형을 일반휴가모형으로 확장함에 있어서 고갈배치서비스 뿐만 아니라 게이티드 배치서비스 경우도 다룬다는 것이다. 고갈배치서비스는 3절에서, 게이티드 배치서비스는 4절에서 다룬다.

2. 용어

N : 배치서비스 시작시점에서의 안정상태 고객수 (steady-state system size)

N_1 : 배치서비스 종료시점에서의 안정상태 고객수

N_2 : 개별서비스 종료시점에서의 안정상태 고객수

B : 배치서비스 시간

S : 개별서비스 시간

V : 휴가 시간 (단일휴가 또는 복수휴가 중 일회)

$N(z), N_1(z), N_2(z)$: 각각 N, N_1, N_2의 PGF (probability generating function)

$B^*(\theta), S^*(\theta), V^*(\theta)$: 각각 B, S, V 의 LST (Laplace-Stieltjes transform)

p_{20}: $\Pr(N_2=0)$

본 논문에서 사용하는 용어 및 기호는 기본적으로 Selvam과 Sivasankaran[6]과 동일하다. 한가지 예외는 다음과 같다. 본 논문에서는 단일 및 복수휴가, 준비기간 등을 포함하는 일반적인 휴가모형을 만들기 위하여 서비스기간 (busy period) 시작시점에서의 고객수를 나타내는 α라는 변수를 도입한다(Takagi[7] 참조). $N_2=0$ 경우 서버는 일반휴가를 떠나게 되는데, 이 일반휴가 이후 첫번째 배치서비스 시작시점에서의 고객수가 α가 된다. 즉, α는 일반휴가기간 동안 도착하는 고객수를 나타낸다. 또한 α의 PGF를 $\alpha(z)$ 라 한다.

3. 안정상태에서의 고객수및 대기시간

본 절에서는 고갈 (exhaustive) 배치서비스를 받는 모형에 대해, 고객이 서비스를 받고

시스템을 떠나는 시점에서의 고객수를 PGF 형태로 구한다. 그리고 이를 이용해서 대기 시간의 LST도 구한다.

3.1 고객수

2절의 표기를 사용하면 다음의 관계를 쉽게 생각할 수 있다.

N_1 = N +배치서비스 동안 도착한 고객수,

N_2 = N_1명 개별서비스 하는 동안 도착한 고객수,

$$N = \begin{cases} N_2, & \text{if } N_2 > 0 \\ \alpha, & \text{if } N_2 = 0 \end{cases}$$

배치서비스 시간 동안 도착하는 고객수의 PGF는 $B^*(\lambda - \lambda z)$이고, 한 명을 개별서비스 하는 동안 도착하는 고객수의 PGF는 $S^*(\lambda - \lambda z)$이므로, 다음 관계를 쉽게 얻을 수 있다 [7].

$$N_1(z) = N(z)B^*(\lambda - \lambda z) \quad (1)$$

$$N_2(z) = N_1(S^*(\lambda - \lambda z)) \quad (2)$$

$$N(z) = [N_2(z) - p_{20}] + p_{20}\alpha(z)$$
$$= N_2(z) - p_{20}(1 - \alpha(z)) \quad (3)$$

식 (1),(2)를 (3)에 대입하면 다음과 같다.

$$N(z) = N(S^*(\lambda - \lambda z))B^*(\lambda - \lambda S^*(\lambda - \lambda z))$$
$$- p_{20}(1\text{-}\alpha(z)) \quad (4)$$

앞으로 전개하는 식을 간결하게 표현하기 위해 몇가지 새로운 변수를 도입한다.

$$L(z) = 1 - \alpha(z),$$

$b^{(0)}(z) = z, b(z) = B^*(\lambda - \lambda z)$: $b^{(0)}(z)$ 에 해당하는 횟수만큼 배치서비스 하는 동안 (즉, 한 번의 배치서비스 동안) 도착하는 고객수의 PGF가 $b(z)$이고,

$s^{(0)}(z) = z, \quad s(z) = s^{(1)}(z) = S^*(\lambda - \lambda z)$: $s^{(0)}(z)$ 에 해당하는 수의 고객 (1명의 고객)을 개별서비스 하는 동안 도착하는 고객수의 PGF가 $s(z) = s(s^{(0)}(z))$, $s(z)$ 만큼의 고객을 개별서비스 하는 동안 도착하는 고객수의 PGF가 $s^{(2)} = s(s(z)), \cdots, s^{(n-1)}(z)$ 만큼의 고객을 개별서비스 하는 동안 도착하는 고객수의 PGF는 $s^{(n)}(z) = s(s^{(n-1)}(z))$ 가 된다.

즉, 일반적으로 $s^{(n)}(z) = s(s^{(n-1)}(z)) = s^{(n-1)}(s(z))$, $n \geq 1$ 의 관계가 성립함을 알 수 있다.

$\rho = \lambda E(S) < 1$이면, $z=1$이 $|z| \leq 1$ 내에서 $z = S^*(\lambda - \lambda z)$의 유일한 해이다. 따라서, $|z| \leq 1$인 모든 z에 대하여, 아래의 수렴관계가 성립함을 알 수 있다.

$$s^{(n)}(z) \to 1 \text{ as } n \to \infty$$
$$L(s^{(n)}(z)) \to 0 \text{ as } n \to \infty$$

식(4)는 $b(z)$, $s(z)$를 이용하여 다시 정리하면 다음과 같다.

$$N(z) = N(s(z))b(s(z)) - p_{20}L(s^{(0)}(z)) \quad (5)$$

식(5)에 $z = s(z)$를 대입하면 다음 식(6)을 얻게 되고,

$$N(s(z)) = N(s^{(2)}(z))b(s^{(2)}(z)) - p_{20}L(s(z)) \quad (6)$$

다시 식(6)을 식(5)에 대입하면 다음 식을

얻는다.

$$N(z)=N(s^{(2)}(z))b(s^{(2)}(z))b(s(z))-p_{20}L(s(z))b(s(z))-p_{20}L(s^{(0)}(z)) \quad (7)$$

식(6)에 $z=s(z)$를 대입하면 다음 식(8)이 된다.

$$N(s^{(2)}(z))=N(s^{(3)}(z))b(s^{(3)}(z))-p_{20}L(s^{(2)}(z)) \quad (8)$$

이 식(8)을 식(7)에 대입하여 정리하면 다음 식과 같다.

$$N(z)=N(s^{(3)}(z))b(s^{(3)}(z))b(s^{(2)}(z))b(s(z))-p_{20}\{L(s^{(2)}(z))b(s^{(2)}(z))b(s(z))+L(s(z))b(s(z))+L(s^{(0)}(z))\}$$

이렇게 대입해서 정리하는 과정을 반복하면 다음의 결과를 얻는다.

$$N(z)=\Pi_{j=1}^{\infty}b(s^{(j)}(z))-p_{20}\sum_{k=0}^{\infty}L(s^{(k)}(z))\Pi_{j=1}^{k}b(s^{(j)}(z)) \quad (9)$$

식(9)는 미지수 p_{20}를 포함하고 있는데, p_{20}는 다음과 같이 구한다. 식(4)에서, 양변에 $z=0$ 을 대입하면 다음과 같다.

$$N(z)|_{z=0}=0=N(S^{*}(\lambda))B^{*}(\lambda-\lambda S^{*}(\lambda))-p_{20} \quad (10)$$

또한 $s(0)=S^{*}(\lambda)$이므로, 식(9),(10)으로부터 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$p_{20}=B^{*}(\lambda-\lambda S^{*}(\lambda))N(s(0))$$

$$=b(s(0))N(s(0))$$

$$=b(s(0))[\Pi_{j=1}^{\infty}b(s^{(j+1)}(0))-p_{20}\sum_{k=0}^{\infty}L(s^{(k+1)}(0))\Pi_{j=1}^{k}b(s^{(j+1)}(0))]$$

$$=\Pi_{j=1}^{\infty}b(s^{(j)}(0))-p_{20}\sum_{k=0}^{\infty}L(s^{(k+1)}(0))\Pi_{j=1}^{k+1}b(s^{(j)}(0))$$

이를 정리하면 다음의 결과를 얻는다.

$$p_{20}=\frac{\Pi_{j=1}^{\infty}b(s^{(j)}(0))}{1+\Sigma_{k=0}^{\infty}L(s^{(k+1)}(0))\Pi_{j=1}^{k+1}b(s^{(j)}(0))} \quad (11)$$

이로써 식(9)의 $N(z)$는 결정되었다.

무작위 선택된 (tagged) 고객이 시스템을 떠날 때 시스템에 남아있는 고객수를 M, 2단계 서비스 시작할 때, 배치 (batch) 중에서 무작위 선택된 고객의 위치를 K, 무작위 선택된 고객이 들어 있는 배치의 크기 (batch size) 를 N_1^t라 하면, 조건부 기대값을 이용하여 M의 PGF를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$r(z)=E(z^M)=E(E(z^M|N_1^t))$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\Pr(N_1^t=n)E(z^M|N_1^t=n)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\Pr(N_1^t=n)\left[\sum_{k=1}^{n}E(z^M|K=k,N_1^t=n)\Pr(K=k|N_1^t=n)\right]$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\Pr(N_1^t=n)\left[\sum_{k=1}^{n}z^{n-k}(s(z))^k\Pr(K=k|N_1^t=n)\right]$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}z^n\left(\frac{s(z)}{z}\right)^k\Pr(N_1^t=n)\Pr(K=k|N_1^t=n)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}z^n\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{s(z)}{z}\right)^k\cdot\frac{n\cdot\Pr(N_1=n)}{E(N_1)}\cdot\frac{1}{n}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}z^n\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{s(z)}{z}\right)^k\cdot\frac{\Pr(N_1=n)}{E(N_1)}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} z^n \cdot \frac{\frac{s(z)}{z}[1-(\frac{s(z)}{z})^n]}{1-\frac{s(z)}{z}} \cdot \frac{\Pr(N_1=n)}{E(N_1)}$$

$$= \frac{1}{E(N_1)} \cdot \frac{s(z)}{s(z)-z} \sum_{n=1}^{\infty} [(s(z))^n - z^n] \Pr(N_1=n)$$

$$= \frac{s(z)[N_1(s(z))-N_1(z)]}{E(N_1)[s(z)-z]} \tag{12}$$

식(12)를 얻기 위한 전개과정 중에서 $E(z^M|K=k, N_1^t=n) = z^{n-k}(s(z))^k$가 성립하는 이유는 다음과 같다. 무작위 선택된 고객이 속한 배치에 들어있는 n명의 고객중에서 k번째 고객이 개별서비스를 받고 떠날 때, 시스템의 고객수는 아직 서비스를 받지 않은 $n-k$명의 고객과 이미 시스템을 떠난 k명이 개별서비스를 받는 동안 도착한 고객의 합이 된다. 식(1)에서 이용한 관계와 PGF의 성질을 이용하면 한 명이 개별서비스를 받는 동안 도착한 고객수의 PGF는 $s(z)$이고, k명이 개별서비스를 받는 동안 도착한 고객수의 PGF는 $(s(z))^k$가 된다. 따라서, 서비스를 받지 않은 고객에 해당하는 z^{n-k}와 $(s(z))^k$의 곱인 $z^{n-k}(s(z))^k$가 $E(z^M|K=k, N_1^t=n)$과 같게 된다.

식(12)에 (1)과 (4)를 대입하여 정리하면 다음 결과를 얻는다.

$$r(z) = \frac{s(z)}{E(N_1)[s(z)-z]}[N(z)(1-b(z))+p_{20}L(z)] \tag{13}$$

도착하는 고객이 포아송과정 (poisson arrival) 을 따르고, 2단계에서 한명씩 서비스 (single service) 하기 때문에 PASTA (Poisson Arrivals See Time Averages) 속성과 Burke의 정리에 의해 $r(z)$는 안정상태의 고객수 (steady-state system size) 가 된다[7]. 이제 $\rho=\lambda E(S)$, $\gamma=\lambda E(B)$라 하자. 식(1),(2),(3)을 z에 대해 미분하고 $z=1$을 대입하면 다음 결과를 얻을 수 있다.

$$E(N_1) = E(N) + \gamma \tag{14}$$

$$E(N_2) = E(N_1)\,\rho \tag{15}$$

$$E(N) = E(N_2) + p_{20}E(\alpha) \tag{16}$$

식(14),(15),(16)으로부터 다음 관계를 얻는다.

$$E(N_1) = \frac{\gamma + p_{20}E(\alpha)}{1-\rho} \tag{17}$$

식(17)을 이용하면 식(13)을 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$r(z) = \frac{1-\rho}{\gamma+p_{20}E(\alpha)} \frac{s(z)}{[s(z)-z]} \cdot [N(z)(1-b(z))+p_{20}L(z)] \tag{18}$$

식(18)을 z에 대해 미분하고 $z=1$을 대입하면 다음의 결과를 얻을 수 있다.

$$E(M) = \rho + \frac{\lambda^2 E(S^2)}{2(1-\rho)} + \frac{\lambda^2 E(B^2)}{2(\gamma+p_{20}E(\alpha))} + \frac{p_{20}E(\alpha^2)}{2(\gamma+p_{20}E(\alpha))} + \frac{\gamma}{1-\rho} - \frac{\gamma^2}{\gamma+p_{20}E(\alpha)} \tag{19}$$

Remark 1: 어떤 대기행렬에 대해서 임의 시점에서 시스템내에 존재하는 고객수가 서로 독립인 두개 이상의 확률변수의 합으로 구성될 때, 그 대기행렬은 확률적 분해성질

(stochastic decomposition property) 을 갖는다고 한다(Fuhrmann과 Cooper[2] 참조). 휴가가 있는 2단계서비스 대기행렬에서의 고객수를 나타내는 식(18)은 3개부분으로 분해될 수 있다. 그 첫번째 부분은 휴가를 고려하지 않은 $M/G/1$ 대기행렬의 고객수 $\frac{(1-\rho)(1-z)s(z)}{s(z)-z}$ 이다. 이 고객들에 휴가와 1단계 배치서비스의 영향으로 두개 부분이 추가된다. $\frac{p_{20}E(\alpha)}{\gamma+p_{20}E(\alpha)}$ 의 확률로 휴가도중에 도착한 고객 $\frac{1-\alpha(z)}{E(\alpha)(1-z)}$ 와, $\frac{\gamma}{\gamma+p_{20}E(\alpha)}$의 확률로 1단계 서비스 도중에 도착한 고객 $N(z)\frac{1-b(z)}{\gamma(1-z)}$ 이 그들이다. 즉 식(18)을 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$r(z)=\frac{(1-\rho)(1-z)s(z)}{s(z)-z}\left[\frac{p_{20}E(\alpha)}{\gamma+p_{20}E(\alpha)}\cdot\frac{1-\alpha(z)}{E(\alpha)(1-z)}+\frac{\gamma}{\gamma+p_{20}E(\alpha)}N(z)\frac{1-b(z)}{\gamma(1-z)}\right] \tag{20}$$

Remark 2: 일반적인 $\alpha(z)$ 를 이용해서 식(18)의 안정상태에서의 고객수를 구했는데, 다시 $\alpha(z)$의 값을 조정해주면 여러가지 특별한 경우의 안정상태고객수를 구할 수 있다. 먼저 휴가가 없는 경우에는 1단계서비스가 늘 한명으로 시작하므로 $\alpha(z)=z$가 되고, 이는 [4]의 결과에 일치한다. 복수휴가 (multiple vacation) 의 경우는 한명 이상의 고객이 도착하는 휴가동안 도착하는 고객으로 1단계서비스를 시작하므로 $\alpha(z)=\frac{V^*(\lambda-\lambda z)-V^*(\lambda)}{1-V^*(\lambda)}$ 이고, [6]의 결과에 일치한다. 단일휴가 (single vacation) 의 경우에는 휴가기간동안 고객이 도착하지 않으면 1명으로, 1명이상의 고객이 도착하면 휴가기간동안 도착한 고객으로 1단계서비스를 시작하므로 $\alpha(z)=V^*(\lambda)z+V^*(\lambda-\lambda z)-V^*(\lambda)$ 가 된다. 단일휴가와 작업준비시간 (setup time) 을 고려한 모형에서는 한번의 휴가와 작업준비시간 동안 도착한 고객으로 1단계서비스를 시작하므로 $\alpha(z)=[V^*(\lambda)z+V^*(\lambda-\lambda z)-V^*(\lambda)]S^*(\lambda-\lambda z)$ 가 된다. Remark 2 에 언급한 모형외에 여러가지 기간들을 갖는 모형들에 대해서도 [7]을 참조하여 $\alpha(z)$ 를 조정하면 $r(z)$를 쉽게 구할 수 있다.

3.2 대기시간

대기시간의 LST를 $W^*(\theta)$라 하면,

$$r(z)=W^*(\theta)\,|_{\theta=\lambda-\lambda z}=W^*(\lambda-\lambda z)$$

이므로 ([7] 참조) 다음과 같이 대기시간의 LST를 구할 수 있다.

$$W^*(\theta)=r\left(1-\frac{\theta}{\lambda}\right)=\frac{1-\rho}{\gamma+p_{20}E(\alpha)}\cdot\frac{\lambda S^*(\theta)}{\theta-\lambda+\lambda S^*(\theta)}\left[N(1-\theta/\lambda)(1-B^*(\theta))+p_{20}(1-\alpha(1-\theta/\lambda)\right] \tag{21}$$

식(21)을 θ에 대해 미분하고 $\theta=0$을 대입하면 대기시간의 기대값을 얻을 수 있다.

$$E(W)=E(B)+\frac{\lambda E(S^2)}{2(1-\rho)}+\frac{\lambda E(B^2)}{2(\gamma+p_{20}E(\alpha))}+\frac{p_{20}E(\alpha^2)}{2\lambda(\gamma+p_{20}E(\alpha))}+\frac{\gamma}{\lambda(1-\rho)}$$

$$-\frac{\gamma^2}{\lambda(\gamma+p_{20}E(\alpha))} \qquad (22)$$

휴리스틱 접근 방법으로도 식(22)와 같은 결과를 얻을 수 있다(Chae와 Lee[1] 참조). 복수휴가의 경우를 고려하기 위해, 먼저 하나의 재생사이클 (regeneration cycle) 을 1단계 서비스, 2단계 서비스, 휴가의 세부분으로 나눈다. 포아송 과정에 따라 도착하는 임의의 고객은 $\rho=\lambda E(S)\frac{\gamma}{E(N_1)}=\frac{\lambda E(B)}{E(N_1)}, \left(1-\rho-\frac{\gamma}{E(N_1)}\right)$ 의 확률로 2단계 서비스, 1단계 서비스, 휴가중에 각각 도착하게 된다. 즉 포아송 도착 (Poisson arrival) 이 보게 되는 시스템의 상태에 따라 기다리는 시간이 결정된다. 도착한 고객은 모두 시스템에 대기중 (현재 2단계 서비스중인 고객은 제외한 수) 인 고객들의 총 개별서비스시간만큼 기다려야 한다. 여기에 추가로 *i*) 2단계서비스 중에 도착하면 현재 진행중인 서비스의 잔여서비스시간 (residual service time) 과 1단계서비스시간만큼, *ii*) 1단계서비스 중에 도착하면 잔여배치서비스만큼, *iii*) 휴가 중에 도착하면 잔여휴가기간과 1단계서비스시간만큼을 더 기다려야 한다. 이를 식으로 나타내면 2단계서비스 받기 직전까지의 평균대기시간 $E(W_q)$ 에 대한 관계식을 세울 수 있다(단, 어떤 기간의 진행중에 관찰했을 때, 관찰 시점부터 그 기간 종료시점까지의 기간, 즉 잔여기간에 대해서는 Takagi[7]를 참조).

$$E(W_q)=E(M\text{-}1)E(S)+\rho\left[\frac{E(S^2)}{2E(S)}+E(B)\right]$$
$$+\frac{\gamma}{E(N_1)}\frac{E(B^2)}{2E(B)}+(1-\rho-\frac{\gamma}{E(N_1)})$$
$$\left[\frac{E(V^2)}{2E(V)}+E(B)\right] \qquad (23)$$

식(23)을 Little의 공식 $E(M\text{-}1)E(S)=\rho E(W_q)$ 를 이용해서 다시 정리하면, 2단계서비스 받기 직전까지의 평균대기시간 $E(W_q)$ 를 구할 수 있다.

$$E(W_q)=\frac{\lambda}{1-\rho}\left[\frac{E(S^2)}{2}+\frac{E(B^2)}{2E(N_1)}-\frac{E^2(B)}{E(N_1)}+\frac{E(B)}{\lambda}+\right.$$
$$\left.\frac{(1\text{-}\rho)E(N_1)-\lambda E(B)}{\lambda E(N_1)}\cdot\frac{E(V^2)}{2E(V)}\right] \qquad (24)$$

평균대기시간 $E(W)$는 $E(W)=E(W_q)+E(S)$ 의 관계로부터 쉽게 알 수 있다. 이는 [6]의 결과에 일치한다. 마찬가지 방법으로 단일휴가의 경우에 대해서도 평균대기시간을 알 수 있다.

3.3 서버 이용율

Selvam과 Sivasankaran[6]은 고갈 (exhaustive) 배치서비스 복수휴가모형의 서버이용율 u_m 을 구하였다.

$$u_m=\frac{(1-V^*(\lambda))E(B)+p_{20}\rho E(V)}{(1-V^*(\lambda))E(B)+p_{20}E(V)}$$

단일휴가모형에서 서비스사이클 (busy cycle) 은 휴가를 끝내고 배치서비스 시작하는 시점과 다음번 휴가를 끝내고 배치서비스 시작하는 시점 사이의 기간이다. 이 서비스사이클을 서비스기간 (busy period), 휴가기간 (vacation period), 휴무기간 (idle period) 으로 나누고, T_1, T_2, T_3가 각각 서비스기간, 휴가기간, 휴무기간을 나타낸다고 하면, 3절에서의 논의로부터 다음 관계를 얻을 수 있다.

$$T_1^*(\theta)=\sum_{r=1}^{\infty}[B^*(\theta)N_1(S^*(\theta))]^r(1-p_{20})^{r-1}p_{20}$$

$$T_2^*(\theta)=V^*(\theta)$$

$$T_3^*(\theta)=V^*(\lambda)\cdot\frac{\lambda}{\theta+\lambda}+(1-V^*(\lambda))$$

위 세식을 θ에 대해 미분하고 $\theta=0$을 대입하면 아래 세가지 기대값을 얻을 수 있다.

$$E(T_1)=\frac{E(B)+p_{20}V^*(\lambda)E(S)+p_{20}\rho E(V)}{(1-\rho)p_{20}}$$

$$E(T_2)=E(V)$$

$$E(T_3)=\frac{V^*(\lambda)}{\lambda}$$

따라서, 단일휴가인 경우의 서버이용율은 다음과 같다.

$$u_s=\frac{E(T_1)}{E(T_1)+E(T_2)+E(T_3)}$$
$$=\frac{\lambda E(B)+p_{20}\rho(V^*(\lambda)+\lambda E(V))}{\lambda E(B)+p_{20}(V^*(\lambda)+\lambda E(V))} \quad (25)$$

4. 게이티드 서비스

게이티드 (gated) 서비스에서 서버는 서비스 시작할 때 시스템에 존재하고 있는 고객만 배치서비스한다. 게이티드서비스를 받는 휴가모형에서, 서버는 일반적으로 한번 게이티드서비스가 끝나면 곧바로 휴가를 떠난다 (Takagi[7], pp. 205). 이는 2단계서비스모형에서 개별서비스가 모두 끝난 후에 바로 휴가를 떠나는 경우에 해당된다. 이경우 외에도 모든 개별서비스가 끝난 후, 서비스를 해야할 고객이 없을 때에만 서버가 휴가를 떠나는 모형을 생각할 수 있다. 후자를 Type-1 Gated라 하고, 전자를 Type-2 Gated라 한다.

4.1 Type-1 Gated

Type-1 Gated 서비스에서는 서버는 1단계 서비스를 시작할 때 시스템에 있는 고객에 대해서만 배치 (batch) 서비스를 하고, 이어서 2단계의 개별 (individual) 서비스를 한다. 2단계서비스가 끝나고 시스템에 고객이 없을 때, 서버는 휴가를 떠나게 된다. 이를 변환형태의 관계식으로 만들면 다음과 같다.

$$N_1(z_1,z_2)=N(z_1)B^*(\lambda-\lambda z_2) \quad (26)$$

$$N_2(z)=N(S^*(\lambda-\lambda z))B^*(\lambda-\lambda z) \quad (27)$$

$$N(z)=N_2(z)-p_{20}(1-\alpha(z)) \quad (28)$$

식(26), (27), (28)을 정리하면 다음식을 얻는다.

$$N(z)=N(S^*(\lambda-\lambda z))B^*(\lambda-\lambda z)$$
$$-p_{20}(1-\alpha(z)) \quad (29)$$

이제 3절에서와 같은 방법을 이용하면,

$$N(z)=\Pi_{j=0}^{\infty}b(s^{(j)}(z))-$$

$$p_{20}\sum_{k=0}^{\infty}L(s^{(k)}(z))\Pi_{j=0}^{k-1}b(s^{(j)}(z)) \quad (30)$$

을 얻는다. 또한 식(29)의 양변에 $z=0$을 대입하면,

$$N(S^*(\lambda))B^*(\lambda)-p_{20}=0$$

이고, $s(0)=S^*(\lambda)$이므로 p_{20}을 구할 수 있다.

$$p_{20} = \frac{\Pi_{j=0}^{\infty} b(s^{(j)}(0))}{1+\sum_{k=0}^{\infty} L(s^{(k+1)}(0))\Pi_{j=0}^{k} b(s^{(j)}(0))} \tag{31}$$

식(31)을 식(30)에 대입하면 $N(z)$를 구할 수 있다.

조건부 기대값을 이용해서 시스템 이탈시점 (departing epoch) 에서의 고객수 (system size) 의 PGF를 알 수 있다.

$$r(z) = E(z^M) = \frac{b(z)s(z)[N(s(z))-N(z)]}{E(N)[s(z)-z]} \tag{32}$$

3절에서와 마찬가지로, 기대값들 사이의 관계를 이용하여 $E(N)$을 구할 수 있다.

$$E(N) = \frac{\gamma + p_{20}E(\alpha)}{1-\rho} \tag{33}$$

식(33)을 (32)에 대입하면 $r(z)$를 구한다.

$$r(z) = \frac{1-\rho}{\gamma+p_{20}E(\alpha)} \cdot \frac{b(z)s(z)}{[s(z)-z]}[N(s(z))-N(z)] \tag{34}$$

식(34)를 z에 대해 미분하고 $z=1$을 대입하면 다음 M의 기대값을 구할 수 있다.

$$E(M) = \frac{(1-\rho)(\gamma+\rho)E(N)}{\gamma+p_{20}E(\alpha)} + \frac{(1-\rho^2)E(N^2)}{2(\gamma+p_{20}E(\alpha))}$$

대기시간에 대해서는 3절에서 이용했던 관계 $(r(z) = W^*(\lambda-\lambda z))$ 를 통해 알 수 있다. 이렇게 구한 $W^*(\theta)$를 θ에 대해 미분하고 $\theta=0$을 대입하면 대기시간의 기대값을 구할 수 있다. 그리고 복수휴가를 가정하면, 기대 대기시간에 대해 고갈 서비스에서와 같은 휴리스틱 접근을 할 수 있다. 게이티드 배치서비스에서 식(24)에서와 다른점은 1단계 서비스 중에 도착하는 고객은 다음번 배치 서비스를 받은 후에나 개별서비스를 받을 수 있으므로 잔여 배치 서비스에 추가로 배치 서비스시간을 더 기다려야 한다는 것이다. 이를 정리하면 다음의 기대값을 구할 수 있다.

$$E(W) = E(S) + \frac{\lambda}{1-\rho}\left[\frac{E(S^2)}{2} + \frac{E(B^2)}{2E(N_1)} + \frac{E(B)}{\lambda} + \frac{(1-\rho)E(N_1)-\lambda E(B)}{\lambda E(N_1)} \cdot \frac{E(V^2)}{2E(V)}\right]$$

4.2 Type-2 Gated

Type-2 Gated 서비스에서 서버는 1단계서비스 시작할 때 시스템에 있는 고객에 대해서만 배치 서비스를 하고, 이어서 2단계의 개별서비스를 한다. 2단계서비스가 끝나면, 서버는 시스템 상태에 관계없이 휴가를 떠나게 된다. 이를 변환형태의 관계식으로 만들면 다음과 같다.

$$N_1(z_1,z_2) = N(z_1)B^*(\lambda - \lambda z_2) \tag{35}$$

$$N_2(z) = N(S^*(\lambda-\lambda z))B^*(\lambda-\lambda z) \tag{36}$$

$$N(z) = N_2(z) - p_{20}\left(1 - \frac{V^*(\lambda-\lambda z)-V^*(\lambda)}{1-V^*(\lambda)}\right) + (1-p_{20})V^*(\lambda-\lambda z) \tag{37}$$

식(35), (36), (37)을 정리하면,

$$N(z) = N(S^*(\lambda-\lambda z))B^*(\lambda-\lambda z) - p_{20}\left(1-\frac{V^*(\lambda-\lambda z)-V^*(\lambda)}{1-V^*(\lambda)}\right) + (1-p_{20})V^*(\lambda-\lambda z) \tag{38}$$

가 된다.

식(38)에 3절과 4절 앞부분에서와 같은 방법을 이용하면 고객수의 PGF와 대기시간의 LST를 구할 수 있다.

5. 결론

본 논문에서는 일반적인 틀안에서 2단계서비스를 받는 휴가모형에 관해 알아보았다. 이는 기존의 2단계서비스를 받는 복수휴가모형을, 일반적인 휴가를 다룰 수 있도록 확장한 것이다. 그 외에도 1단계에서 게이티드서비스를 받는 경우를 두가지로 세분하여 알아보았다. 대부분의 결과가 LST나 PGF 형태로 주어졌기 때문에 기대치를 구하기 위해서는 복잡한 미분과정을 필요로 하는데, 휴리스틱한 접근으로도 같은 결과를 얻을 수 있음을 보였다. 2단계서비스를 받는 휴가모형에 N-정책 (N-policy) 을 고려하면 실제 상황에 더 적합하리라 생각하며, 앞으로 이 방향의 연구를 기대한다.

References

[1] Chae, K. C. and Lee, H. W., "$M^X/G/1$ Vacation Models with N-Policy : Heuristic Interpretation of the Mean Waiting Time", *Journal of Operational Research Society*, 46, 258-264 (1995).

[2] Fuhrmann, S. W. and Cooper, R. B., "Stochastic Decompositions in the $M/G/1$ Queue with Generalized Vacations", *Operations Research*, 33, 1117-1129 (1985).

[3] Doshi, B. T., "Queueing Systems with Vacations - A Survey", *Queueing Systems*, 1, 29-66 (1986).

[4] Doshi, B. T., "Analysis of a Two Phase Queueing System with General Service Times", *OR Letters*, 10, 265-272 (1991).

[5] Krishna, C. M. and Lee, Y. H., "A Study of Two-phase Service", *OR Letters*, 9, 91-97 (1990).

[6] Selvam, D. D. and Sivasankaran, V., "A Two-phase Queueing System with Server Vacations", *OR Letters*, 15, 163-168 (1994).

[7] Takagi, H., *Queueing Analysis: A Foundation of Performance Evaluation, Vol. I*, North-Holland, Amsterdam, (1991).

95년 10월 최초 접수, 95년 12월 최종 수정