

일정체적 단순지지 보-기둥의 동적 최적단면

Dynamic Optimal Shapes of Simple Beam-Columns with Constant Volume

이 병 구¹⁾ · 박 광 규²⁾ · 모 정 만³⁾ · 이 상 진³⁾
Lee, Byoung Koo Park, Kwang Kyou Mo, Jeong Man Lee, Sang Jin

요 약 : 이 논문은 일정체적 단순지지 보-기둥의 동적 최적단면의 결정에 관한 연구이다. 정다각형 단면의 단면깊이가 포물선으로 변화하는 보-기둥에 대한 자유진동을 지배하는 상미분방정식을 유도하였다. 이 미분방정식에는 축하중효과를 고려하였고, Runge-Kutta method와 Regula-Falsi method를 이용하여 미분방정식을 수치적분하고 고유진동수를 산출하였다. 수치해석 결과로부터 얻어진 진동수-단면비 곡선의 임계값들을 분석하여 동적 최적단면을 결정하고 이 결과들을 표 및 그림에 나타내었다.

ABSTRACT : The main purpose of this paper is to determine the dynamic optimal shapes of simple beam-columns with the constant volume. The parabolic function is chosen as the variable equation for the depth of regular polygon cross-section. The ordinary differential equation including the effect of axial load is applied to calculate the natural frequencies. The Runge-Kutta and Regula-Falsi methods are used to integrate the differential equation and compute the frequencies, respectively. Then the dynamic optimal shape whose lowest natural frequency is highest is determined by reading the critical value of the frequency versus section ratio curve plotted by the frequency data. In the numerical examples, the simple beam-columns are analysed and the numerical results of this study are shown in tables and figures.

핵심용어 : 보-기둥, 일정체적, 동적 최적단면, 진동형, 고유진동수, 정다각형 단면, 최강기둥

KEYWORDS : beam-column, constant volume, dynamic optimal shape, mode shape, natural frequency, regular polygon cross-section, strongest column.

1) 원광대학교 토목환경공학과, 교수
2) 대전대학교 토목공학과, 부교수
3) 원광대학교 대학원

본 논문에 대한 토의를 1997년 9월 30일까지 학회로 보내
주시면 토의회답을 게재하겠습니다.

1. 서 론

보-기둥은 구조공학 분야에서 가장 기본이 되는 구조단위이며, 토목, 기계, 선박, 항공 등 각종 공학분야에서 뼈대 구조물로 많이 이용되고 있는 부재중의 하나이다. 구조물에 동하중이 작용하는 경우에 구조물의 고유한 특성중에 하나인 고유진동수를 산출하는 것은 무엇보다 먼저 선행되어야 할 해석과정이다. 또한 최대고유진동수나 최대하중을 갖게 되는 구조물의 단면형상을 찾는 문제도 매우 중요한 연구과제이다.⁽¹⁾

이러한 문제와 관련된 연구들은 여러 문헌들⁽²⁻¹¹⁾에서 찾아 볼 수 있으며, 그에 대한 개략적인 연구동향을 살펴보면 다음과 같다. Niordson⁽²⁾은 자유진동하는 보의 단면 최적형상에 관하여 연구하였으며, Kamat와 Simites^(3,4)는 유한변위법에 의하여 최적보의 고유진동수를 산출하고 전단변형과 회전관성이 자유진동에 미치는 영향을 분석하였다. Keller⁽⁵⁾ 및 Tadjbakhsh와 Keller⁽⁶⁾는 최강기둥의 단면형상에 관한 연구를, Keller와 Niordson⁽⁷⁾은 최강기둥에 관한 연구를 하였다. 또한 Taylor⁽⁸⁾는 에너지법에 의하여 최강기둥을 산출하였다. Wilson등⁽⁹⁾은 최강기둥의 안정영역에 관한 실험을 행하였으며, Masur⁽¹⁰⁾는 여러 개의 고유치를 갖는 구조물의 최적설계에 관하여 연구하였다. Lee와 Mo⁽¹¹⁾는 일정체적을 갖는 변단면 보-기둥의 고유진동수 및 좌굴하중을 산출하였다.

이 논문은 최대 고유진동수를 갖는 보-기둥의 동적 최적단면을 결정하는데 연구목적이 있다. 일반적으로 구조물의 고유진동수들 중에서 가장 작은 값인 제1고유진동수가 구조물의 동적거동에 비교적 큰 영향을 미친다. 따라서 이 연구에서 동적 최적단면은 “최대의 제1고유진동수를 갖는 단면형상”으로 정의한다.⁽²⁾ 이를 위하여 일정체적 변단면 보-기둥의 자유진동을 지배하는 상미분방정식을 이용하여 고유진동수를 산출하고, 이 결과들로 부터 최대 고유진동수를 갖는 보-기둥의 동적 최적단면을 결정하였다. 상미분방정식에는 보-기둥의

압축하중효과를 고려하였고, Runge-Kutta method를 이용하여 수치적분하였다. 미분방정식에 포함 되어 있는 보-기둥의 고유치인 고유진동수는 Regula-Falsi method를 이용한 행렬값 탐사법으로 산출하였다.

이 연구에서 보-기둥의 단면은 정다각형 단면이며, 단면의 깊이가 포물선식으로 변화하는 변단면을 채택하였다. 또한 보-기둥의 재료는 선형탄성체이고 자유진동은 조화진동으로 가정하였다. 실제의 수치해석에는 단순지지 보-기둥에 적용하였으며, 수치해석의 결과로 하중단계별 단면비-고유진동수곡선, 동적 최적단면비 및 각종 동적 안정영역을 무차원화하여 표 및 그림에 제시하였다.

2. 보-기둥의 변단면

그림 1(a)는 지간길이가 l 이고 일정체적 V 를 갖는 보-기둥을 나타내며, 단면형상은 정다각형이고 단면깊이 r 은 보-기둥축의 x 좌표를 따라서 변화한다. 이 그림에서 A , I 는 각각 보-기둥의 변화 단면적 및 단면이차모멘트를 나타낸다.

단면 깊이 r 의 변화를 그림 1(b)에 나타내었으며, 양단부($x=0$ 와 $x=l$)에서 r 은 r_0 이고, 지간의 중앙($x=l/2$)에서 r 은 r_m 이다. 여기서 보-기둥의 변단면을 일반적으로 정의하기 위하여 다음과 같은 무차원 단면비를 도입한다.

$$n = r_m / r_0 \quad (1)$$

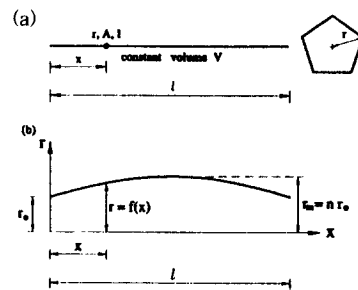


그림 1. (a) 정다각형단면을 갖는 일정체적 변단면 보-기둥
(b) 변화단면깊이

그림 1(a)에 나타낸 단면깊이 r 을 갖는 정 m 각형 단면의 단면적 A 및 단면이차모멘트 I 는 각각 (2), (3)식과 같이 나타낼 수 있다.

$$A = m \sin(\pi/m) \cos(\pi/m) r^2 \quad (2)$$

$$I = 0.25 m \sin(\pi/m) \cos^3(\pi/m) [1 + \tan^2(\pi/m)/3] r^4 \quad (3)$$

위의 (2), (3)식에서 정다각형의 변수 m 이 ∞ 로 수렴할 때 A, I 는 각각 원형단면의 A, I 인 πr^2 및 $\pi r^4/4$ 로 수렴되는 것을 알 수 있다.

이제 그림 1(b)에 나타나 있는 정다각형 단면의 깊이 r 을 정의한다. 단면깊이 r 의 변화식으로는 직선식, 포물선식, 정현식 등의 모든 $f(x)$ 의 함수식이 가능하나 r 의 변화식이 보-기둥의 거동에 미치는 영향은 매우 적으므로⁽¹¹⁾ 이 연구에서는 포물선식 하나만을 채택하였다. 그림 1(b)에서와 같은 포물선식 r 은 직교좌표계 (x, r) 에서 다음 식과 같이 구할 수 있다.

$$r = r_0 [-4\alpha(x/l)^2 + 4\alpha(x/l) + 1], \quad 0 \leq x \leq l \quad (4)$$

여기서,

$$\alpha = n - 1 \quad (5)$$

변단면 보-기둥의 체적 V 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$V = \int_0^l A dx \\ = \beta m \sin(\pi/m) \cos(\pi/m) r_0^2 l \quad (6)$$

여기서,

$$\beta = (8n^2 + 4n + 3) / 15 \quad (7)$$

3. 지배미분방정식

그림 2는 축압축하중 P 가 작용하고 있는 단순

지지 보-기둥의 자유진동하는 진동형을 나타내고 있다. 보-기둥의 자유진동은 조화진동으로 가정하였으므로 동적변위 $W(x, t)$ 는 다음과 같이 표시된다.

$$W(x, t) = w(x) \sin(\omega t) \quad (8)$$

위의 식에서 $w(x)$ 는 조화진동의 진폭, ω 는 고유각진동수, t 는 시간이다.

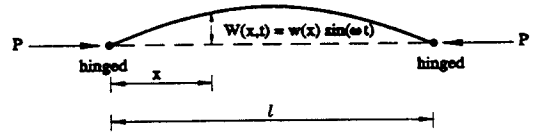


그림 2. 축하중을 받는 보-기둥의 진동형

보-기둥의 자유진동을 지배하는 편미분방정식은 다음 식과 같고 축압축하중 P 의 효과를 고려한다.⁽¹²⁾

$$EI \frac{\partial^4 W(x, t)}{\partial x^4} + 2E \frac{dI}{dx} \frac{\partial^3 W(x, t)}{\partial x^3} \\ + \left(E \frac{d^2 I}{dx^2} + P \right) \frac{\partial^2 W(x, t)}{\partial x^2} + \rho A \frac{\partial^2 W(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (9)$$

여기서 E 는 탄성계수, ρ 는 밀도이다.

(8)식과 (9)식의 편미분식들을 (9)식에 대입하면 (10)식과 같은 변단면 보-기둥의 자유진동을 지배하는 상미분방정식이 유도된다.

$$EI \frac{d^4 w(x)}{dx^4} + 2E \frac{dI}{dx} \frac{d^3 w(x)}{dx^3} \\ + \left(E \frac{d^2 I}{dx^2} + P \right) \frac{d^2 w(x)}{dx^2} + \rho A \omega^2 w(x) = 0 \quad (10)$$

보-기둥은 단순지지되어 있으므로 양단($x=0$ 와 $x=l$)에서 경계조건은 다음과 같다.

$$w(x)=0, x=0 \text{와 } l \text{에서} \quad (11)$$

$$\frac{d^2 w(x)}{dx^2} = 0, x=0 \text{와 } l \text{에서} \quad (12)$$

위의 (11), (12)식은 지점에서 처짐과 휨모멘트가 "0"임을 의미한다.

지배미분방정식을 무차원양으로 유도하기 위하여 다음의 무차원 변수들을 도입한다.

$$\xi = x / l \quad (13)$$

$$\eta = w(x) / l \quad (14)$$

$$p = P l^2 / (EI_e) \quad (15)$$

$$f = \omega l^2 \sqrt{\rho A_e / (EI_e)} \quad (16)$$

여기서 ξ 와 η 는 x 와 $w(x)$ 를 지간길이 l 로 정규화한 것이며, p 는 무차원 하중변수이고 f 는 무차원 고유진동수이다.

(15), (16)식에서 A_e 와 I_e 는 일정체적 V 를 지간 길이가 l 인 등단면의 원형단면으로 보-기둥을 제작하였을 때 단면적과 단면이차모멘트이며 다음 식과 같이 표시된다.

$$A_e = V / l \quad (17)$$

$$I_e = (V / 2l)^2 / \pi \quad (18)$$

이제 상미분방정식 (10)식에 (4)식을 이용한 (2), (3)식 및 (3)식으로 부터 구한 dI/dx 와 d^2I/dx^2 을 대입하고 (13)~(16)식의 무차원 변수들을 이용하면 다음 (19)식의 변단면 보-기둥의 자유진동을 지배하는 무차원 상미분방정식을 얻을 수 있다.

$$\frac{d^4 \eta}{d\xi^4} = a_1 \frac{d^3 \eta}{d\xi^3} + (a_2 + a_3 p) \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} + a_4 p^2 \eta \quad (19)$$

여기서,

$$a_1 = 32 \alpha (2\xi - 1) / j \quad (20)$$

$$a_2 = 32 \alpha (7j - 6\alpha - 6) / j^2 \quad (21)$$

$$a_3 = -\frac{3 m \tan(\pi / m) \beta^2}{\pi [3 + \tan^2(\pi / m)]} \frac{1}{j^4} \quad (22)$$

$$a_4 = \frac{3 m \tan(\pi / m) \beta}{\pi [3 + \tan^2(\pi / m)]} \frac{1}{j^2} \quad (23)$$

그리고,

$$j = -4\alpha \xi^2 + 4\alpha \xi + 1 \quad (24)$$

(11), (12)식의 경계조건식은 (13), (14)식을 이용하면 다음의 무차원 경계조건식으로 유도된다.

$$\eta = 0, \xi = 0 \text{와 } 1 \text{에서} \quad (25)$$

$$\frac{d^2 \eta}{d\xi^2} = 0, \xi = 0 \text{와 } 1 \text{에서} \quad (26)$$

4. 수치해석 방법

이상의 과정에서 변단면 보-기둥의 자유진동을 지배하는 상미분방정식을 유도하였으므로, 이제 이 상미분방정식을 푸는 문제는 자유진동의 고유치인 f 와 그에 대응하는 진동형 η 를 구하는 문제로 형성된다.

본 연구에서 자유진동의 고유치 f 값을 찾기 위하여 행렬값 탐사법을 이용하였고, 진동형 η 를 구하기 위하여 상미분방정식의 수치적분은 Runge-Kutta method를 이용하였다. 이와 같은 수치해석 방법은 이미 여러 문헌들^{(13),(14)}에서 그 유용성이 인정된 바 있다.

상미분방정식에 포함되어 있는 고유치 f 와 진동형 η 를 구하기 위한 수치해석 방법을 간단히 설명하면 다음과 같다.

먼저 입력변수인 정다각형의 변수 m , 단면비 n 및 무차원하중 p 값을 입력하고 (5), (7)식으로 각각 α , β 값을 계산한다.

다음에 f 값을 시행착오적으로 가정하여 (19)식의 상미분방정식에 대입한 후에 해석 보-기둥의 단부조건에 따라서 $\xi=0$ 에서의 (25), (26)식의 경

계조조건을 초기치로 하여 Runge-Kutta method⁽¹⁵⁾로 $\xi=0$ 에서 $\xi=1$ 까지 상미분방정식을 수치적분하여 진동형 η 를 구한다.

이 때 시행착오적으로 가정한 f 값이 자유진동의 고유치인지는 수치적분의 수해결과로 얻어진 경계조건이 $\xi=1$ 에서의 실제 경계조건 (25), (26)식을 만족하는지의 여부로 판단한다. 이 연구에서 f 값의 산정에는 Regula-Falsi method⁽¹⁵⁾를 이용한 행렬값 탐사법을 사용하였다.

이상의 수치해석 방법들 m, n, p 값을 입력하면 f 및 η 가 계산되도록 FORTRAN 77어로 컴퓨터 프로그래밍하였다. 이 연구에서 보-기둥의 무차원 고유진동수 f 는 최저차의 제1 고유진동수 하나만을 계산하였다.

본 연구에서의 수치해석 방법을 검증하기 위하여 SAP90과 본 연구의 f 값들을 표 1에서 비교하였다. 두 결과들은 아주 우수하게 접근하여 본 연구에서의 수치해석 방법의 타당성을 입증할 수 있다.

표 1. 본 연구와 SAP90의 f 값 비교

제원	자료 출처	무차원 고유진동수, f			
		$m=3$	$m=4$	$m=5$	$m=c^*$
$n=0.8$	본 연구	10.26	9.55	9.41	9.33
$p=0$.	SAP90	10.26	9.55	9.41	9.33
$n=1.5$	본 연구	11.41	10.62	10.46	10.38
$p=0$.	SAP90	11.41	10.61	10.47	10.37

* $m=c$: 원형단면

5. 수치해석 결과 및 고찰

하중이 재하되지 않는 경우($p=0$)에 f 와 n 사이의 관계를 그림 3에 나타내었다. f 값은 n 값이 증가함에 따라서 증가하다가 극치를 보인 후에 다시 감소한다. 따라서 f 값이 극치를 보이는 n 값이 동적 최적단면비 n_{opt} 가 된다. 이 그림에서 보인 바와 같이 정다각형 단면의 변수 m 값에 상관없이 n_{opt} 는 모두 1.78을 나타내고 있다. 그러나 f_{max} 값은 정 3, 4, 5각형 및 원형단면($m=c$)의 순서로 크다. 그러므로 동적 최적단면형상은 정3각형단면의 $n_{opt}=1.78$ 임을 알 수 있고, 이 때의 f_{max} 값은 11.46 이어서

단순지지 보-기둥에서 11.46이상의 f 값은 불가능하다. 또한 정5각형단면($m=5$)과 원형단면($m=c$)의 f 값의 비는 $10.51/10.42=1.0086$ 으로 1%미만의 차이를 보이므로 $m=5$ 이상의 정다각형 단면을 원형단면으로 대체하여도 공학적으로 무리가 없다고 판단된다. 따라서 이후의 수치해석은 $m=3, 4$ 및 원형단면에 국한하였다.

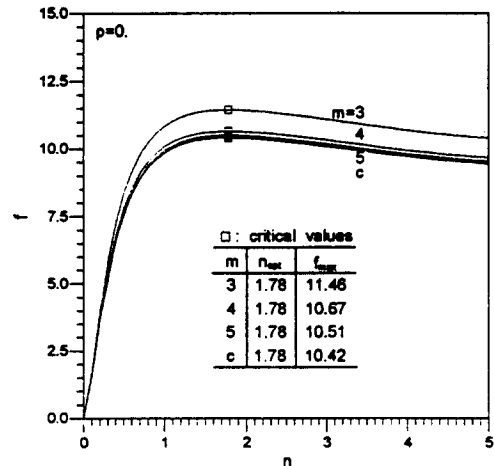


그림 3. 고유진동수-단면비 곡선($p=0$)

그림 4는 정3각형단면($m=3$)에 대하여 하중단계별($p=0, 5, 9, 11, 13, 15$)로 f 와 n 사이의 관계를 그림에 나타낸 것이다. 각 하중단계별 $f-n$ 곡선은 모두 임계점에서 극치를 보이고 있어서 각하중단계별로 최적단면비 n_{opt} 가 있음을 나타내고 있다. 예로서 $p=11$ 인 경우에 □표로 표시된 f_{max} 값은 $n=1.96$ 에서 6.20으로 나타나고 있다. 따라서 $p=11$ 인 경우에 최적단면비 n_{opt} 는 1.96이며 6.20이상의 f 값은 존재하지 않는다. 또한 $p=11$ 의 하중에 대하여 ○표로 표시된 최소단면비 n_{min} 과 최대단면비 n_{max} 가 있음을 알 수 있다. f 값은 n_{min} 과 n_{max} 사이의 n 값에 대해서만 존재하며 n_{min} 이하, n_{max} 이상의 n 값에 대해서 제1고유진동수는 존재하지 않는다.

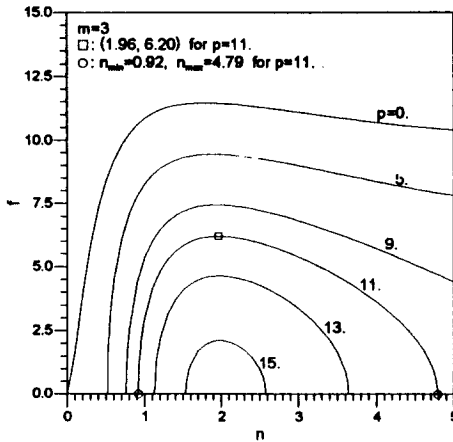


그림 4. 하중단계별 고유진동수-단면비 곡선

그림 4의 각 하중 단계별 임계점(n_{opt} , f_{max}) 및 최소, 최대 단면비를 표 2에 정리하였다. 이 표에서 각 난의 수치를 각각 종축 및 횡축에 표시하여 나타낸 것이 그림 5~8이다. 그림 4와 표 2에서는 정3각형단면($m=3$)에 대해서만 나타내었지만, 그림 5~8에서는 정4각형단면($m=4$) 및 원형단면($m=c$)에 대해서도 나타내었다.

표 2. 하중단계별 임계점 및 최대, 최소단면비($m=3$)

p	n_{opt}	f_{max}	n_{min}	n_{max}^*
0.	1.78	11.46	0.00	-
5.	1.89	9.44	0.52	-
9.	1.94	7.44	0.75	-
11.	1.96	6.20	0.92	4.79
13.	1.97	4.64	1.12	3.63
15.	1.98	2.12	1.53	2.57
15.52	1.98	0.00	1.98	1.98

* 5이상인 n_{max} 값은 계산하지 않았음.

그림 5는 표 2에서 n_{opt} 와 p 의 관계 즉 하중단계별 동적 최적단면비를 그림에 나타낸 것이다. 이 그림은 각하중단계별 n_{opt} 를 나타낸 것이므로 이 그림으로 부터 보-기둥의 최적단면비를 산출할 수 있다. $p=0$ 인 경우에 최적단면비는 ○표로 표시된 1.78이며 역시 ○표로 표시된 최대 n_{opt} 는 1.98이다. 이 최소, 최대 n_{opt} 는 m 값에 상관없이 모두 같았다. 최대 n_{opt} 값인 1.98에서 p_{max} 값(□표)은

$m=3, 4, c$ 의 순서로 각각 15.52, 13.45, 12.84의 값을 보였다. 이 p_{max} 값 이상에 대해서는 보-기둥이 좌굴하므로 안정영역에서 벗어나므로 n_{opt} 축, 점선, 및 최적단면비곡선으로 둘러싸인 면적이 안전영역이 된다.

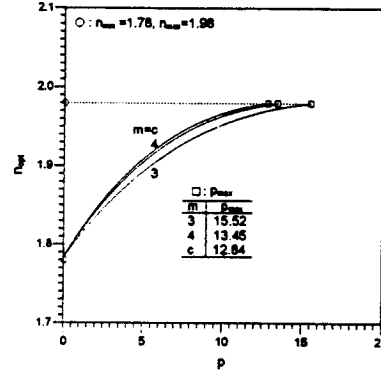


그림 5. 하중단계별 동적 최적단면비 곡선

그림 6은 표 2에서 f_{max} 와 p 사이의 관계 즉 하중단계별 최대 고유진동수곡선을 그림에 나타낸 것이다. 이 그림으로 부터 각 하중단계별로 가질 수 있는 최대 f 값을 구할 수 있다. f_{max} 값은 하중이 작을 수록 크게 나타났고 p 값이 증가하면 감소하였다. 이 그림에 f_{max} 값의 최대치(△표)와 p 의 최대치(□표)를 나타내었다. 예로서 정3각형단면에서 최대 f_{max} 값은 11.46이며, p 의 최대치는 15.52이다. 이는 정3각형단면에서 f 값은 0~11.46, p 값은 0~15.52사이에 분포함을 의미한다.

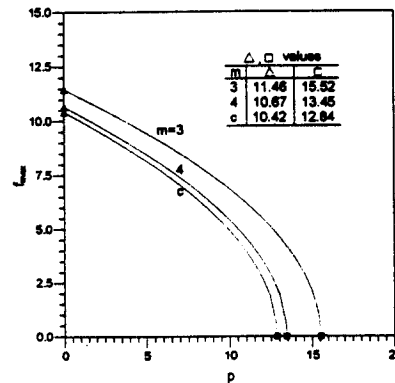


그림 6. 하중단계별 최대 고유진동수 곡선

그림 7은 표 2에서 p 와 n_{min} 과 n_{max} 를 동시에 표시한 하중단계별 최소, 최대 단면비를 그림에 나타낸 것이다. 이 그림은 종축의 p 값이 존재하기 위한 횡축의 최소 n_{min} 과 최대 n_{max} 를 의미하므로 각 하중단계별로 필요한 최소의 n 값과 최대의 n 값을 나타낸다. 따라서 이 곡선의 아래쪽에 p 와 n 값이 존재하여야 보-기둥의 고유진동수가 존재함을 의미한다. 이 그림에서 □표로 표시한 p 값이 보-기둥의 최대하중능력으로 m 값에 상관없이 모두 $n=1.98$ 에서 발생하였다. 이 때의 p 값들을 그림에 나타낸 바와 같이 $m=3, 4, c$ 의 순서로 15.52, 13.45, 12.84값을 보였다. 이 그림에서 표시한 □표의 극점이 최강기둥의 단면비(n)와 좌굴하중(p)이 된다.

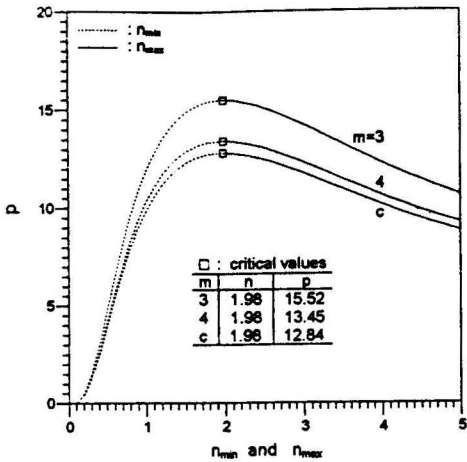


그림 7. 하중단계별 최소, 최대단면비 곡선

그림 8은 표 2에서 n_{opt} 과 f_{max} 사이의 관계를 그림에 나타낸 것이다. 이 그림으로 부터 주어진 최적단면비값으로 부터 가질 수 있는 f_{max} 값을 찾을 수 있다. f_{max} 값이 0.5이하에서는 m 값에 상관없이 세 곡선이 거의 일치함을 알 수 있다. 또한 이 그림들로 부터 n 값은 1.78~1.98사이에서, f_{max} 값은 $m=3, 4, c$ 의 순서로 11.46, 10.67, 10.42의 값을 보이고 있다.

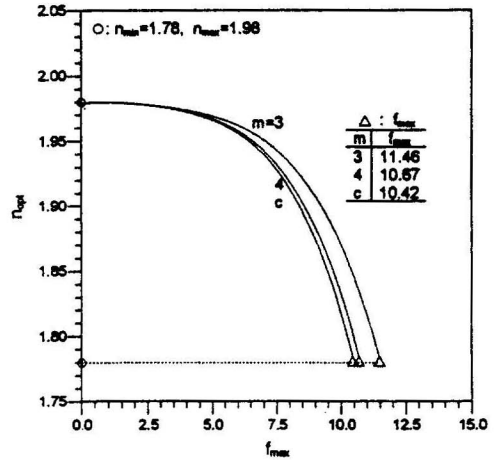


그림 8. 최적 단면비-최대 고유진동수 곡선

그림 9는 $p=0$ 인 경우에 대하여 동적 최적 보-기둥과 등단면 보-기둥의 진동형을 비교한 그림이다. 이 그림에서 보인바와 같이 최적단면($n=1.78$)과 최적단면이 아닌 등단면($n=1.0$)의 진동형 사이에는 큰 차이가 있음을 알 수 있다.

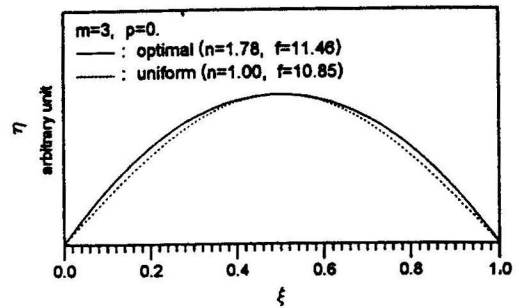


그림 9. 동적 최적단면과 등단면의 진동형 비교

6. 결 론

이 논문은 일정체적 단순지지 보-기둥의 동적 최적단면에 관한 연구이다. 단면깊이가 포물선 함수로 변화하는 정다각형 단면을 갖는 보-기둥의 고유진동수를 산출하고, 이 결과들로 부터 가장 큰 제1 고유진동수가 발생하는 동적 최적단면을 결정하였다. 실제의 수치해석에서 보-기둥의 지

지조건은 단순지지에 국한하였으며 수치해석 결과를 분석하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

1. 무차원 고유진동수는 정다각형 단면의 변수가 작을수록 크다.
2. 축하중이 작용하지 않을 경우에 동적 최적단면비는 1.78이다.
3. 최대압축하중에 대한 단면비는 1.98이다.
4. 하중단계별 동적 최대단면비는 그림 5와 같다.
5. 제1 무차원 고유진동수의 영역은 0~11.46이다.
6. 작용할 수 있는 무차원 압축하중의 영역은 0~15.52이다.

감사의 글

이 논문은 1995년도 한국학술진흥재단의 공모 과제(과제명: 연속보의 동적 최적설계에 관한 연구) 연구비 지원으로 이루어진 연구결과의 일부이며, 연구비를 지원해 준 재단당국에 진심으로 감사드립니다.

참 고 문 헌

- (1) Haftka, R.T., Grudal, Z. and Kamat, M.P., 1990, Elements of Structural Optimization, Kluwer Academic Publisher.
- (2) Niordson, F.I., 1965, "On the Optimal Design of a Vibrating Beam," Q. App. Math., Vol. 23, pp.47~53.
- (3) Kamat, M.P. and Simites, G.J., 1973, "Optimal Beam Frequencies by the Finite Element Displacement Method," Intl. J. Solids Stuct., Vol. 9, pp. 415~429.
- (4) Kamat, M.P. and Simites, G.J., 1975, "Effect of Shear Deformations and Rotary Inertia on Optimum Beam Frequencies," Intl. J. Num. Meth. Eng., Vol. 9, pp. 51~62.
- (5) Keller, J.B., 1960, "The Shape of the Strongest Column," Archiv. Rat. Mech. and Anal., Vol. 5, pp.275~285.
- (6) Tadjbakhsh, I. and Keller, J.B., 1962, "Strongest Columns and Isoperimetric Inequalities for Eigenvalues," J. App. Mech., ASME, Vol. 29, pp.159~164.
- (7) Keller, J.B. and Niordson, F.I., 1966, "The Tallest Column," J. Math. and Mech., Vol. 16, No. 5, pp.433~446.
- (8) Taylor, J.E., 1967, "The Strongest Column-An Energy Approach," J. Appl. Mech., ASME, Vol. 34, pp.486~487.
- (9) Wilson, J.F., Holloway, D.M. and Biggers, S.B., 1971, "Stability Experiments on the Strongest Columns and Circular Arches," Experimental Mechanics, Vol. 11, pp.303~308.
- (10) Masur, E.F., 1984, "Optimal Structural Design under Multiple Eigenvalue Constraints," Int. J. Solids Struct. Vol. 20, pp.211~231.
- (11) Lee, B.K. and Mo, J.M., 1996, "Free Vibrations and Buckling Loads of Tapered Beam-Columns of Regular Polygon Cross-Section with Constant Volume," Journal of Korean Society of Noise and Vibration Engineering, Vol. 6, No. 5, pp.587~594.
- (12) Clough, R.W. and Penzien, J., 1993, Dynamics of Structures, 2nd Edition, McGraw-Hill.
- (13) Lee, B.K. and Wilson, J.F., 1990, "Free Vibrations of Arches with Variable Curvature," Journal of Sound and Vibration, Vol. 136, No. 1, pp.75~89.
- (14) Lee, B.K., Wilson, J.F. and Oh, S.J., 1993, "Elastica of Cantilevered Beams with Variable Cross Section," Int. J. Non-Linear Mechanics, Vol. 28, No. 5, pp.579~589.
- (15) Carnahan, B., Luther, H.A. and Wilkes, J.O., 1969, Applied Numerical Methods, John Wiley & Sons, Inc.

(접수일자 : 1997. 2. 12)