

< 논 문 >

## 설계변수의 공차를 고려한 구조물의 강건 최적설계

이권희\* · 박경진\*\*

(1996년 4월 22일 접수)

### Robust Structural Optimization Considering the Tolerances of Design Variables

Kwon-Hee Lee and Gyung-Jin Park

**Key Words :** Robust Design(강건설계), Uncertainty(불확실성), Multiobjective Function(다중 목적함수), Feasibility(가용성)

#### Abstract

The optimization techniques have been applied to versatile engineering problems for reducing manufacturing cost and for automatic design. The deterministic approaches of optimization neglect the effects on uncertainties of design variables. The uncertainties include variation or perturbation such as tolerance band. The optimum may be useless when the constraints considering worst cases of design variables can not be satisfied, which results from constraint variation. The variation of design variables can also give rise to drastic change of performances. The two issues are related to constraint feasibility and insensitive performance. Robust design suggested in the present study is developed to gain an optimum insensitive to variation on design variables within feasible region. The multiobjective function is composed to the mean and the standard deviation of original objective function, while the constraints are supplemented by adding penalty term to original constraints. This method has a advantage that the second derivatives of the constraints are not required. A mathematical problem and several standard problems for structural optimization are solved to check out the usefulness of the suggested method.

#### 1. 서 론

최적설계는 주어진 요구조건을 만족시키면서 설계자가 원하는 효과를 극대화시키는 해를 찾아내는 과정으로 비용절감 및 자동설계의 관점에서 공학 문제에 많이 응용되고 있다. 최적화기법은 설계변수 분포의 취급유무에 따라 결정론적 방법(deterministic approach)과 통계적 방법(stochastic approach)으로 분류할 수 있다. 현재 대부분의 최

적설계 알고리즘에서는 결정론적 방법이 이용되고 있으나, 이것은 설계변수의 불확실성(uncertainty)으로 인해 목적함수 및 제한조건에 존재할 수 있는 분포 등의 영향을 무시함으로써 최종으로 구해진 최적해에 대한 신뢰성이 약해질 수 있다. 설계변수의 불확실성으로 인해 목적함수의 성능치에 급격한 변동을 초래할 수 있으며,<sup>(1-3)</sup> 구해진 최적해가 초기에 설정된 제한조건을 만족시키지 못할 수 있다. 이런 경우 최적화 알고리즘을 통해 구해진 최적해는 실제 사용할 수 없는 무의미한 해가 될 수 있다. 설계변수의 불확실성이란 설계변수가 어떤 특정한 값으로 고정되지 못하고 제작상의 공차

\*회원, 한양대학교 대학원 기계설계학과

\*\*회원, 한양대학교 기계공학과

(tolerance) 또는 분포 등의 형태로 존재하고 있음을 의미한다.<sup>(4)</sup> 통계적 방법은 설계변수의 분포를 고려하여 기존의 결정론적 방법에 사용되는 알고리즘에 의해 최적해를 구하며, 제한조건이 위배될 가능성을 확률로써 표시하고 있다. 여기서 정의된 강건설계는 설계변수의 분포를 고려한다는 점에서 통계적 방법과 동일하지만 제한조건을 처리하는 방법이 상이하다.

강건설계(robust design)는 목적함수의 강건성과 제한조건함수의 강건성을 포함하고 있다. 목적함수의 강건성이란 설계변수의 최악조건(worst case)을 고려한 목적함수의 성능이 그 변화에 대해 민감하지 않도록 하는 것이다. 최악조건은 구조설계 문제에서 설계변수의 공차영역(tolerance band)으로 간주할 수 있다. 반면에 제한조건함수의 강건성이란 가용성(feasibility)으로서 최적해가 설계변수의 변화에 대해 항상 가용영역에 존재하도록 하는 것을 의미한다.

Balling 등<sup>(5)</sup>은 기존의 최적화 알고리즘에서 구한 해와 해에서의 제한조건의 구배(gradient)를 이용하여, 최적화의 후처리로서 목적함수인 설계변수 변화량의 노름(norm)을 최소화하면서 제한조건인 제작공차를 고려한 선형화된 부등제한조건을 만족하도록 하는 정식화를 제시하였다. Bennet 등<sup>(6)</sup>은 목적함수로서 중량을 고려하였고 제한조건으로 기존 최적해의 정보를 이용하여 벌칙이 부과된 부등 제한조건 및 후처리(post process)가 아닌 최적화 과정에 설계변수의 변화를 고려한 부등제한조건을 이용하는 정식화를 제시하였다. Ramakrishnan 등<sup>(7)</sup>은 목적함수로서 원래목적함수의 분산을, 제한조건함수로서 원래제한조건함수의 평균을 취하였다. Lee 등<sup>(1)</sup>은 제한조건이 없는 최적화 문제에 대한 불연속 강건설계법을 다구찌법(Taguchi method)을 이용하여 전개하였으며 이종원 등<sup>(8)</sup>은 다구찌법과 비제약 최소화 기법(SUMT, Sequential Unconstrained Minimization Technique)을 이용하여 강건설계법을 개발하였다. Parkinson 등<sup>(9)</sup>은 설계변수를 제어할 수 있는 인자와 그렇지 못한 인자로 분류하여 후최적해석(post optimality analysis) 등의 방법으로 강건설계를 수행하였다. 그러나 기존의 연구에서는 대부분 목적함수와 제한조건이 설계변수의 변화에 대하여 동시에 강건해지도록 하는 알고리즘을 제공하지 않고 있으며, 결정론적 방법으로부터의 최적해를 기초로 최적설계의 후처리로

서 강건해를 구하고 있다. 최적설계의 후처리로서 강건해를 구하게 되면 최적해에서 제한조건함수의 일차 미분항을 이용하기 때문에 강건해와 최적해가 근접해 있는 경우에만 그 정식화가 타당하다. 그러나 강건해와 최적해가 근접해 있는 경우에는 강건설계의 필요성이 크게 대두되지 않으며, 두 해가 근접해있지 않는 경우에는 이 접근방법은 유효하지 않다.<sup>(1,2)</sup> 또한 이 방법은 이단계의 과정을 통해 최적해를 구하게 된다.

이러한 단점을 극복하기 위하여 제시된 방법에서는 최적설계에서 정의된 목적함수 및 제한조건함수를 수정하여 새로운 정식화를 구성하였다. 목적함수로서 원래목적함수를 그대로 최소화하지 않고 목적함수의 최소화 조건과 강건성 조건을 문제의 성질에 따라 만족하도록 하는 새로운 다중목적함수를 도입하였다. 이것은 통계적 최적화기법<sup>(10)</sup> 및 기존의 강건설계<sup>(1,2)</sup>에서 사용되는 목적함수이기도 하다. 구조설계 문제에서 목적함수로 설정되는 중량은 트러스구조물의 경우 설계변수인 단면적에 대하여 선형이므로 분산은 상수로 나타난다. 그러나 보구조물의 경우에는 단면이 사각, 원형, 중공사각 또는 중공원형 등의 형상을 지니고 있으므로 중량은 단면을 표시하는 설계변수에 대하여 비선형 함수이다. 따라서 트러스구조물에서의 목적함수는 중량만을, 보구조물에서의 목적함수는 중량의 평균 및 표준편차로 구성되는 다중목적함수로 구성하였다. 새로 작성된 제한조건함수는 후처리방법을 이용하지 않고 설계과정중에 원래제한조건함수에 설계변수에 대한 제한조건함수의 구배가 클수록, 또는 설계변수의 편차가 클수록 비례하는 벌칙계수(penalty coefficient)를 포함하는 벌칙항(penalty term)을 추가하였다. 이것으로 인하여 설계변수의 공차영역내에서 원래 제한조건을 만족하도록 하였다. 이것은 제한조건의 강건성을 의미한다. 또한 부문제(subprogram)의 작성시 제한조건함수의 일차 미분항을 계산하지 않기 위해 부가항을 상수로 취급하였다. 벌칙계수가 증가할수록 제한조건함수의 강건성도 증가하지만 가용영역의 축소로 인해 원래 목적함수 값이 증가하는 경향이 있다. 따라서 문제의 중요도 및 성격에 따라 적절한 벌칙계수가 선정되어야 한다.

제시된 강건설계에서는 목적함수 및 제한조건에 대한 강건성을 정의하였으며, 강건설계의 정식화를 통해 최적해를 찾을 수 있는 방법을 개발하였다.

이 방법에 의하면 공차영역을 이용하였으므로 보수적(conservative)인 경향이 있으며, 목적함수와 제한조건에 강건한 해를 구할 수 있는 장점이 있다. 개발된 강건 최적설계 정식화의 유용성을 증명하기 위하여 수학적 문제, 트러스설계문제 및 보설계문제에 적용하였다.

## 2. 목적함수 및 제한조건함수의 강건성

일반적인 최적화과정에서 목적함수,  $f(x)$  및 부동제한조건함수,  $g_j(x)$ 가 설정되면 최적해를 구하기 위한 정식화는 다음과 같이 정의할 수 있다.<sup>(1)</sup>

$$\begin{aligned} & \text{Minimize } f(x) \\ & \text{Subject to } g_j(x) \leq 0, \quad j=1, \dots, m \\ & \quad \quad \quad x_L \leq x \leq x_U \end{aligned} \quad (1)$$

여기서,  $x$ ,  $x_L$ ,  $x_U$ 는 설계변수, 설계변수의 하한값(lower bound)과 상한값(upper bound) 벡터를 표시한다. 위의 정식화로부터 구해지는 최적해인  $x^*$ 는 설계변수의 변동을 고려하지 않고 공칭값(nominal value)만을 이용하여 구한 해이다. 그러나 설계변수는 실제로 어떤 분포 또는 제작공차를 갖고 있으므로 식 (1)의 목적함수는 변동이 발생하고, 그 변동량이 클수록 계(system)의 성능이 불안정하게 된다. 그리고 식 (1)로부터 구한 최적해를 이용하여 계를 설계하면 제한조건함수에도 변동이 발생하여 제한조건을 위배하는 경우가 존재할 수 있다. 따라서 설계과정에서 설계변수의 변동량을 고려하여 최적화를 수행함으로써 목적함수의 변동량을 감소시키면서 초기에 설정된 제한조건을 항상 만족시키는 강건한 최적해를 구하는 것이 바람직하다. 설계변수  $x_i$ 의 변동 및 분포는 Fig. 1과 같이 표시할 수 있다.<sup>(9)</sup>  $\Delta x_i$ 는 설계변수의 최악조건으로서 공차영역을 의미한다. 제시된 방법의 목적은  $3\sigma_{x_i} = \Delta x_i$ 로 가정하여  $\mu_{x_i} - 3\sigma_{x_i}$ 와  $\mu_{x_i} + 3\sigma_{x_i}$  사이에서 분포를 갖는 설계변수 중, 목적함수 및 제한조건함수에 강건해지는 최적해를 구하는 것이다. 식 (1)을 구성하는 여러가지 물성치 및 재질 등도 임의의 분포를 가질 수 있지만 여기서는 상수로 취급하였다.

목적함수 및 제한조건함수에 대한 강건성을 다음과 같이 정의할 수 있다.

목적함수의 강건성(robustness of objective function)은 설계변수  $x_i$ 가  $\mu_{x_i} - \Delta x_i$ 와  $\mu_{x_i} + \Delta x_i$  사이에

존재할 때 목적함수  $f(x)$ 의 값 및 변동을 최소화시키는 것이며, 목적함수의 최소화 및 변동의 최소화의 중요도는 문제의 성질에 따라 설계자가 결정한다.

제한조건함수의 강건성(robustness of constraint function)은 설계변수  $x_i$ 가  $\mu_{x_i} - \Delta x_i$ 와  $\mu_{x_i} + \Delta x_i$  사이에 존재할 때 제한조건함수  $g_j(x)$ ,  $j=1, \dots, m$ 이 항상 만족되도록 하는 가용성을 의미한다.

### 2.1 목적함수의 강건성

설계변수가 어떤 고정값으로 설정되지 못하고 상한, 하한값 사이에서 분포를 갖게 되면 목적함수도 분포를 갖게 된다. 목적함수의 분포가 작게 되면 설계변수의 분포를 크게 할 수 있으므로, 이것은 설계변수의 공차를 크게 할 수 있어 제작비를 경감할 수 있는 장점이 있다. Fig. 2는 목적함수의 강건성을 나타내고 있다. 강건성을 고려하지 않은 국부 최적해는 점 A로, 강건성을 고려한 최적해는 점 B로 각각 표시하였다. 점 A는 점 B보다 성능치가 보다 작은 값을 갖고 있지만 설계변수의 변동에 의하여 그 성능이 매우 민감한 반응을 나타낸

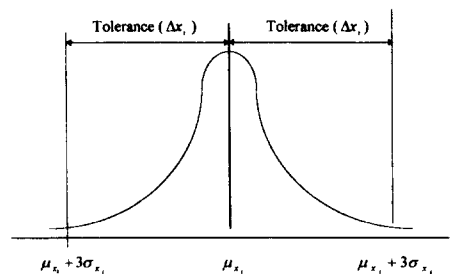


Fig. 1 Mean ( $\mu_{x_i}$ ), standard deviation ( $\sigma_{x_i}$ ) and tolerance band ( $\Delta x_i$ ) of the design variable

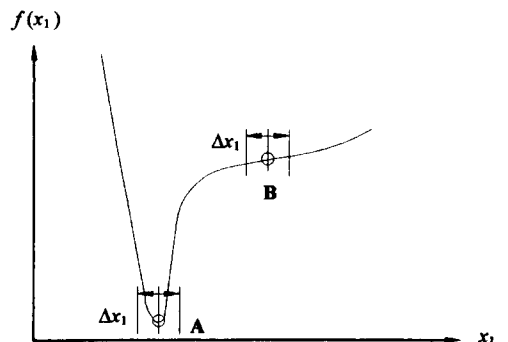


Fig. 2 Robustness of the objective function

다. 반면에 점 B는 설계변수의 변동에 의하여 그 성능이 강건하지만 점 A보다는 큰 성능치를 갖고 있다. 즉 강건설계의 측면에서 점 B가 점 A보다는 우수한 해로 간주할 수 있다. 이러한 해를 구하기 위하여 목적함수  $f(x)$ 는 다음과 같이 다중목적함수,  $\Phi(x)$ 로 치환한다.

$$\Phi(x) = \alpha \cdot \frac{\mu_f}{\mu_f^*} + (1 - \alpha) \cdot \frac{\sigma_f}{\sigma_f^*}, \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \quad (2)$$

여기서,  $\mu_f$ ,  $\sigma_f$ 는 각각 목적함수의 평균과 표준편차를 의미하며,  $\mu_f^*$ ,  $\sigma_f^*$ 는 각각 평균 및 표준편차를 고려해 얻은 최적함수값을 의미하며  $\alpha$ 는 가중치(weighting factor)로서 설계변수의 변화에 따른 목적함수의 최소화 및 산포도의 중요도에 따라 결정되는 값이다.  $\alpha=1$ 이면 Fig. 2의 점 A가,  $\alpha=0$ 이면 점 B가 최적해로 결정된다. 즉, 평균  $\mu_f$ 는 점 A를,  $\sigma_f$ 는 점 B를 최적해로 산출하려는 경향이 있으며 가중치  $\alpha$ 에 따라 점 A와 점 B 사이에서 최적해를 구하게 된다. 식 (2)에서 표준편차는 목적함수의 강건성을 나타내는 지표이며 수학적 으로 차분법과 관계가 있다.<sup>(1,3)</sup> 식 (2)에서 평균  $\mu_f$ 와 표준편차,  $\sigma_f$ 는 적분을 이용하면 정확한 값을 얻을 수 있으며, 테일러 급수전개를 이용하면 근사값을 얻을 수 있다.  $n$ 개의 확률변수(random variable)가 서로 독립적이라고 가정하고 적분을 이용하면 평균 및 분산을 다음과 같이 표시할 수 있다.<sup>(1,2)</sup>

$$\begin{aligned} \mu_f &= E[f(x)] \\ &= \iint \dots \int f(x) p_1(x_1) \dots p_i(x_i) \dots p_n(x_n) dx \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \sigma_f^2 &= E[f(x) - \mu_f]^2 \\ &= \iint \dots \int (f(x) - \mu_f)^2 p_1(x_1) \dots p_i(x_i) \dots p_n(x_n) dx \end{aligned} \quad (4)$$

여기서,  $n$ 은 설계변수의 수,  $p_i(x_i)$ 는  $i$ 번째 설계변수,  $x_i$ 의 확률밀도함수(probability density function)를 표시한다. 그러나 확률밀도함수  $p_i(x_i)$ 는 대부분의 실제 문제에서는 알 수 없지만 다음과 같이 정규분포(normal distribution)로 가정할 수 있다.

$$p_i(x_i) = \frac{1}{\sigma_{x_i} \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x_i - \mu_{x_i})^2}{2\sigma_{x_i}^2}\right] \quad (5)$$

여기서,  $\mu_{x_i}$  및  $\sigma_{x_i}$ 은 각각  $i$ 번째 설계변수의 평균 및 표준편차로서 Fig. 1에 표시된 평균 및 표준편

차와 일치한다. 식 (3) 및 (4)를 이용하여 평균 및 분산을 구하게 되면 설계변수의 수가 증가하거나 목적함수가 설계변수에 대하여 복잡한 함수형태로 전개된 경우 많은 함수계산이 필요하다. 이러한 문제에 대해서는 일차항까지 전개된 테일러급수를 이용한다. 테일러급수전개를 이용하고 이차 이상의 항을 무시하면 목적함수의 평균 및 분산은 다음과 같이 근사화시킬 수 있다.<sup>(7)</sup>

$$\mu_f = f(x) \quad (6)$$

$$\sigma_f^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_x^2 \cdot \sigma_{x_i}^2 \quad (7)$$

여기서,  $\mu$ 는 설계변수의 평균벡터를 표시하고 있으며,  $\sigma_{x_i}^2$ 는 목적함수의 평균 및 분산을 적분으로 구할 경우에 알아야 되는 확률밀도함수  $p_i(x_i)$  대신에 알고 있어야 하는 값이다. 그러나 평균 및 분산으로서 식 (6) 및 (7)을 사용할 경우에는 목적함수의 설계변수에 대한 비선형성이 크지 않고  $\sigma_{x_i}^2$ 가 작을 때만 타당하다. 이것은 식 (6) 및 (7)의 유도 과정에서 이차 이상의 미분항을 무시하였기 때문이다. 대부분의 구조설계문제에서 목적함수는 중량으로 설정되는데 트리스구조물은 중량이 설계변수인 단면적에 대하여 선형함수이므로 목적함수의 분산은 상수로 취급된다. 따라서 트리스구조물의 설계에서는 중량의 분산을 무시하고, 식 (2)에서 식 (6)만을 고려한 목적함수를 이용한다. 보구조물의 설계문제에서는 단면의 치수가 설계변수로 설정되며 중량에 대해 비선형성이 크지 않으므로 평균 및 분산으로서 식 (6) 및 (7)을 사용해도 오차가 크지 않다.

최적화 알고리즘에서는 식 (1)의 정식화로부터 방향벡터(direction vector)를 구하기 위해 부분제를 구성해야 하는데 이 과정에서 목적함수 및 제한조건함수를 선형화시킨다. 부분제 작성시 다중목적함수의 미분값은 식 (2)에 의하여 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\frac{\partial \Phi(x)}{\partial x_i} = \frac{\alpha}{\mu_f^*} \cdot \frac{\partial \mu_f}{\partial x_i} + \frac{1-\alpha}{\sigma_f^*} \cdot \frac{\partial \sigma_f}{\partial x_i} \quad (8)$$

### 2.2 제한조건함수의 강건성

설계변수가 분포로서 주어지면 이의 변화에 따라 제한조건함수도 목적함수와 같이 변동을 갖게 된다. 설계변수의 분포에 의해 목적함수의 경우에는 함수값의 변동에만 영향을 미치지만 제한조건함수

의 경우에는 가용영역이 불용영역(infeasible region)으로 되는 부분이 생긴다. 이것을 Fig. 3에 표시하였다. 그림에서 점선으로 표시된 영역과 빗금친 영역이 제한조건함수의 변동을 고려하지 않은 경우의 가용영역이며 빗금친 영역이 설계변수의 변화에 의하여 발생한 불용영역이다. 목적함수의 강건성을 고려하여 얻은 최적해를 점 A라고 하면 점 B는 변화된 가용영역을 고려하여 얻을 수 있는 최적해이다. 기존의 결정론적 방법에 의하여 구해진 최적해가 설계변수의 상한 또는 하한값으로 결정되거나 활성화제한조건(active constraint)이 존재할 경우 그 해는 강건설계의 관점에서는 사용불가능한 무용해이다. 설계변수의 변동에 따른 제한조건의 변동을 고려하기 위하여 제한조건함수를 다음과 같이 재구성하였다.<sup>(13)</sup>

$$g_{newj} = g_j + \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial g_j}{\partial x_i} \right| \Delta x_i \quad (9)$$

여기서,  $\partial g_j / \partial x_i$ 는  $j$ 번째 제한조건함수의  $i$ 번째 설계변수에 대한 구배를 표시한다. 식 (9)에서는 현재 설계점에서 제한조건함수의 구배에 비례해서 원래 제한조건함수  $g_j$ 값에 부가되어 보수적인 값을 갖는 새로운 제한조건함수  $g_{newj}$ 를 설정한 것이다. 식 (9)의 우항의 두번째 항에서 절대값을 취한 이유는 구배의 부호에 관계없이 벌칙항이 양의 값을 갖도록 한 것이다. 그러나 식 (9)에 의한 보수적인 제한조건을 이용하여 구한 최적해도 공차영역을 고려하면 불용영역에 존재할 가능성이 있다. 예를 들어 설계변수가  $x_1, x_2$ 인 문제에서 식 (1)의 정식화로부터 구한 최적해를  $x_1^*, x_2^*$  그리고 각 설계변수의 공차영역을  $\Delta x_1, \Delta x_2$ 라고 가정한다. 공차영역을 고려하면 최적해는 Fig. 4에서와 같이 점 2,

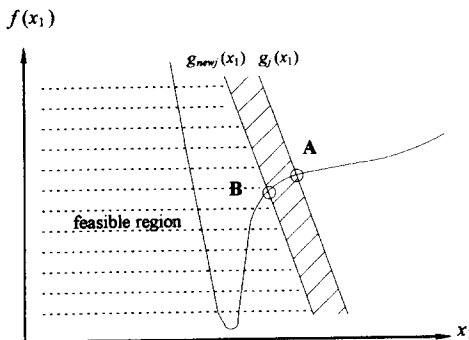


Fig. 3 Robustness of the constraint function

3, 4, 5로 구성된 사각형의 영역안에 존재할 수 있다. 사각형을 구성하고 있는 모든 점 및 사각형의 내부의 모든 점들이 가용영역에 존재해야만 구한 최적해가 제한조건함수에 강건하다고 할 수 있다. 그러나 식 (9)의 새로운 제한조건함수로는 이러한 강건해를 구할 수 있다고 보장하지 못하다. 이 문제를 해결하기 위하여 벌칙항에 벌칙계수  $k_j$ 를 고려하면 식 (9)를 다음과 같이 보정하였다.

$$g_{newj} = g_j + k_j \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial g_j}{\partial x_i} \right| \Delta x_i \quad (10)$$

$k_j$ 는 벌칙계수로서 통상 1.0~1.5의 값을 취하면 설계변수의 최약조건을 고려해도 최종 구한 해는 가용영역 안으로 포함된다. 이 벌칙계수는 문제의 중요도에 따라 설계자가 결정해주는 값으로 1.0으로 취하여 사용하면 구한 최적해는 극히 일부의 설계 영역에서 불용영역으로 포함된다. 그러나 보다 더 보수적인 설계를 위해서는 그 이상의 값을 취하여 사용할 수 있다. 그러나  $k_j$ 를 증가시키면 구한 강건해가 불용영역에 존재할 가능성은 감소하지만 목적함수값이 증가하는 단점이 있으므로 문제의 중요도에 따라 적절한 계수의 선정이 필요하다. 벌칙계수  $k_j$ 의 고찰은 구조설계 문제를 통하여 검토하였다.

부문제 작성시 제한조건은 다음과 같은 미분치를 갖는다.

$$\frac{\partial g_{newj}}{\partial x_i} = \frac{\partial g_j}{\partial x_i} + k_j \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial^2 g_j}{\partial x_i \partial x_i} \right| \Delta x_i \quad (11)$$

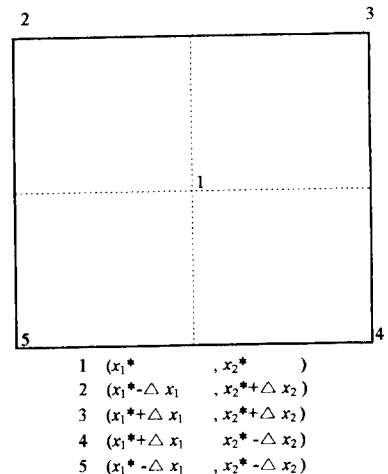


Fig. 4 Possible region of optimum in a two dimensional problem

식 (11)에서 우항의 두번째 항은 설계변수에 대한 이계 미분치가 요구된다. 구조설계 문제에서는 제한조건이 변위, 응력 또는 고유진동수 등이 될 수 있으므로 이계 미분치 값을 구하기 위해서는 많은 시간이 소요되며, 프로그램 자체가 비효율적이 되므로 이 계산이 필요없는 알고리즘이 필요하다. 본 연구에서는 식 (10)의 둘째 항을 상수로 취급하여 제한조건에 대한 미분치를 다음과 같이 구한다.

$$\frac{\partial g_{newj}}{\partial x_i} = \frac{\partial g_j}{\partial x_i} \quad (12)$$

제한조건에 대한 미분값 계산시 식 (11)을 식 (12)로 근사화시켰으므로 방향벡터를 구하는데 오차를 포함하고 있지만 제한조건함수의 정의시 벌칙항을 부가하였으므로 제한조건함수의 가용성을 만족하는 데는 문제가 없다.

### 3. 강건 최적설계의 정식화

앞의 수식들을 기초로 하여 식 (1)의 문제를 강건설계에 대한 최적화과정으로 정식화하면 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\begin{aligned} \text{Minimize } \Phi(x) &= \alpha \cdot \frac{\mu_f}{\mu_f^*} + (1-\alpha) \cdot \frac{\sigma_f}{\sigma_f^*} \\ 0 &\leq \alpha \leq 1 \\ \text{Subject to } g_{newj} &= g_j + k \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial g_j}{\partial x_i} \right| \Delta x_i \\ j &= 1, \dots, m \\ x_i &\leq x_i \pm \Delta x_i \leq x_u \end{aligned} \quad (13)$$

여기서, 제한조건함수에서 벌칙계수는 각 제한조건 함수에 대하여 동일하게  $k$ 로 선정하였다. 그리고 위의 문제에 대한 부문제는 다음과 같이 작성된다.

$$\begin{aligned} \text{Find } \delta x \\ \text{Minimize } \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \delta x_i \\ \text{Subject to } g_j + k \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial g_j}{\partial x_i} \right| \Delta x_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial g_j}{\partial x_i} \cdot \delta x_i \\ j = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (14)$$

여기서,  $\delta x$ 는 최적설계의 한 반복진행(one iteration)에서 구해지는 방향벡터이다.

### 4. 예제 및 검토

지금까지의 이론에 근거하여 설계변수의 공차영

역을 고려한 강건 최적설계의 타당성을 검증하기 위하여 수학적 예제, 3바(three-bar) 트리스와 2부재(two-member) 프레임의 설계문제를 예시하였다. 수학적 문제 및 2부재 프레임의 설계에 대해서는 식 (13)에서 가중치를 변화시키면서 평균 및 분산을 모두 고려한 다중목적함수를 이용하였다. 반면에 3바 트리스설계문제에서는 중량의 분산이 상수로 취급되므로 식 (13)의 다중목적함수는 평균인원래 목적함수만을 이용하였다. 3바 트리스문제에서는 공차영역을 변화시키면서 이에 따른 목적함수의 변화를 고찰하였으며, 3바 트리스 및 2부재 프레임 문제에 대하여 벌칙계수  $k$ 를 변화시키면서 제한조건에 대한 가용성을 검토하였다. 모든 최적해는 IDESIGN<sup>(14)</sup>의 반복이차계획 프로그래밍(recursive quadratic programming)을 이용하여 구하였다.

#### 4.1 수학적 문제

제시된 강건설계의 가지적인 효과를 검토하기 위하여 다음과 같은 수학적 문제를 선정하였다.

$$\begin{aligned} \text{Minimize } f(x_1, x_2) &= 12 + x_1^2 + \frac{1+x_2^2}{x_1^2} \\ &\quad + \frac{x_1^2 x_2^2 + 100}{(x_1 x_2)^4} \\ \text{Subject to } -\frac{5}{3}x_1 - x_2 + 5 &\leq 0, \quad 0 \leq x_1 \leq 10 \\ &\quad 0 \leq x_2 \leq 10 \end{aligned} \quad (15)$$

강건설계를 위한 식 (13)의 다중목적함수에서 평균 및 표준편차는 식 (3), (4)의 수치적분법을 이용하

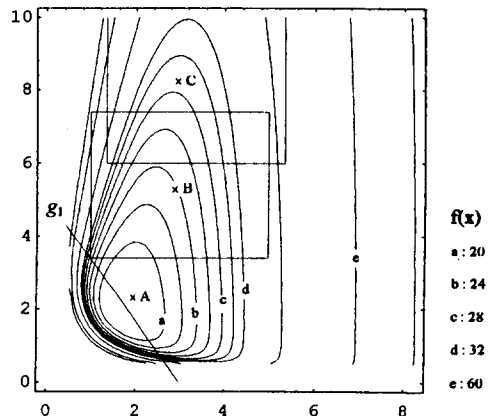


Fig. 5 Contourplot of Eq. (15)

여 구해졌으며 설계변수의 확률밀도함수는 정규분포로 가정하였다. Fig. 5는 목적함수의 등고선 및 제한조건함수를 표시하고 있다. 식 (15)로 구성되는 최적화문제에서는 Fig. 5의 점 A인  $x^*=[1.7638, 2.0604]^T$ 의 해를 갖고 있지만 설계변수의 변동을 고려하면 이외는 다른 해가 산출될 가능성이 있다. 설계변수의 최악조건  $\Delta x$ 를 1.0 및 2.0으로 변화시키면서 강건해를 산출하였다. Table 1 및 Table 2는 각각의  $\Delta x$ 에 대하여 가중치를 변화시키면서 강건해를 구한 결과이다. 가중치가 증가함에 따라, 즉 목적함수의 표준편차는 평균을 많이 고려할수록 목적함수가 감소하지만 함수의 분포가 산포되는 경향을 보이고 있다.  $\Delta x=[1.0 \ 1.0]^T$ 인 경우의 강건해는  $\Delta x=[2.0 \ 2.0]^T$ 인 경우의 강건해보다 기존의 최적해와 근접하고 있는데 이것은 목적함수 분포의 산포도가 감소했기 때문이다.  $\Delta x$ 가 감소할수록 강건해는 기존의 최적해와 근접하는 경향이 있으며 강건설계의 의미는 축소된다.  $\Delta x=[2.0 \ 2.0]^T$ 인 경우에 가중치가 1, 0일 때의 강건해를 각각 점 B, C로 Fig. 5에 표시하였다. 그림에 표시한 바와 같이 설계변수가 최적해에서  $\pm 2.0$ 의 변화량을 갖지만 초기에 설정된 제한조건을 만족하고 있다. 또한 이 예제에서는 벌칙계수  $k$ 를 1.0으로 설정하였으며 이 값을 이용해도 제한조건을 만족하고 있다. 이는 식 (15)의 제한조건이 활성화제한조건으로 나타나는데 이 함수는 선형함수이므로 원래의 제한조건에  $k$ 를 1.0으로 설정한 벌칙항을

이용해도 충분히 보수적인 설계가 되기 때문이다.

4.3 3바 트러스

Fig. 6과 같이 세 개의 하중조건이 3바 트러스 구조물에 작용할 때 단면적  $A_1, A_2, A_3$ 를 결정하는 문제이다. 기존의 최적화과정에서 정식화는 다음과 같이 표시할 수 있으며, 자세한 풀이과정은 참고문헌 (11)에 수록되어 있다.

Minimize Weight ( $A_1, A_2, A_3$ )

Subject to  $\frac{\sigma_i}{\sigma_{all}} - 1.0 \leq 0.0$

$-\frac{F_i l_i^2}{\pi^2 E A_i} - 1.0 \leq 0.0$

$\frac{u_i}{u_{all}} - 1.0 \leq 0.0$

$\frac{v_i}{v_{all}} - 1.0 \leq 0.0, i=1, 2, 3$

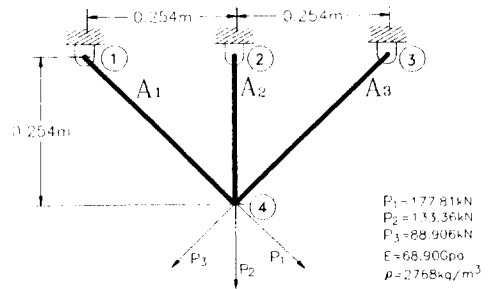


Fig. 6 Three-bar truss

Table 1 Robust optimum and its robustness with  $\Delta x=[1.0 \ 1.0]^T$

$\alpha$	x	$\mu_i^*$	$\sigma_i^*$
0.0	2.2348, 3.9420	20.6030	0.8535
0.5	2.2397, 3.9338	20.5943	0.8536
1.0	2.3839, 3.6935	20.4752	0.9694

Table 2 Robust optimum and its robustness with  $\Delta x=[2.0 \ 2.0]^T$

$\alpha$	x	$\mu_i^*$	$\sigma_i^*$
0.0	3.3297, 8.0000	30.1194	2.7716
0.5	2.9476, 5.4206	25.2522	2.7988
1.0	2.9619, 5.3968	25.2509	2.8019

Table 3 Constraints imposed on three-bar truss

Constraint No.	Loading case	Response type
1-3	1	Stress
4-6	2	Stress
7-9	3	Stress
10-12	1	Buckling
13-15	2	Buckling
16-18	3	Buckling
19-20	1	Displacement
21-22	2	Displacement
23-24	3	Displacement
25	.	Frequency

$$\frac{f_1}{f_{au}} - 1.0 \geq 0.0$$

$$6.4516 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \leq A_i \leq 6.4516 \times 10^{-3} \text{ m}^2 \quad (16)$$

여기서,  $\sigma_i$ ,  $u_i$ ,  $v_i$ ,  $f_i$ 는 각각 부재에 작용하는 응력, 절점 4의 수직방향과 수평방향 변위 및 1차 고유진동수,  $F_i$ 와  $l_i$ 는 각각 부재에 작용하는 반력 및 길이,  $E=68.902 \text{ Gpa}$ 로서 재료의 탄성계수들의 의미한다.  $\sigma_{au}$ 은 1, 3번 부재에 대해서는  $34.450 \text{ Mpa}$ , 2번 부재에서는  $137.804 \text{ Mpa}$ 이며,  $u_{au}$ ,  $v_{au}$ ,  $f_{au}$ 은 각각  $0.127 \times 10^{-3} \text{ m}$ ,  $2500 \text{ Hz}$ 이다. Table 3은 부과된 제한조건의 순서를 표시한 것이다. 식 (16)의 정식화에 의한 최적해는  $x^*=[5.346 \times 10^{-3} \text{ m}^2, 7.719 \times 10^{-3} \text{ m}^2, 3.713 \times 10^{-3} \text{ m}^2]$ 이지만 설계변수의 공차를 고려한 강건설계를 수행하면 이와는 다른 해가 산출된다. Fig. 7은 벌칙계수  $k=$

1.0으로 하여 공차영역을  $\Delta x=[6.4516 \times 10^{-5} \text{ m}^2, 6.4516 \times 10^{-5} \text{ m}^2, 6.4516 \times 10^{-5} \text{ m}^2]^T$  부터  $\Delta x=[6.4516 \times 10^{-4} \text{ m}^2, 6.4516 \times 10^{-4} \text{ m}^2, 6.4516 \times 10^{-4} \text{ m}^2]^T$ 까지 변화시키면서 산출된 강건해에서의 목적함수인 중량을 표시한 것이다. 공차영역이 증가할수록 제한조건을 만족시키기 위하여 최적해에서의 중량이 증가하고 있다. 즉, 제한조건함수에 벌칙항이 추가되어 가용영역이 감소되어 발생하는 현상이다. Table 4는  $\Delta x=[6.4516 \times 10^{-5} \text{ m}^2, 6.4516 \times 10^{-5} \text{ m}^2, 6.4516 \times 10^{-5} \text{ m}^2]^T$ 인 경우에 벌칙계수  $k$ 를 1.0에서 1.5까지 변화시키면서 구한 강건해 및 그때의 목적함수인 중량을 표시한 것이다. 벌칙계수가 증가할수록 중량도 동시에 증가하지만 공차영역을 고려한 강건해가 가용영역안에 있을 가능성은

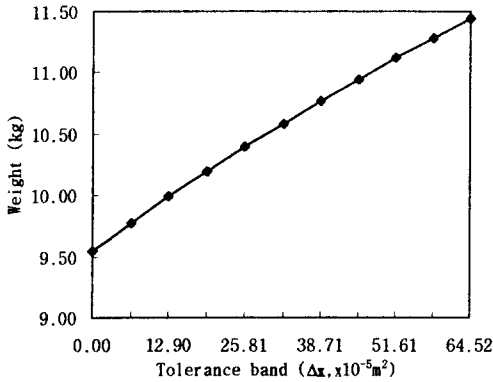


Fig. 7 Tolerance band vs. weight (three-bar truss)

Table 4 Robust optimum with varying k(three-bar turss)

k	$A_1^*$	$A_2^*$	$A_3^*$	$f^*$ (kg)
	( $\times 10^{-3} \text{ m}^2$ )			
1.0	5.410	0.789	3.865	9.777
1.1	5.416	0.791	3.880	9.799
1.2	5.422	0.792	3.895	9.821
1.3	5.428	0.794	3.910	9.842
1.4	5.434	0.795	3.925	9.864
1.5	5.440	0.797	3.940	9.886

Table 5 Worst case and feasibility with conventional optimum(three-bar truss)

Case	Design variable			Constraint feasibility constraint No.		
	$A_1$	$A_2$	$A_3$	19	22	25
1	$A_1 - \Delta A_1$	$A_2 - \Delta A_2$	$A_3 - \Delta A_3$	0.0110✓	0.0299✓	-0.0014✓
2	$A_1 - \Delta A_1$	$A_2 - \Delta A_2$	$A_3 - \Delta A_3$	0.0063✓	0.1286✓	0.0065
3	$A_1 - \Delta A_1$	$A_2 + \Delta A_2$	$A_3 - \Delta A_3$	0.0157✓	-0.0047	-0.0011✓
4	$A_1 - \Delta A_1$	$A_2 + \Delta A_2$	$A_3 + \Delta A_3$	0.0110✓	-0.0205	0.0063
5	$A_1 + \Delta A_1$	$A_2 - \Delta A_2$	$A_3 - \Delta A_3$	-0.0118	0.0212✓	-0.0070✓
6	$A_1 + \Delta A_1$	$A_2 - \Delta A_2$	$A_3 + \Delta A_3$	0.0150	0.0047✓	0.0010
7	$A_1 + \Delta A_1$	$A_2 + \Delta A_2$	$A_3 - \Delta A_3$	-0.0063	-0.0118	-0.0064✓
8	$A_1 + \Delta A_1$	$A_2 + \Delta A_2$	$A_3 + \Delta A_3$	-0.0110	-0.0283	0.0012



높아진다.

식 (16) 으로부터 구해진 최적해는 설계변수의 공차영역을 고려하면 초기에 설정된 제한조건함수를 위배할 수 있다. Table 5는 기존의 최적해에서 설계변수의 공차영역인  $\Delta x = [6.4516 \times 10^{-5} \text{ m}^2, 6.4516 \times 10^{-5} \text{ m}^2, 6.4516 \times 10^{-5} \text{ m}^2]^T$  을 고려하여 나타날 수 있는 최악조건의 조합을 표시하고 있다. 설계변수의 수가 3개이므로 공차영역을 고려한 최악조건의 조합의 수는  $2^3=8$ 이다. 그리고 Table 3의 제한조건중 활성화제한조건으로 판명된 제한조건번호 19, 22, 25번에 대하여 가용성을 표시하였다.  $\checkmark$  표시는 제한조건함수를 위배하는 경우이다. 결정론적 방법으로 구한 최적해는 설계변수가 실제로 분포의 형태로 존재한다면 사용할 수 없다. Table 6은 벌칙계수가 1.0인 경우에 강건해에서 공차영역을 고려함으로써 제한조건에 대한 가용성을 표시한 것이다. Table 6의 8가지 최악조건에서 제한조건을 위배하는 경우는 4가지로서 Table 5의 기존 최적해에 관한 7가지보다 많이 감소했으며 그 위배량도 매우 미소하다. 제한조건함수의 미소 위배량은 식 (14)의 벌칙계수를 1.0보다 크게 설정함으로써 해결이 가능하다. Fig. 8은 벌칙계수를 변화시키면서 제한조건번호 19, 22, 25번에 대한 가용성을 표시한 것이다. 벌칙계수가 증가함에 따라 제한조건함수의 강건성이 보다 더 잘 만족하고 있음을 알 수 있다. 그러나 Table 4에서와 같이 벌칙계수의 증가는 원래목적함수의 증가를 가져오므로 적절한 벌칙계수의 선정이 요구된다.

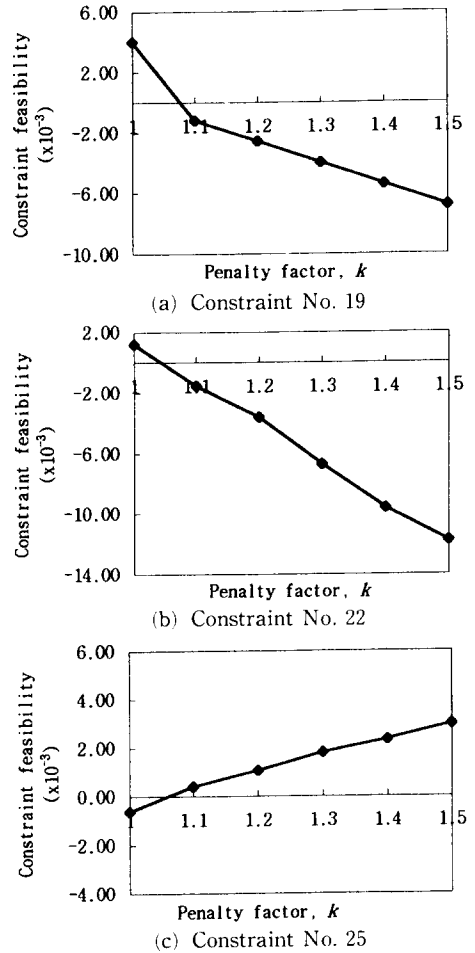


Fig. 8 Feasibility depending on k (three-bar truss)

Table 6 Worst cases and feasibility with robust optimum (k=1.0, three-bar turss)

Case	Design variable			Constraint feasibility constraint No.		
	A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	A <sub>3</sub>	19	22	25
1	A <sub>1</sub> - ΔA <sub>1</sub>	A <sub>2</sub> - ΔA <sub>2</sub>	A <sub>3</sub> - ΔA <sub>3</sub>	-0.0040	0.0012✓	0.0052
2	A <sub>1</sub> - ΔA <sub>1</sub>	A <sub>2</sub> - ΔA <sub>2</sub>	A <sub>3</sub> + ΔA <sub>3</sub>	-0.0074	-0.0146	0.0126
3	A <sub>1</sub> - ΔA <sub>1</sub>	A <sub>2</sub> + ΔA <sub>2</sub>	A <sub>3</sub> - ΔA <sub>3</sub>	0.0004✓	-0.0320	0.0050
4	A <sub>1</sub> - ΔA <sub>1</sub>	A <sub>2</sub> + ΔA <sub>2</sub>	A <sub>3</sub> + ΔA <sub>3</sub>	-0.0040	-0.0458	0.0120
5	A <sub>1</sub> + ΔA <sub>1</sub>	A <sub>2</sub> - ΔA <sub>2</sub>	A <sub>3</sub> - ΔA <sub>3</sub>	-0.0256	-0.0068	-0.0002✓
6	A <sub>1</sub> + ΔA <sub>1</sub>	A <sub>2</sub> - ΔA <sub>2</sub>	A <sub>3</sub> + ΔA <sub>3</sub>	-0.0290	-0.0226	0.0073
7	A <sub>1</sub> + ΔA <sub>1</sub>	A <sub>2</sub> + ΔA <sub>2</sub>	A <sub>3</sub> - ΔA <sub>3</sub>	-0.0212	-0.0380	-2.8E-5✓
8	A <sub>1</sub> + ΔA <sub>1</sub>	A <sub>2</sub> + ΔA <sub>2</sub>	A <sub>3</sub> + ΔA <sub>3</sub>	-0.0250	-0.0540	0.0071

4.3 2부재 프레임

Fig. 9와 같이 하중이 작용하는 구조물에서 단면의 너비( $w$ ), 높이( $h$ ) 및 두께( $t$ )를 결정하는 문제이다.<sup>(11)</sup> 각 부재의 너비, 높이 및 두께는 서로 동일하다. 목적함수는 식 (13)과 같이 중량의 평균과 표준편차로 구성되는 다중목적함수이며 제한조건은 각 부재에 작용하는 복합응력이다. 기존의 최적화 과정에서 정식화는 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\begin{aligned} & \text{Minimize Weight}(w, h, t) \\ & \text{Subject to } \frac{1}{\sigma_{ait}^2} (\sigma^2 + 3\tau^2) - 1.0 \leq 0 \\ & 6.35 \times 10^{-2} \text{ m} \leq w \leq 2.54 \times 10^{-1} \text{ m} \\ & 6.35 \times 10^{-2} \text{ m} \leq h \leq 2.54 \times 10^{-1} \text{ m} \\ & 2.54 \times 10^{-3} \text{ m} \leq t \leq 2.54 \times 10^{-2} \text{ m} \end{aligned} \quad (17)$$

여기서,  $\sigma_{ait}^2$ 은 허용응력으로 275.6 Mpa이며  $\sigma^2$ 은 굽힘응력,  $\tau^2$ 은 비틀림응력을 표시한다. 기존의 최적해는  $x^* = [w \ h \ t]^T = [0.198 \text{ m} \ 0.254 \text{ m} \ 0.00254 \text{ m}]^T$ 로서 자세한 풀이과정은 참고문헌 (11), (15)에 수

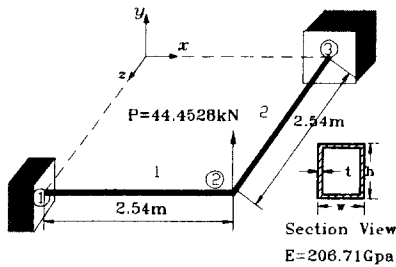


Fig. 9 Two-member frame

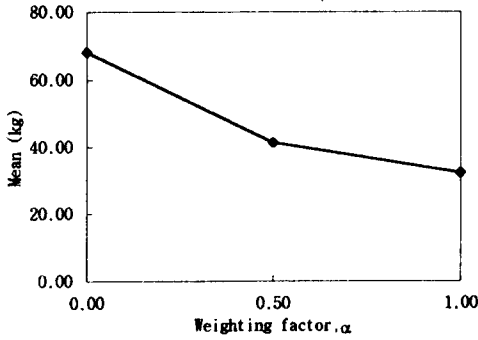
Table 7 Worst cases and feasibility with conventional optimum (two-member frame)

Case	Design variable			Constraint feasibility
	w	h	t	
1	w - Δw	h - Δh	t - Δt ✓	0.1330 ✓
2	w - Δw	h - Δh	t + Δt	-0.0670
3	w - Δw	h + Δh	t - Δt ✓	0.1099 ✓
4	w - Δw	h + Δh	t + Δt	-0.0861
5	w + Δw	h - Δh	t - Δt ✓	-0.1054
6	w + Δw	h - Δh	t + Δt	-0.0898
7	w + Δw	h + Δh	t - Δt ✓	0.0831 ✓
8	w + Δw	h + Δh	t + Δt	-0.1083

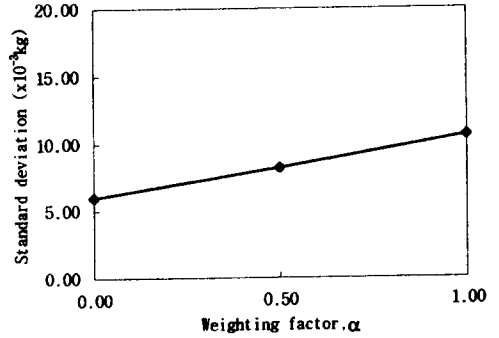
록되어 있다. 그러나 설계변수의 공차영역을 고려한다면 이와는 다른 최적해가 산출될 것이며 보수적인 해를 구할 수 있다. Table 7은 기존의 최적해가 공차영역,  $\Delta x = [2.54 \times 10^{-3} \text{ m}, 2.54 \times 10^{-3} \text{ m}, 2.54 \times 10^{-4} \text{ m}]^T$ 를 가질 경우의 제한조건함수의 가용성을 나타낸 것이다. ✓ 표시는 3바 트러스의 경우와 마찬가지로 제한조건함수를 위배하는 경우이다. 또한 설계변수  $t$ 의 열에 ✓ 표시는 부가제한조건을 위배하는 경우이다. 따라서 설계변수가 분포를 갖고 있다면 공차영역을 고려한 강건설계가 요구되는 문제이다. Table 8은  $\Delta x = [2.54 \times 10^{-3} \text{ m}, 2.54 \times 10^{-3} \text{ m}, 2.54 \times 10^{-4} \text{ m}]^T$ 인 경우에 벌칙계수  $k=1.0$ 으로 하여, 식 (2)의 다중목적함수에서 가중치  $\alpha$ 를 0.0, 0.5 및 1.0으로 변화시키면서 강건해를 구한 것이다. 여기서, 다중목적함수를 위한 평균 및 표준편차는 식 (3), (4)의 수치적분 및 식 (6), (7)의 테일러 급수전개를 이용하여 각각의 강건해를 비교하였다. 수치적분을 이용하여 구한 해를 임의대로 간주하고 이것과 테일러급수전개를 이용하여 구한 해를 비교하면 그 오차는 매우 작다. 이것은 보의 중량이 단면을 구성하는 설계변수에 대하여 비선형성이 크지 않음을 의미한다. 따라서 목적함수로서 중량이 아닌 다른 반응치 또는 물리량이 설정된다면 평균 및 표준편차로서 식 (6), (7)을 사용하기 전에 목적함수의 설계변수에 대한 비선형성이 검토되어야 한다. Fig. 10은 동일한 공차영역에서 가중치의 변화에 따른 강건해에서의 평균 및 표준편차를 표시한 것이다. 가중치가 증가함에 따라 중량의 평균은 감소하지만 표준편차는 증가하고 있으며, 반대로 가중치가 감소하면 표준편차가 감소하는 대신 평균이 증가하고 있다. 이것은 다중목적함수의 특징으로서 문제의 성격에 따라 적

Table 8 Comparisons of numerical integration and Taylor's series for robust solution (two-member frame)

$\alpha$	Robust optimum ( $\times 10^{-3} \text{ m}$ )					
	Numerical integration			Taylor series		
	w*	h*	t*	w*	h*	t*
0.0	198.90	253.75	2.565	198.90	253.75	2.565
0.5	127.09	228.85	4.218	127.09	228.84	4.218
1.0	85.24	156.54	11.04	85.24	156.54	11.04

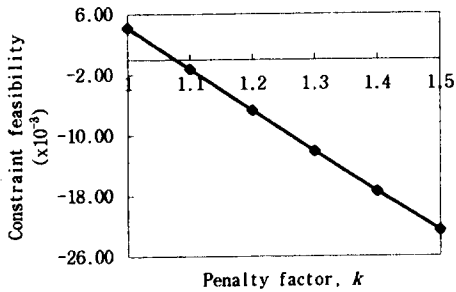


(a) Weighting factor vs mean

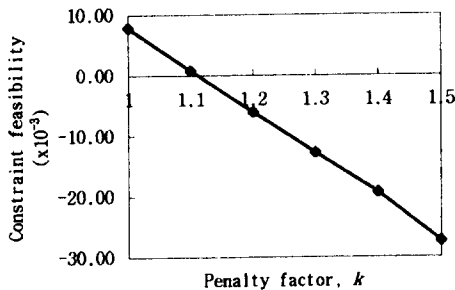


(b) Weighting factor vs standard deviation

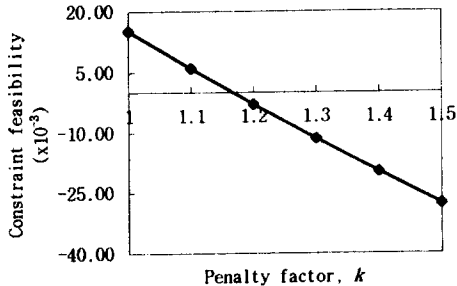
Fig. 10 Weighting factor vs. mean and standard deviation of weight (two-member frame)



(a)  $\alpha=0.0$



(b)  $\alpha=0.5$



(c)  $\alpha=1.0$

Fig. 11 Feasibility depending on  $k$  (two-member frame)

절한 가중치의 선정이 필요하다. Fig. 11은 각각의 가중치에 대하여 벌칙계수의 변화에 따른 제한조건 함수의 가용성을 표시한 것이다. 벌칙계수가 증가함에 따라 제한조건함수의 강건성도 동시에 증가함을 알 수 있다.

### 5. 결 론

공차영역 등의 최악조건을 고려하여 개발된 강건 최적설계를 통해 목적함수 및 제한조건에 대한 강건성을 정의하였으며 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 설계변수가 공차 등의 변동을 갖고 있을 때 목적함수 및 제한조건함수가 설계변수의 변동에 강건하도록 하는 해를 구할 수 있는 방법을 개발하였다.

(2) 제시된 방법을 이용하면 기존의 최적해에 대한 후처리를 이용하지 않고 일단계(one-stage)에서 강건해를 구할 수 있는 장점이 있다.

(3) 구조문제에서 설계변수의 공차영역 또는 분포형태가 주어지면 이것의 입력으로 쉽게 강건해를 구할 수 있다. 또한 구조문제에서 시간소비가 많은 변위, 응력 및 고유진동수의 제한조건에 대한 이계 미분치를 구하지 않고도 강건해의 산출이 가능하였다.

(4) 실제문제의 중요도에 따라 벌칙계수의 선정이 필요하며 이것을 이용하여 설계의 보수성을 결정할 수 있다.

### 참고문헌

(1) Lee, K. H., Eom, I. S., Park, G. J. and Lee, W.

- I., 1996, "Robust Design for Unconstrained Optimization Problems Using Taguchi Method," *AIAA Journal*, Vol. 34, No. 5, pp. 1059~1063.
- (2) 이권희, 엄인섭, 박경진, 이완익, 1994, "제한 조건이 없는 최적화 문제의 강건설계에 관한 연구," 대한기계학회논문집, 제18권, 제11호, pp. 2825~2836.
- (3) Park, G. J., Hwang W. J. and Lee, W. I., 1994, "Structural Optimization Post-Process Using Taguchi Method," *JSME International Journal*, Series A, Vol. 37, pp. 166~172.
- (4) Phadke, M. S., 1989, *Quality Engineering Using Robust Design*, Prentice Hall.
- (5) Balling, R. J., Free, J. C. and Parkinson, A. R., 1986, "Consideration of Worst-Case Manufacturing Tolerances in Design Optimization," *Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design*, Transactions of the ASME, Vol. 108, pp. 438~441.
- (6) Bennet, J. A. and Lust, R. V., 1990, "Conservative Methods for Structural Optimization," *AIAA Journal*, Vol. 28, No. 8, pp. 1491~1496.
- (7) Ramakrishnan, B. and Rao, S. S., 1991, "A Robust Optimization Approach Using Taguchi's Loss Function for Solving Nonlinear Optimization Problems," *ASME, DE*-Vol. 32-1, pp. 241~248.
- (8) 이종원, 김추호, 1994, "다구제방법을 이용한 컴퓨터원용 강건설계기법의 개발," 대한기계학회 논문집, 제18권, 제2호, pp. 278~291.
- (9) Parkinson, A. R., 1995, "Robust Mechanical Design Using Engineering Models," *Journal of Mechanical Design*, Transactions of the ASME Vol. 117, Jun., pp. 48~54.
- (10) Chao, L. P., Gandhi, M. V. and Thompson, B. S., 1993, "A Design-for-Manufacturing Methodology for Incorporating Manufacturing Uncertainties in the Robust Design of Fibrous Laminated Composite Structures," *Journal of Composite Materials*, Vol. 27, No. 2, pp. 175~194.
- (11) Arora, J. S., 1989, *Introduction to Optimum Design*, McGraw-Hill.
- (12) Mood, A. M., Grabill, F. A. and Boes, D. C., 1974, *Introduction to the Theory of Statistics*, McGraw-Hill.
- (13) Sundaresan, S., Ishii, K. and Houser, D. R., 1995, "A Robust Optimization Procedure with Variations on Design Variables and Constraints," *Engineering Optimization*, Vol. 24, No. 2, pp. 101~117.
- (14) Arora, J. S. and Thanedar, P. B., 1985, *IDESIGN Manual Ver. 3.3*, Optimal Design Laboratory, The University of Iowa.
- (15) Haug, E. J. and Arora, J. S., 1979, *Applied Optimal Design*, John Wiley and Sons, pp. 245~248.