

<논 문>

박판 탄성구조물의 최적해석을 위한 계층적 모델에 관한 연구

조진래*

(1996년 9월 22일 접수)

A Study of Hierarchical Models for the Optimal Analysis of Thin Elastic Structures

Jin-Rae Cho

Key Words : Plate-like(판재와 같은), Shell-like(셸과 같은), Hierarchical Model(계층적 모델), Classical Theory(전통적 이론), Model Limit(모델 극한), Modeling Error(모델링 오차)

Abstract

In the analysis of thin elastic structures such as plate and shell-like structures, classical lower-order theories like Kirchhoff and Reissner-Mindlin theories are insufficient to describe the behavior of such structures in the region where the state of stresses is complex. On the other hand, the fully three dimensional theory of linear elasticity can provide desired analysis accuracy, but requires expensive computational implementation compared to the classical theories. This paper is concerned with the development of hierarchical models for elastic structures which can be used for hierarchical modeling for the analysis of such structures. Derivation and limit model analysis (when the thickness of structures tends to zero) of hierarchical models are presented together with a introduction of modeling error estimation. Also, numerical results supporting theoretical results are given.

1. 서론

판재나 셸과 같은 구조물(plate and shell-like structures)의 두께는 나머지 두 방향으로의 길이에 비해 상대적으로 매우 작다. 이러한 기하학적인 특성 때문에 변위나 응력 등의 두께방향으로의 변화를 저차 다항식으로 근사시켜 왔다. 이에 따라 3차원 이론보다 해석이 용이한 2차원 문제로 차원(dimension)이 감소된다. 이러한 전통적인 저차 이론은 오랫동안 구조해석에 성공적으로 사용되어 왔을 뿐만 아니라, 구조물을 위한 이론의 기초가

되어왔다.

하지만 이런 저차 이론은 때때로 두께방향으로 복잡한 응력상태를 지닌 경계나 다른 물체들과의 연결부 등에서의 해석에는 충분하지 않다. 따라서 이런 영역에서는 3차원 이론이나 고차이론을 필요로 한다. 전통적인 저차이론이 해석상 용이하고 간편하지만 특정한 영역에서 정확도가 떨어지는 단점이 있는 반면, 3차원 이론은 정확도는 높지만 대부분의 경우 필요 이상으로 많은 자유도(degree of freedom)를 요하는 단점이 있다.

이러한 문제점을 해결하기 위하여 요구하는 해석의 정확도를 최적으로 충족시켜줄 수 있는 모델개발에 대한 연구가 1990년대 전후로 하여 소개되기 시작하였다.^(1~5) 이러한 새로운 모델링기법은 계층

*회원, 부산대학교 기계공학부

적 모델링(hierarchical modeling)이라 불리는데, 이 기법은 주어진 문제에 대하여 요구되는 해석의 정확도를 만족시키기 위한 각 영역에서의 최적의 계층적 모델(optimal hierarchical models)을 선정한다. 계층적 모델에 대해서는 다음 절에서 상세히 논의되겠지만 탄성구조물에 있어서 각 모델은 두께 방향으로의 변위장의 차수로 구분된다.

따라서 여러 다른 수준의 모델들이 한 문제 영역 속에서 혼합적으로 사용되고, 선정된 모델의 적합성 여부는 독립된 판단방법에 의하여 결정된다. 모델의 수준이 높아지면 정확도는 높아지는 반면 고가의 해석이 된다.

본 논문의 관재나 셸과 같은 탄성구조물 해석에 계층적 모델링을 적용하기 위하여 필요한 계층적 모델의 유도, 그 특성 그리고 모델링 오차에 대하여 살펴보고자 한다.

2. 계층적 모델의 정의

계층적 모델의 개념을 소개하기 위하여 Fig. 1과 같은 균질 등방성 탄성체(homogeneous isotropic elastic bodies)를 고려한다. 여기서, 곡선 직교좌표계(orthogonal curvilinear coordinate system) $\theta = (\theta^1, \theta^2, \theta^3)$ 를 사용하기로 한다(θ^1, θ^2 : 주곡률방향, θ^3 : 중립면에 수직방향). 이러한 물체에 대한 3차원 선형 탄성이론에 따른 정해(exact solution)를 $u_{EX}(\theta)$ 로 표시하기로 한다.

그림과 같이 두께가 상대적으로 매우 작은 구조물에 대하여, 전통적으로 변위장은 두께방향으로의 변위가 $P_i(\theta^3)$ 차 다항식으로 표현되는 고차이론(higher-order theories)으로 근사화되어 왔다.

$$u_i^q(\theta^1, \theta^2, \theta^3) = \sum_{l=0}^q U_l^i(\theta^1, \theta^2) P_l(\theta^3), \quad i=1, 2, 3 \quad (1)$$

변위성분들의 두께방향으로의 다항식들의 최고차수 $q = (q_1, q_2, q_3)$ 를 매개변수로 하여 구성되는 무한개의 모델들을 계층적 모델집단(family of hierarchical models)으로 정의하고, 식 (2)와 같이 표현하기로 한다. 집단내 최저차 모델 M_1 은 Kirchhoff 이론 M_K 이고(셸의 경우는 Kirchhoff-Love 이론), 최고차 모델 M_∞ 은 3차원 선형 탄성이론 u_{EX} 이다.

$$F_H = \{ M_q : M_1 = M_K, \quad q=1, 2, \dots, \infty \} \quad (2)$$

이러한 계층적 모델집단이 정규집단(regular

family)이 되기 위해서는 다음의 조건을 만족해야 한다.

(1) 모든 계층적 모델 $M_q \in F_H$ 에 대한 변위장 u^q 는 외부하중과 경계조건에 대해서 유일하게 결정될 수 있어야 한다.

$$\lim_{d \rightarrow 0} \|u_{EX} - u^q\|_{E(\Omega)} = 0, \quad \forall q \quad (3)$$

(3) 만약 정해 u_{EX} 가 충분히 매끄러운(smooth) 함수라면, 다음 조건식 (4)가 성립해야 한다($0 < \bar{d} < 1$, \bar{d} ~구조물의 특성길이로 보정(scaling)된 두께).

$$\|u_{EX} - u^q\|_{E(\Omega)} \leq C_q \bar{d}^{\alpha(q)}, \quad \alpha(q+1) > \alpha(q) \quad (4)$$

여기서, C_q 는 q 의 함수이고, 에너지 기준(energy norm) $\|u\|_{E(\Omega)}$ 는 $\sqrt{2U(u)}$ 로 정의된다($U(u)$ ~변형 에너지(strain energy)). 단, 조건 (2)는 전 영역에 대한 총체적 의미(global sense)로, 매우 좁은 경계부근에서는 경계층(boundary layer) 현상에 의하여 $u^q \rightarrow u_{EX}$ 가 성립하지 않음을 밝혀둔다.⁽⁴⁾

다른 한편 모델집단 F_H 내의 각각의 모델 M_q 에 부여되는 경계조건(boundary condition)은 최고차 모델 M_∞ (즉, 3차원 선형 탄성이론)의 경계조건과 부합해야 한다. 포인트(point) 및 라인(line)하중 및 지지(support)는 부합되지 않는 경계조건들이다.

3. 계층적 모델의 공식화

Fig. 1을 참고하여, Ω, ω 를 각각 조각별로 매

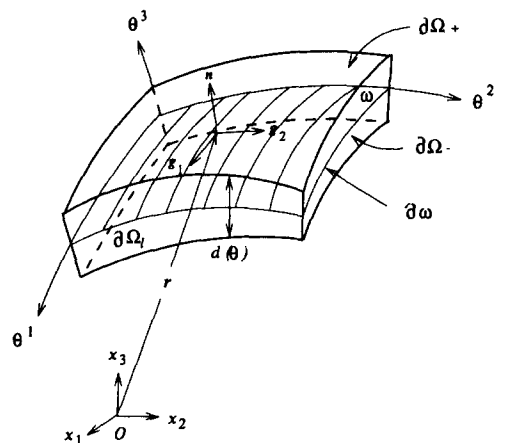


Fig. 1 Geometry of thin shell-like body

근한(piecewise continuous) 경계 $\partial\Omega$, $\partial\omega$ 를

$$\Omega = \{\theta : (\theta^1, \theta^2, \theta^3) \in \mathcal{R}^3 | (\theta^1, \theta^2) \in \omega, |\theta^3| < d/2\} \quad (5)$$

가진 열린 한정된 영역(open bounded region)으로 가정한다. 여기서, 측면경계 $\partial\Omega_i$ 와 위/아랫면 $\partial\Omega_{\pm}$ 은 다음과 같이 표기할 수 있다. 그리고 Γ_b , Γ_N 는 각각 Dirichlet 및 Neumann 경계부분을

$$\begin{aligned} \partial\Omega_i &= \{\theta \in \mathcal{R}^3 | (\theta^1, \theta^2) \in \partial\omega, |\theta^3| < d/2\} \\ \partial\Omega_{\pm} &= \{\theta \in \mathcal{R}^3 | (\theta^1, \theta^2) \in \omega, \theta^3 = \pm d/2\} \\ \partial\Omega &= \overline{\partial\Omega_i} \cup \overline{\partial\Omega_{\pm}} \end{aligned} \quad (6)$$

나타내는데, 일반적으로 판재나 셸에 있어서 외부 응력은 구조물의 위/아랫면 $\partial\Omega_{\pm}$ 에 작용하고, Dirichlet 경계는 구조물의 측면 $\partial\Omega_i$ 에만 한정된다고 가정할 수 있다. 표기의 편의를 위하여 중립면에 투영(projection)된 경계부분을 다음과 같이 표기하기로 한다.

$$\begin{aligned} \partial\Omega_b &= \{(\theta^1, \theta^2) \in \Gamma_b\} = \bar{\omega} \cap \Gamma_b \\ \partial\omega_N &= \{(\theta^1, \theta^2, 0) \in \omega | (\theta^1, \theta^2, \pm d/2) \in \Gamma_N\} \end{aligned} \quad (7)$$

미소변형하의 탄성구조물의 지배방정식은 정적 평형방정식 (8)과 변형-변위관계식 및 구성

$$\begin{aligned} \sigma^{ij}(\mathbf{u})|_j + f^i &= 0 \text{ in } \Omega \\ u^i &= 0 \text{ on } \Gamma_b, \quad i, j = 1, 2, 3 \\ \sigma^{ij}(\mathbf{u})n_j &= t^i \text{ on } \Gamma_N \end{aligned} \quad (8)$$

방정식 (9)로 구성된다.

$$\begin{aligned} \epsilon^{ij}(\mathbf{u}) &= \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \\ \sigma^{ij}(\mathbf{u}) &= E^{ijkl}\epsilon_{kl}(\mathbf{u}), \quad k, l = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (9)$$

여기서, 위첨자 및 아래첨자로 표시된 량은 각각 covariant 및 contravariant 성분을 나타내고,

$$\begin{aligned} \sigma^{ij}|_k &= \sigma_{,k}^{ij} + \sigma^{ij}\Gamma_{ki}^i + \sigma^{li}\Gamma_{ki}^l \\ u_{i;j} &= u_{i,j} - u^k\Gamma_{ij}^k \end{aligned} \quad (10)$$

미분 $\sigma^{ij}|_k$ 와 $u_{i;j}$ 의 정의는 식 (10)과 같다. Γ_{ij}^k 는 2중 Christoffel 기호이고, E^{ijkl} 는 다음의 타원조건을 만족하는 4차 tensor이다($\alpha > 0$). 기타 수학적 기호 및 정의는 참고문헌 (7)을

$$E^{ijkl}\xi_{ij}\xi_{kl} \geq \alpha\xi_{ij}\xi_{ij}, \quad \forall \xi_{ij} = \xi_{ji} \in \mathcal{R} \quad (11)$$

참조하기 바란다. 그리고 식 (8)에서, n_j 는 경계에

서 바깥방향으로의 단위벡터, f^i 는 자중, 그리고 t^i 는 외부하중을 나타낸다.

구조물의 영역은 충분히 매끄럽고(Lipschitzian), 또한 $f^i \in H^1(\Omega)$ ($H^1(\Omega) \sim$ Hilbert space), $t^i \in L^2(\Gamma_N)$ ($L^2(\Gamma_N) \sim$ square integrable function space)⁽⁶⁾라고 가정한다. 위의 3차원 경계치문제의 변분 공식화(variational formulation)를 위하여 허용 변위공간(admissible displacement space) $V(\Omega)$ 를 유한한 변형에너지($U(\mathbf{v}) < +\infty$)를 갖게끔 다음과 같이 정의한다.

$$V(\Omega) = \{\mathbf{v} \in (H^1(\Omega))^3 : \mathbf{v} = 0 \text{ on } \partial\Omega_b\} \quad (12)$$

식 (8)의 경계치 문제에 대한 변분 공식화는 다음과 같다.

식 (13)을 만족하는 $\mathbf{u} \in V(\Omega)$ 를 구하시오.

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in V(\Omega) \quad (13)$$

여기서, 쌍선형 범함수(bilinear functional) $a(\cdot, \cdot) : V(\Omega) \times V(\Omega) \rightarrow R$ 와 선형 범함수(linear functional) $l(\cdot) : V(\Omega) \rightarrow R$ 는 각각 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\omega} \int_{-d/2}^{d/2} E^{ijkl}u_{kl}v_{ij}\sqrt{g}d\theta^3d\omega \\ l(\mathbf{v}) &= \int_{\omega} f^i v_i \sqrt{g}d\theta + \int_{\Gamma_N} t^i v_i \sqrt{g}ds \end{aligned} \quad (14)$$

식 (14)에서 \sqrt{g} 는 다음과 같이 정의된다.⁽⁷⁾

$$\begin{aligned} \sqrt{g} &= \mathbf{n} \cdot (\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2) = |\mu| \sqrt{a} \\ \sqrt{a} &= \sqrt{g(\theta^3=0)} \end{aligned} \quad (15)$$

참고문헌 (8)을 참조하면, 위의 문제 식 (13)에 대하여 다음 두개의 조건식을 만족하는 두 상수 $c_1, c_2 > 0$ 가 존재하므로, $\Gamma_b \neq \emptyset$ 인 경우에 유일한 해가 존재함을 확인할 수 있다. 식 (16)에서

$$\left. \begin{aligned} (i) & |a(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq c_1 \|\mathbf{u}\|_V \|\mathbf{v}\|_V \\ (ii) & a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq c_2 \|\mathbf{v}\|_V^2 \end{aligned} \right\} \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V(\Omega) \quad (16)$$

$\|\mathbf{u}\|_V$ 에 대한 정의는 참고문헌 (6)에 따른다.

다음으로 계층적 모델을 정의하기 위하여 우선 부분공간 $V^q(\Omega) \subset V(\Omega)$ 을 다음과 같이 정의한다.

$$V^q(\Omega) = \left\{ \begin{aligned} v_i^q &= \sum_{i=0}^q V_i(\theta^1, \theta^2) P_i(\theta^3) \\ V_i &\in H^1(\omega) : V_i = 0 \text{ on } \partial\omega_b \end{aligned} \right. \quad (17)$$

여기서, $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$. 정의된 \mathbf{v}^q 를 위의 3차원

변분공식 식 (13)에 대입하면 다음과 같은 차원 축소형 변분공식화(dimensionally-reduced variational formulation)를 얻는다.

식 (18)을 만족하는 $\mathbf{u}^q \in V^q(\Omega)$ 를 구하시오.

$$a(\mathbf{u}^q, \mathbf{v}^q) = l(\mathbf{v}^q), \quad \forall \mathbf{v}^q \in V^q(\Omega) \quad (18)$$

이 경우, 식 (17)로 정의된 공간속의 함수들은 두께방향으로 해석적 적분(analytic integration)이 가능하기 때문에 식 (18)로 정의된 변분공식은 2차원 문제로 축소된다.

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}^q, \mathbf{v}^q) &= \int_{\omega} \left[\int_{-d/2}^{d/2} E^{ijkl} u_{k,i}^q v_{j,l}^q \mu |d\theta^3| \right] \sqrt{a} dw \\ l(\mathbf{v}^q) &= \int_{\omega} \left[\int_{-d/2}^{d/2} f^i v_i^q \mu |d\theta^3| \right] \sqrt{a} dw \\ &\quad + \int_{\partial \omega_N} [(t^i v_i^q \sqrt{g})^- + (t^i v_i^q \sqrt{g})^+] dw \end{aligned} \quad (19)$$

식 (18)를 정의된 문제에 대해서도 $V^q(\Omega)$ 가 $V(\Omega)$ 의 닫힌부분공간(closed subspace)이므로 유일한 해가 존재한다.

변분공식화 (19)에 대한 해 \mathbf{u}^q 는 식 (13)의 해, 즉 3차원 선형 탄성이론에 따른 해 $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{EX}$ 에 대한 근사해로서, 수학적으로 내적 $a(\cdot, \cdot)$ 에 대한 정해 \mathbf{u} 의 $V^q(\Omega)$ 공간으로의 투영(projection)으로 정의된다.⁽⁹⁾

$$a(\mathbf{u} - \mathbf{u}^q, \mathbf{v}^q) = 0, \quad \forall \mathbf{v}^q \in V^q(\Omega) \quad (20)$$

여기서, 모델차수 $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$ 를 가진 \mathbf{u} 의 근사해 $\mathbf{u}^q = (u_1^{q1}, u_2^{q2}, u_3^{q3})$ -계층적 모델로 정의한다.

4. 극한해석

본 절에서는 구조물의 두께가 0으로 접근할 때, 각 계층적 모델의 극한을 살펴본다. 판재의 경우 기준극한(reference limit)은 Kirchhoff판 이론이고, 셸의 경우는 Kirchhoff-Love 이론이 된다.

해석의 간략화를 위하여 균일한 두께를 가진 무한 평면의 판재(infinite plate)를 고려하고, (1, 1, 1)-계층적 모델을 적용한다. 하지만 이 해석과정은 고차 계층적 모델에 대해서도 일관성을 갖는다.⁽⁴⁾

$$u_i = u_i^0(x_1, x_2) + u_i^1(x_1, x_2)x_3, \quad i=1, 2, 3 \quad (21)$$

자중은 없고 균일한 외부응력 $(t_1, t_2, t_3)/2$ 이 판

재의 위/아랫면에 작용한다고 가정하면 가상일의 원리(principle of virtual work)을 적용하면 식 (22)와 같이 된다.

$$\int_{\omega} \int_{-d/2}^{d/2} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) dx_3 dw = \int_{\partial \omega_N} (\mathbf{v}^- + \mathbf{v}^+) \cdot \frac{\mathbf{t}}{2} d\omega \quad \forall \mathbf{v} \in V(\Omega) \quad (22)$$

여기서 사용되는 물질상수 행렬 $[\mathbf{E}]$ 는 부록에서와 같이 3차원 선형 탄성이론에 사용하는 물질상수이다. 식 (22)에서의 \mathbf{v} 를 식 (21)과 같은 형태를 취하여 두께방향으로 적분하면 중립면에 대한 적분식만 남게 된다. 중립면 ω 에서의 적분에 대하여 부분 적분공식을 적용하면 중립면에서의 지배방정식과 경계조건을 얻게되는데, 우리의 관심이 극한모델 해석이므로 경계조건은 여기서 고려하지 않기로 한다. 유도된 지배방정식으로부터 우선 v_1^0, v_2^0, v_3^0 에 대하여 인수추출(factoring out)을 하면 다음 식들을 얻게 되고,

$$E_1 u_{1,11}^0 + E_2 (u_{2,12}^0 + u_{3,11}^0) + E_3 (u_{1,22}^0 + u_{2,12}^0) = -\frac{t_1}{d} \quad (23)$$

$$E_1 u_{2,22}^0 + E_2 (u_{1,12}^0 + u_{3,2}^0) + E_3 (u_{1,12}^0 + u_{2,11}^0) = -\frac{t_2}{d} \quad (24)$$

$$E_3 (u_{2,2}^0 + u_{3,11}^0 + u_{1,1}^0 + u_{3,22}^0) = -\frac{t_3}{d} \quad (25)$$

한편, v_1, v_2 그리고 v_3 에 대하여 인수추출을 하면 아래의 식들이 나온다.

$$E_1 u_{1,11}^1 + E_2 u_{2,12}^1 + E_3 (u_{1,22}^1 + u_{2,21}^1) = \rho (u_1^1 + u_{3,1}^0) \quad (26)$$

$$E_2 u_{1,21}^1 + E_1 u_{2,22}^1 + E_3 (u_{1,21}^1 + u_{2,11}^1) = \rho (u_2^1 + u_{3,2}^0) \quad (27)$$

$$\rho [E_1 u_3^1 + E_2 (u_{1,1}^0 + u_{2,2}^0)] = E_3 (u_{3,11}^0 + u_{3,22}^0) \quad (28)$$

여기서, ρ 는 $12E_3/d^2$ 이다. 두께가 0로 접근하면 위의 식 (26)~(28)로부터 다음 구속조건식(constraints)을 얻는다. 조건식 (29)는 Kirchhoff 구속조건식으로 잘 알려져 있다.

$$u_\alpha^1 = -u_{3,\alpha}^0, \quad \alpha=1, 2 \quad (29)$$

$$u_3^1 = -E_2 (u_{1,1}^0 + u_{2,2}^0) / E_1 \quad (30)$$

조건식 (29)와 더불어, 식 (26), (27)에 각각 편미분 $\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2$ 을 취하여 결과식을 합하면 식 (31)을 얻는다.

$$E_1 (u_{3,111}^0 + u_{3,222}^0) + 2(E_2 + 2E_3) u_{3,1212}^0$$

$$= -\rho(u_{1,1}^0 + u_{2,2}^0 + u_{3,11}^0 + u_{3,22}^0) \quad (31)$$

식 (25)와 물질상수관계 $E_2 + 2E_3 = E_1$ 를 식 (31)에 대입하면 판재 휨에 대한 극한식 (32)를 얻는다.

$$\frac{E_1 d^3}{12} \Delta^2 u_3^0 = t_3 \quad (32)$$

하지만 이 극한식은 전통적인 판재 휨 이론과 다른 계수 $E_1 d^3/12$ 를 가지게 되고(정확한 계수는 $D = Ed^3/12(1-\nu^2)$), 두 계수의 비 $12D/E_1 d^3 = (1-2\nu)/(1-\nu)^2$ 만큼 기준극한에서 벗어난다.

한편 $q_3 \geq 2$ 인 모델들에 대하여 위의 과정을 실시하면, 계수가 D 인 기준극한으로 된다. 여기서, $q_3 \leq 1$ 인 모델들에 대해서, $\nu=0$ 이든지 또는 $[E]$ 를 부록에 있는 Reissner-Mindlin판 이론에 사용되는 물질상수 $[E^{RM}]$ 로 대치하면 기준극한식을 얻을 수 있음을 쉽게 알 수 있다.

다음 과정으로 구속조건식 (30)을 식 (23), (24)에 대입하면, 다음의 면내인장(in-plane stretching)

$$\beta_1 u_{1,1}^0 + E_3 u_{1,22}^0 + \beta_2 u_{2,12}^0 = -\frac{t_1}{d} \quad (33)$$

$$\beta_1 u_{2,22}^0 + E_3 u_{2,11}^0 + \beta_2 u_{1,12}^0 = -\frac{t_2}{d} \quad (34)$$

에 대한 결과식을 얻을 수 있고(단, $\beta_1 = E_1 - E_2^2/E_1$, $\beta_2 = E_2 - E_2^2/E_1 + E_3$), 물질상수를 정리하면 전통적인 기준 면내인장 방정식⁽¹⁰⁾에 도달한다. 여기서, $q_3^0=0$ 인 ν 에 있어서는

$$u_{1,11}^0 + \frac{(1-\nu)}{2} u_{1,22}^0 + \frac{(1+\nu)}{2} u_{2,12}^0 + \frac{(1-\nu^2)}{Ed} t_1 = 0 \quad (35)$$

$$u_{2,22}^0 + \frac{(1-\nu)}{2} u_{2,11}^0 + \frac{(1+\nu)}{2} u_{1,12}^0 + \frac{(1-\nu^2)}{Ed} t_2 = 0 \quad (36)$$

$\nu=0$ 이므로, 식 (23), (24)로부터 다음과 같은 다른 극한 방정식에 이르게 된다.

$$u_{1,11}^0 + \frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)} u_{1,22}^0 + \frac{u_{2,12}^0}{2(1-\nu)} + \frac{t_1}{E_1 d} = 0 \quad (37)$$

$$u_{2,22}^0 + \frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)} u_{2,11}^0 + \frac{u_{1,12}^0}{2(1-\nu)} + \frac{t_2}{E_1 d} = 0 \quad (38)$$

하지만, 판재 휨의 경우와 같이 $\nu=0$ 이거나 수정된 물질상수 $[E^{RM}]$ 를 적용하면 올바른 극한식 (35), (36)에 도달함을 확인할 수 있다.

위 극한해석 과정을 쉘에 적용하여도 동일한 결과를 얻는다. 따라서 휨 변형이 지배적(bending-

dominated)인 구조물에 있어서 $q_3 \leq 1$ 인 모델들과, 막변형이 지배적(membrane-dominated)인 구조물에 있어서는 $q_3=0$ 인 모델들에 대해 수정된 물질상수 $[E^{RM}]$ 를 사용해야 나머지 다른 계층적 모델집단과 일치하는 기준극한을 갖는다. ($\nu \neq 0$)

본 논문에서는 수정된 물질상수 $[E^{RM}]$ 를 이용하는 모델을 $(q_1, q_2, q_3)^*$ -계층적 모델로 표기하기로 한다. 두께가 얇은 경우, $(1, 1, 0)^*$ -계층적 모델은 Reissner-Mindlin 이론과 동등(equivalent)하다. 왜냐하면, 변위장과 사용되는 물질상수 행렬이 서로 일치하기 때문이다.

5. 계층적 모델의 모델링 오차

본 절에서는 구조물의 3차원 선형 탄성이론에 따른 정해 \mathbf{u} 에 대한 계층적 모델 \mathbf{u}^q 의 차이,

$$\mathbf{e}^q = \mathbf{u} - \mathbf{u}^q, \quad \mathbf{e}^q \in V(\Omega) \quad (39)$$

즉, 모델링 오차(modeling error)에 대하여 살펴보고자 한다. 본 절의 내용을 위하여 $\tilde{H}^{2M}(\omega)$ 공간을 다음과 같이 나타낸다. 여기서, $\gamma_{(2j-1)}$ 는 경계에서의 $(2j-1)$ 차 편미분 operator이다.

$$\tilde{H}^{2M}(\omega) = \left\{ \begin{array}{l} t \in H^{2M}(\omega) : \gamma_{(2j-1)} t|_{\partial\omega_N} = 0 \\ j=0, 1, 2, \dots, M \end{array} \right. \quad (40)$$

모델링 오차에 대해서는 Cho와 Oden⁽¹¹⁾이 균질 등방성 대칭 박판 탄성체에 대하여 연구발표한 아래 정리를 인용하기로 하고, 여기서는 이 정리가 유도되기까지의 주요 증명과정을 참고로 요약 제시한다. 또한 이 정리를 통하여 계층적 모델의 모델링 오차 특성을 아래에 기술한다.

Theorem 외부하중 $t^i \in \tilde{H}^{2M}(\omega)$ 를 받는 구조물 ($0 < \bar{d} < 1$)에 대하여 모델차수가 (q_1, q_2, q_3) 인 계층적 모델에 대한 모델링 오차는 다음과 같이 표현된다. 여기서, 휨변형 지배적인 경우

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^q\|_{\varepsilon(d)} = C_q (\bar{d}/2)^{(s+1/2)} \quad (41)$$

$s = \min(q_m, 2M)$ 이고, 막변형 지배적인 경우에 대해서 $s = \min(q_m - 1, 2M)$ 이고, q_m 은 다음과 같이 계산된다.

$$\begin{aligned} q_m &= \min(q_1, q_2, q_3) + \delta \\ \delta &= \max |q_1 - q_3| \leq 1 \end{aligned} \quad (42)$$

상세한 수학적 증명은 참고문헌 (11)을 참조. 단계 1: 식 (12)에서 \mathbf{v} 를 다음과 같은 형태로 잡

는다. 여기서 W_i 는 변위성분들의 중립면에

$$v_i = F_i(\theta^1, \theta^2) w_i(2\theta^3/d), F_i \in H_0^1(\omega)$$

$$w_i \in H^1[-d/2, d/2] \cap W_i, i=1, 2, 3 \quad (43)$$

대한 대칭성과 비대칭성을 이용하여 휨변형과 막변형 모드(mode)를 규정짓는다(두께방향으로, 휨변형 모드: $W_1, W_2 \sim \text{odd}$ 차수, $W_3 \sim \text{even}$ 차수, 막변형 모드: $W_1, W_2 \sim \text{even}$ 차수, $W_3 \sim \text{odd}$ 차수). 3차원 선형 탄성이론에 따른 정해의 형태를 식 (44)와 같이 나타낸다.

$$u_i = \sum_{l=0}^{\infty} U_l^i(\theta^1, \theta^2) \Psi_l^i(2\theta^3/d) \quad (44)$$

단계 2: 단계 1에서 정의한 \mathbf{v}, \mathbf{u} 를 변분공식 (13)에 대입하면 휨변형모드와 막변형모드 두개에 대한 식으로 분리시킬 수 있고, 각 모드에 대한 $\{\Psi_l^i\}_{l=0}^{\infty}, \{U_l^i\}_{l=0}^{\infty}$ 를 구하는 연립방정식을 얻게 된다.

단계 3: 단계 2에서 구한 휨변형모드와 막변형모드에 대한 $\{\Psi_l^i\}_{l=0}^{\infty}, \{U_l^i\}_{l=0}^{\infty}$ 를 이용하여 임의의 (q_1, q_2, q_3) -계층적 모델을 표현한다. 이를 변분공식 (13)에 대입하여 오차 $\mathbf{e}^q = \mathbf{u} - \mathbf{u}^q$ 를 에너지 기준에 따라 구한다.

위의 인용한 정리에 따르면, 첫째로 모델링오차는 두께감소나 모델차수 증가에 따라서 감소한다. 하지만 모델차수가 외부하중의 매끈한 정도(regularity, 2 M)보다 커지면 감소률은 이 값에 의하여 일정해진다. 둘째로 변위성분들의 차수가 다를 경우, 그 차이가 1이상이면 모델링 오차에는 영향을 미치지 않는다. 셋째로 구조물의 특성(모드)에 따라서 오차감소률이 1만큼 차이가 난다. 마지막으로 C_q 는 외부하중의 regularity와 모델차수에 의존하는 파라미터이다.

6. 수치적 결과

앞 절에서 구한 이론적인 결과에 대하여 본 절에

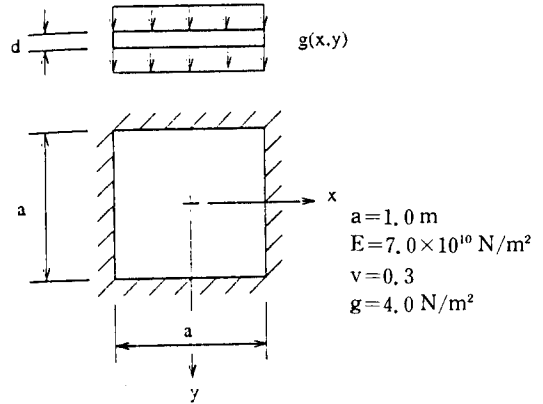


Fig. 2 Clamped square plate-like body

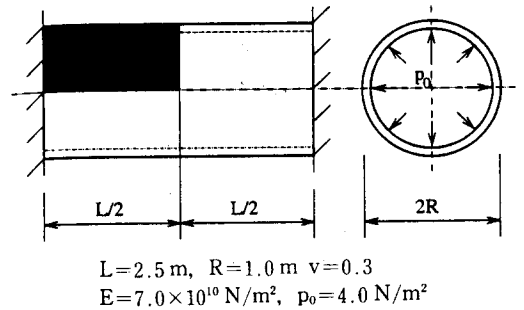


Fig. 3 Cylindrical can with uniform internal pressure

서는 Figs. 2, 3에서 보인 두개의 예제를 통하여 수치해석을 실시한다. 두께가 얇아지면 Fig. 2의 판재는 휨변형지배적으로 되는 반면, Fig. 3의 쉘은 막변형지배적으로 됨을 쉽게 알 수 있다. 판재의 경우 변위장의 중립면에 대한 대칭성을 이용하여 Table 1에서와 같이 3가지 모델을 선정하여 각 두께비 a/d 에 대한 판재 중앙에서의 수직변위를 유한요소법을 사용하여 구하였다. 참고로 Kirchhoff 판 이론에 따른 값은 $0.00126 ga^4/D$ 이다.⁽¹²⁾ (1, 1, 0)모델은 다른 모델과는 다른 극한으로 접근하

Table 1 Calibrated central vertical deflection $u_3 D/ga^4 (\times 10^{-3})$

Model \ a/d	3	10	100	500
(1, 1, 0)	2.88744	1.21576	1.03476	1.03359
(1, 1, 0)*	3.12712	1.44874	1.26722	1.26722
(1, 1, 2)	3.10634	1.43630	1.25265	1.25254

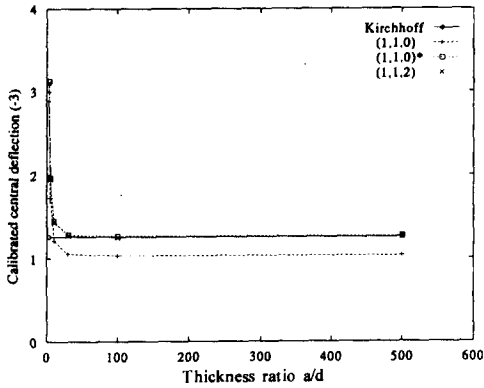


Fig. 4 Limits of hierarchical models for plate-like body

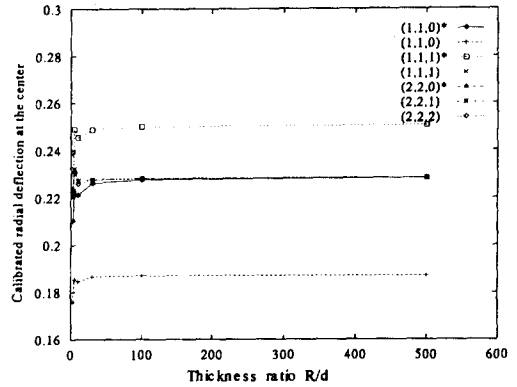


Fig. 5 Limits of hierarchical models for cylindrical can

고, 그 비는 0.816(앞 절에서, 두 계수의 비에 $v=0.3$ 을 대입한 값)으로 접근한다. 하지만 $(1, 1, 0)^*$ 모델의 극한은 기준치로 접근한다. 여기서, $q_3=1$ 인 모델들은 $q_3=0$ 인 모델들과 결과가 같다, 왜냐하면 대칭성으로부터 $u_3=0$ 이기 때문이다. Fig. 4는 결과치를 그래프로 도시하고 있다.

Table 2는 원통형 용기에 대한 두께비 R/d 에 따른 원통 중앙에서의 반경방향으로의 보정(scaling)된 변위를 유한요소법으로 구한 수치를 나타낸다. 판재의 경우는 보정계수를 $\sim d^3$ 으로 하고, 원통용기의 경우는 보정계수를 $\sim d$ 로 하였는데, 그 이유는 횡변형은 d^3 에 그리고 막변형은 d 에 비례하기 때문이다.

각 모델의 극한을 살펴보면 $q_3=0$ 인 경우는 기준

치보다 낮은 값(비율=0.816)으로 접근하지만, 수정된 물질상수를 이용하면 기준극한으로 접근한다. 참고로 $q_3=1$ 인 모델에 대하여 수정된 물질상수를 적용하면, 기준치보다 높은 극한으로 접근함을 알 수 있다. Fig. 5는 수치를 그래프화한 것이다. 이 결과로부터 막변형 지배적인 경우에 $q_3=0$ 인 모델에 대해서만 수정된 물질상수가 필요함을 확인할 수 있다.

다음의 Tables 3, 4는 두 구조물에 있어서 계층적 모델에 대한 모델링 오차와 식 (45)와 같이 정의된 수렴률(convergence rate, s)을 역시 유한요소법을 이용하여 얻은 수치값들이다. 3차원 선형 탄성이론에 따른 해는 3차원 유한요소법 혹은 고차원 계층적 모델(예, $(9, 9, 9)$ 모델)을 이용하여

Table 2 Calibrated radial deflection at the middle point $u_r Ed/4p_0 R^2$

Model \ R/d	3	10	100	500
(1, 1, 0)	0.17596	0.18453	0.18709	0.18718
(1, 1, 0)*	0.21042	0.22127	0.22771	0.22831
(1, 1, 1)	0.22272	0.22736	0.22820	0.22835
(1, 1, 1)*	0.23898	0.24543	0.24999	0.25053
(2, 2, 0)	0.17596	0.18453	0.18709	0.18718
(2, 2, 0)*	0.21042	0.22127	0.22771	0.22831
(2, 2, 1)	0.22283	0.22736	0.22820	0.22835
(2, 2, 1)*	0.23898	0.24543	0.24999	0.25053
(2, 2, 2)	0.23898	0.22591	0.22817	0.22835

Table 3 Modeling error of hierarchical models for plate-like body

Model	Modeing error		수렴률 (s)
	a/d=10	a/d=100	
(1, 1, 0)*	0.129(E-06)	0.320(E-08)	1.537
(1, 1, 2)	0.178(E-06)	0.656(E-09)	2.434
(3, 3, 2)	0.473(E-07)	0.209(E-10)	3.355
(3, 3, 4)	0.294(E-07)	0.686(E-11)	3.632

Table 4 Modeling error of hierarchical models for cylindrical can

Model	Modeing error		수렴률 (s)
	a/d=10	a/d=100	
(1, 1, 1)	0.159(E-03)	0.604(E-04)	0.421
(2, 2, 2)	0.125(E-04)	0.263(E-06)	1.678
(3, 3, 3)	0.108(E-05)	0.447(E-08)	2.383
(4, 4, 4)	0.381(E-06)	0.718(E-10)	3.346
(5, 5, 5)	0.258(E-06)	0.843(E-10)	3.486

$$\text{Convergence rate (s)} = \frac{\log\|e^q\|_{E(\omega)}}{\log(\bar{d}/2)} = s + 1.5 \quad (45)$$

구할 수 있다. 두 Table로부터 모델링 오차는 두께감소와 모델차수 증가에 따라서 감소함을 확인할 수 있다. 또한 수렴률의 계산결과는 앞 절에서의 이론치와 부합한다. 그리고 횡변형과 막변형 지배적인 두 경우 사이에 수렴률이 1만큼 차이가 있음을 볼 수 있다. 한편 q 가 각각 3, 4이후 수렴률에 큰 변화가 없음을 볼 수 있고, 이것으로부터 외부하중이 $\bar{H}^3(\omega)$ 에 속함을 앞절의 식 (41)로부터 추정할 수 있다.

7. 결 론

본 연구에서 우리는 판재나 셸과 같은 구조물에 있어서 변위장의 두께방향으로의 차수를 변화시킴으로써 계층적 모델을 유도하였다. 이 계층적 모델들은 두께가 0으로 접근하면, 특정한 저차모델(횡변형 지배적인 경우: $q_3 \leq 1$ 인 모델, 막변형 지배적

인 경우: $q_3 = 0$ 인 모델)을 제외하고는 모두 전통적인 Kirchhoff 이론(셸의 경우, Kirchhoff-Love 이론)으로 수렴함을 알았다. 더욱이 다른 극한값을 가지는 특정 저차모델들도 수정된 물질상수 [E^{RM}]를 이용하면 동일한 극한으로 접근한다.

3차원 선형 탄성이론에 대한 계층적 모델의 모델링 오차는 두께감소 및 모델차수 증가에 따라서 감소하며, 구조물의 특성에 따라서 오차 수렴률에 1만큼의 차이가 있음을 알았다. 더욱이 수렴률 증가는 외부하중의 regularity에 지배를 받고, 이 값 이상으로는 커지지 않음도 알았다.

따라서 어떤 주어진 구조물에 대한 해석에 있어서 변위나 응력상태가 단순한 영역에서는 저차모델을 그리고 복잡한 영역에는 고차모델을 선정하면 전 문제 영역에 고른 모델링 오차를 가진 최적의 모델을 구할 수 있다.

본 연구가 박판 탄성 구조물에 한정되어 있지만 모델의 매개변수 q 와 그에 대응하는 계층적 모델을 적절히 선정하면 복합재료나 유체역학 문제로도 확장시킬 수 있다(복합재료의 경우: $q \sim$ scaling factor, 유체역학의 경우: $q \sim$ 레이놀즈 값). 또한 본 연구에서의 계층적 모델의 범주를 확대시키면 비탄성 및 거대변형 문제와 같은 주요한 고체역학 분야로의 확대가 가능하다(이 경우, 각 모델집단의 범주를 선정하기 위한 판단기준이 필요하다).

참고문헌

- (1) Babuska, I. and Li, L., 1992, "The Problem of Plate Modeling: Theoretical and Computational Results," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 100, pp. 249~273.
- (2) Babuska, I., Szabo, B. A. and Actis, R. L., 1992, "Hierarchical Models for Laminated Composites," *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 33, pp. 503~535.
- (3) Noor, A. K., Burton, W. S. and Peters, J. M., 1992, "Hierarchical Adaptive Modeling of Structural Sandwiches and Multilayered Composite Panels," A. K. Noor ed., AMD-Vol. 157, ASME Publications, pp. 47~67.
- (4) Szabo, B. A. and Babuska, I., 1991, *Finite Element Analysis*, John Wiley.

- (5) Szabo, B. A. and Sahrman, G. J., 1988, "Hierarchic Plate and Shell Models Based on p-Extensions," *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, 26, pp. 1855~1881.
- (6) Adams, R. A., 1978, *Sobolev Spaces*, Academic Press.
- (7) Wempner, G., 1973, *Mechanics of Solids with Applications to Thin Bodies*, McGraw-Hill.
- (8) Oden, J. T. and Reddy, J. N., 1976, *An Introduction to the Mathematical Theory of Finite Elements*, John Wiley.
- (9) Cho, J. R., 1995, "An *hpq*-Adaptive Finite Element Method for Hierarchical Modeling of Elastic Structures," Ph.D. Dissertation, The University of Texas at Austin.
- (10) Fung, Y. C., 1965, *Foundations of Solid Mechanics*, Prentice-Hall.
- (11) Cho, J. R. and Oden, J. T., 1996, "A Priori Modeling Error Estimates of Hierarchical Models for Elasticity Problems for Plate- and Shell-Like Structures," *Int. J. Mathematical and Computer Modelling*, Vol. 23, pp. 117~133.
- (12) Timoshenko, S. P. and Woinowsky-Krieger, S., 1959, *Theory of Plates and Shells*, McGraw-Hill.

부 록

$$[E] = \begin{bmatrix} E_1 & E_2 & E_2 & 0 & 0 & 0 \\ E_2 & E_1 & E_2 & 0 & 0 & 0 \\ E_2 & E_2 & E_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \end{Bmatrix} \quad (46)$$

$$[E^{RM}] = \begin{bmatrix} E_1^* & E_2^* & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E_2^* & E_1^* & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa E_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa E_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \end{Bmatrix} \quad (47)$$

$$E_1 = E(1-\nu)/(1+\nu)(1-2\nu)$$

$$E_1^* = E/(1-\nu^2)$$

$$E_2 = \frac{\nu E_1}{(1-\nu)}$$

$$E_2^* = \nu E_1^*, \quad E_3 = E/2(1+\nu)$$

여기서,

E : 영률

ν : 푸아송비

κ : 전단보정계수