

〈논 문〉

## 이동격자계에서 분리유한요소법에 의한 운동에너지 보존 알고리즘

성재용\* · 최형권\*\* · 유정열\*\*\*

(1997년 4월 10일 접수)

### Kinetic Energy Conservative Algorithm in Moving Grid System Using Segregated Finite Element Formulation

Jaeyong Sung, Hyoung Gwon Choi and Jung Yul Yoo

**Key Words :** ALE(Arbitrary Lagrangian-Eulerian), Free Surface(자유표면), Energy Conservation(에너지 보존), Moving Grid System(이동격자계), Segregated FEM(분리유한요소법)

#### Abstract

Kinetic energy conservation for fixed and moving grids is examined in time-accurate finite element computation of fully unsteady inviscid flows. As numerical algorithms, fractional step method (FSM) and modified SIMPLE are used. To simulate the flow in moving grid system, arbitrary Lagrangian-Eulerian (ALE) method is adopted. In the present study, the energy conserving time integration rule for finite element algorithm is proposed and discussed schematically. It is shown that the discretization by Crank-Nicolson in time and Galerkin (central difference) in space must be used to ensure energy conservation. The developed code has been tested for a standing vortex in fixed or moving grid system, sloshing in a tank and propagation of a solitary wave, and has been shown to be a completely energy conserving algorithm.

#### 1. 서 론

일반적으로 수치해석에서 질량 및 운동량 보존은 미분방정식의 차분화에 의한 오차를 제외하면 대체로 만족시킬 수 있다. 그러나 에너지 보존은 운동에너지에 대한 미분방정식을 직접 풀지 않기 때문에 항상 만족시킨다고 볼 수 없다. 왜냐하면 운동에너지에 대한 방정식은 운동량방정식으로부터 도출되며 질량 및 운동량 보존과 구별되는 독립적인

보존 법칙이 아니기 때문이다. 또한 운동에너지 보존은 수치해석 방법의 정확성 및 수렴성과는 별개의 문제로서 특히 비정상 유동에서는 이에 대한 고려가 중요하다. 유한체적법에서 에너지 보존에 대한 연구로는 Thé 등<sup>(1)</sup>의 비정상 자유표면 유동에 대한 계산이 있다. 이 계산에서 그는 운동학적 구속조건을 사용하지 않고 자유표면과 인접한 제어체적에 대하여 연속 및 운동량방정식에 의해 자동적으로 구속조건을 만족시키는 방법을 사용하였다. 반면 유한요소법에서는 Banaszek<sup>(2)</sup>가 제어체적 및 Galerkin(이하 GK) 방법으로 비정상 확산 문제를 해석한 결과 제어체적 유한요소법(CVFEM)이 보존적인 성질을 잘 만족한다고 하였고, 이에 대하여

\*회원, 서울대학교 대학원 기계공학과

\*\*Post-Doctor, University of Minnesota

\*\*\*회원, 서울대학교 기계공학과

Giudice 등<sup>(3)</sup>은 대류 문제에 대한 보존적 및 비보존적인 공식화를 통해 GK 유한요소법에서도 보존적인 알고리즘은 각 유한요소와 절점에서 임의의 물리량이 보존됨을 보였다. 한편, Tezduyar 등<sup>(4)</sup>은 유한요소법을 이용하여 2차원 정상 와류와 원형 실린더 주위의 유동을 계산하였는데, 다단계의 시간전진방법과 유선상류도식을 사용하였다. 그러나 그의 에너지 보존에 대한 연구는 고정된 격자계에 대해서만 연구가 수행되었고, 유한요소법을 이용한 이동격자계의 문제에 있어 에너지 보존은 아직 보고된 바가 없다.

따라서 본 연구에서는 움직이는 격자계, 특히 자유표면이 있는 유동에서 ALE(arbitrary Lagrangian-Eulerian)<sup>(5-7)</sup> 유한요소법을 이용하여 운동에너지 보존적인 알고리즘을 제안하고자 한다. 이를 위한 기본 알고리즘으로는 분할방법(fractional step method)<sup>(8-10)</sup>과 수정된 SIMPLE<sup>(11,12)</sup>을 사용하였고, 자유표면 유동에 있어 자유표면의 형상을 찾는 방법으로는 운동학적 구속조건(kinematic condition)을 사용하였다. ALE 방법에 의한 자유표면 유동의 해석에서는 자유표면 위의 격자는 Lagrangian 방법과 같이 유체 입자를 따라서 움직이고, 내부의 격자는 적절한 방식으로 재배치한다. 따라서 이 방법은 Eulerian 방법에서와 같이 자유표면을 추적하기 위한 별도의 기법을 필요로 하지 않으며, Lagrangian 방법에서와 같이 유체입자의 변위가 커서 격자가 서로 교차하는 현상을 피할 수 있다.

차분화 기법은 Crank-Nicolson(이하 CN) 시간전진방법과 GK 유한요소법을 사용하여 운동에너지 보존을 만족하는 해를 얻었다. CN 방법은 시간에 대하여 2차의 정확도를 가지며, GK 유한요소법은 유한차분법의 중심차분도식과 같이 공간에 대하여 2차의 정확도를 가진다. 그러나 시간에 대하여 Backward Euler(이하 BE), 공간에 대하여 유선상류도식(SUPG)<sup>(13)</sup>을 사용하였을 때는 운동에너지 보존이 만족되지 않았다. 그리고 자유표면 유동에서는 운동학적 구속조건 차분방법도 에너지 보존에 매우 중요한 역할을 하며, 시간에 대하여 CN, 공간에 대하여 중심차분법을 사용하였을 때 에너지 보존을 만족하였다. 한편, 이동격자계에서 ALE 유한요소법을 사용할 경우 유한요소에 대한 공간적분 방식이 문제가 된다. 본 연구에서는 n과 n+1의 두 시간단계로 나누어지는 CN 시간 차분

기법에 대하여 현재 시간단계인 n+1/2 격자계에서 공간적분을 하여야만 에너지가 보존됨을 처음으로 제시하였다. 여기서 n+1/2 시간단계에서의 격자계는 ALE가 한 시간단계에서 선형적인 격자이동을 한다는 가정하에 n과 n+1 시간단계의 격자계를 평균하여 사용하였다. 이상의 방법들을 적용하여 에너지 보존적인 기법을 제시하고 완전 비정상 유동 해석을 위한 발판을 마련하였다.

본 연구에서는 비엇갈림 격자계를 사용한 동차 선형 분리유한요소 방법(linear equal order segregated finite element method)<sup>(10,11)</sup>으로 고정격자계 및 이동격자계에 대하여 ALE 방법을 이용하여 정상 와류 문제를 해석하였다. 또한 자유표면이 존재하는 유동으로서 주기적으로 진동하는 정상파와 단일파의 전파 문제에 대하여도 고찰함으로써 제시된 알고리즘이 운동에너지를 완전히 보존함을 확인하였다.

## 2. 지배방정식 및 ALE 기술

움직이는 격자를 고려한 2차원 층류 비정상 유동을 해석하기 위해서 다음 지배방정식을 사용하였다.

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) + \bar{u}_j \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i) \\ = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \rho g_i \end{aligned} \quad (2)$$

여기서  $\bar{u}_i = u_i - w_i$ 이고,  $w_i$ 는 격자의 이동속도를 의미한다. 유동에 대한 이와 같은 기술 방법을 ALE(arbitrary Lagrangian-Eulerian) 방법이라 하며, Hirt 등<sup>(5)</sup>이 최초로 유한차분법에 적용하였고 Ramaswamy와 Kawahara<sup>(6)</sup>와 Chippada 등<sup>(7)</sup>은 이를 유한요소방법에 적용함으로써 단일파의 전파와 개수로 유동에서의 난류 수력도약에 대한 계산을 수행하였다. ALE 기술 방법에서는 격자점의 이동속도와 유체의 이동속도가 같으면 ( $u_i = w_i$ ) 관성항은 사라지고, 유체입자는 항상 동일한 격자점 위에 존재한다. 즉 Lagrangian 표현이 된다. 반면에 격자점의 이동이 없으면 ( $w_i = 0$ ) 단순한 Eulerian 표현이 된다.

### 3. 수치 알고리즘

ALE 방법으로 기술된 지배방정식은 시간에 대하여는 완전 내재적 방법을 사용하고, 분할 방법과 수정된 SIMPLE 알고리즘을 적용하여 이산화하였다. 분할방법은 Chorin<sup>(9)</sup>이 최초로 제시하였는데, 압력 구배항이 관성항, 점성항 및 기타 외력항과 분리되므로 중간속도가 항상 연속방정식을 만족시키는 것은 아니다. 따라서 다음 단계에서 압력이 연속조건으로부터 얻어져야 하며 속도는 이 압력에 의해 연속방정식을 만족하도록 수정된다. 본 연구에서는 Choi와 Moin<sup>(9)</sup>과 Choi 등<sup>(10)</sup>이 사용한 다음의 4단계 분할 알고리즘을 사용하였다.

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{u}_i - u_i^n}{\Delta t} + \tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^n}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \tilde{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} + g_i \\ \frac{u_i^* - \tilde{u}_i}{\Delta t} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^n}{\partial x_i} \\ \frac{\partial^2 p^{n+1}}{\partial x_i \partial x_i} &= \frac{\rho}{\Delta t} \frac{\partial u_i^*}{\partial x_i} \\ \frac{u_i^{n+1} - u_i^*}{\Delta t} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (3)$$

여기서  $\Delta t$ 는 시간증분이고, 상첨자  $\sim$  및  $*$ 는 중간속도를 의미하며, 상첨자  $n$ 과  $n+1$ 은 각각 이전 시간단계와 현재 시간단계를 의미한다.

수정된 SIMPLE 알고리즘은 분할방법과 SIMPLE 알고리즘을 혼합한 것으로, 분할방법의 장점을 살리면서 매 시간단계에서 연속방정식과 운동량 방정식을 엄밀하게 만족시키도록 SIMPLE의 개념을 도입한 것이다. 특히 이 방법에서는 압력방정식의 계수가 고정되므로 매 반복계산 단계에서 SIMPLE과 같이 압력방정식의 계수를 구하지 않아도 되는 이점이 있다. 본 연구에서는 Nonino와 Giudice<sup>(11)</sup>와 Tabarrok와 Su<sup>(12)</sup>가 사용한 다음 알고리즘을 이용하였다.

$$\begin{aligned} \frac{u_i^* - u_i^n}{\Delta t} + \tilde{u}_j^* \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i^*}{\partial x_j \partial x_j} + g_i \\ \frac{\partial^2 p^*}{\partial x_i \partial x_i} &= \frac{\rho}{\Delta t} \frac{\partial u_i^*}{\partial x_i} \\ \frac{u_i^{n+1} - u_i^*}{\Delta t} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (4)$$

여기서  $p^*$ 은 보정압력이고, 상첨자  $*$ 는 중간속도 및 압력을 나타내며, 상첨자  $n$ 과  $n+1$ 은 각각 이전 시간단계와 현재 시간단계를 의미한다.  $p^*$ 는

현재 시간단계 초기에  $p^n$ 으로 가정하고 매 반복계산에서  $p^*$ 을 더하되,  $p^* < \varepsilon$ 이 될 때까지 반복계산을 하여 말기에  $p^{n+1} = p^* + p^*$ 로 하여 한 시간단계를 진전한다.

분할방법은 비정상 문제를 해석하는 데 있어 분할된 4개의 식을 풀어서 한 시간단계를 진전하는데 비하여, 수정된 SIMPLE은 분할된 3개의 식이 한 시간단계 내에서 연속방정식을 만족시키도록 반복계산을 통하여 시간전진을 한다. 따라서 계산에 소요되는 시간은 첫 번째 방법이 훨씬 적게 걸린다. 그러나 자유표면이 존재하는 경우는 자유표면의 형상을 찾기 위하여 자유표면에서의 유체 속도와 결합되어 있는 운동학적 구속조건을 사용하므로 한 시간단계 전진을 위하여 반복계산이 필수적이다. 따라서 본 연구에서는 움직이는 격자에 대하여 수정된 SIMPLE만 적용하였다.

### 4. 시간 차분기법과 공간 적분기법

수치해석 방법에 의한 전체적인 에너지 보존은 매우 어려운 문제 중의 하나로서, 차분화된 연속 및 운동량방정식을 만족하는 이산화된 속도장이 차분화된 운동에너지방정식을 만족시켜야 한다. 그러나 속도장이 차분화된 운동에너지방정식에 대한 어떠한 구속조건도 없이 구해지므로 비록 운동량 보존은 얻어진다 하더라도 에너지 보존에 대한 보장을 할 수 없다. 특히 열전달이 없는 비압축성, 비정상 유동에서는 이에 대한 고찰이 필수적이다. 따라서 본 연구에서는 이산화된 운동량방정식이 이산화된 에너지방정식에 미치는 영향에 대하여 고찰하고자 한다.

우선, 공간에 대한 미분은 일반적으로 중심차분이 에너지 보존적인 기법으로 알려져 있고<sup>(14)</sup> 유한요소법에서 GK 차분화 방법은 중심차분법과 동등하기 때문에 이를 중심으로 유선상류 차분도식과 비교한다. 다음으로 시간 차분기법의 영향에 대하여 고찰하고자 식 (2)에서 주어진 운동량방정식의 양변에  $u_i$ 를 내적하고 연속방정식을 적용함으로써 다음과 같은 운동에너지에 대한 수송 방정식을 얻는다.

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}(\rho k) + \tilde{u}_j \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho k) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j}(-p u_j + 2\mu s_{ij} u_i) \end{aligned}$$

$$-2\mu s_{ij}s_{ij} + \rho u_i g_i \quad (5)$$

여기서  $s_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$  이고,  $k = \frac{1}{2} u_i u_i$  이다. 운동량방정식에 대한 CN 차분식은 다음과 같이 표시될 수 있다.

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = f_i^{n+1/2} \quad (6)$$

여기서  $f_i$ 는 소스항이며,  $n+1/2$ 은  $n$ 과  $n+1$ 의 중간 시간단계를 의미한다. 이 식의 양변에 CN 기법에 의하여  $(u_i^n + u_i^{n+1})/2$ 로 주어지는  $u_i^{n+1/2}$ 를 곱하면, 운동에너지의 시간변화량에 대한 다음의 식이 얻어진다.

$$\frac{\left(\frac{u_i^n}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{u_i^n}{2}\right)^n}{\Delta t} = \dot{S}_i^{n+1/2} \quad (7)$$

여기서  $\dot{S}_i$ 는 에너지의 시간변화량으로서  $k^{n+1} = k^n + S$ 가 성립하므로 운동에너지에 대한 시간 변화량을 올바르게 반영하고 있음을 볼 수 있다. Fig. 1에 이에 대한 개념도가 제시된다.

마찬가지 방법으로 BE 시간 차분기법에 의하여 차분화된 운동량방정식에  $u_i^{n+1}$ 를 곱하여 에너지 차분식을 얻을 수 있으며, 그 결과는 다음과 같다.

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = f_i^{n+1} \quad (8)$$

$$\frac{(u_i^n)^{n+1} - u_i^{n+1} u_i^n}{\Delta t} = \dot{S}_i^{n+1} \quad (9)$$

즉  $k^{n+1} = k^n + S + \Delta E$ 이 되고, 여기서  $\Delta E = u_i^{n+1} (u_i^n - u_i^{n+1})/2 + \dot{S}_i^{n+1} \Delta t/2$  만큼의 운동에너지 오차가 생김을 볼 수 있다. 결론적으로 CN 시간 차분기법은 에너지 보존적인 시간 차분기법이 되고, BE는 그렇지 못하다. 이 두 방법에 대한 계산결과

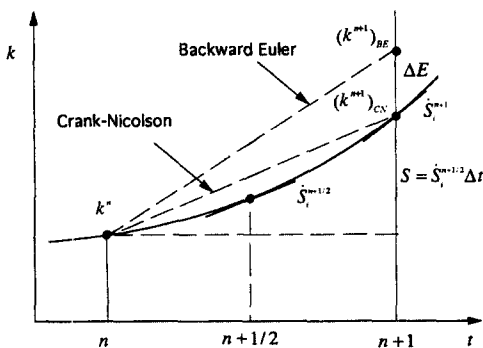


Fig. 1 Change of kinetic energy according to time discretization methods

는 6장에서 비교 고찰된다.

ALE 기술에 의한 움직임은 격자계에서 에너지 보존을 만족하기 위해서는 유한요소의 공간 적분방식도 중요한 문제가 된다. 에너지 보존적인 CN 차분방식을 사용한 수정된 SIMPLE 알고리즘의 유한요소 적분은 현재 시간단계로서  $n$ 과  $n+1$  시간단계의 중간단계인  $n+1/2$  시간단계에서 수행함으로써 운동에너지 보존이 구현 가능하다. 시간단계  $n$ ,  $n+1/2$ ,  $n+1$ 에서의 유한요소 공간을  $\Omega^n$ ,  $\Omega^{n+1/2}$ ,  $\Omega^{n+1}$ 이라고 할 때 수정된 SIMPLE 알고리즘의 적분식은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^{n+1/2}} \left[ \frac{u_i^* - u_i^n}{\Delta t} + \frac{1}{2} \bar{u}_j^* \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} - \frac{1}{2} \nu \frac{\partial^2 u_i^*}{\partial x_j \partial x_j} \right] w d\Omega \\ &= \int_{\Omega^{n+1/2}} \left[ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial x_i} - \frac{1}{2} \bar{u}_j^* \frac{\partial u_i^n}{\partial x_j} \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2} \nu \frac{\partial^2 u_i^n}{\partial x_j \partial x_j} + g_i \right] w d\Omega \\ & \int_{\Omega^{n+1}} \frac{\partial^2 p^*}{\partial x_i \partial x_i} w d\Omega = \int_{\Omega^{n+1}} \frac{\rho}{\Delta t} \frac{\partial u_i^*}{\partial x_i} w d\Omega \\ & \int_{\Omega^{n+1/2}} \frac{u_i^{n+1} - u_i^*}{\Delta t} w d\Omega = \int_{\Omega^{n+1/2}} \left( -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial x_i} \right) w d\Omega \quad (10) \end{aligned}$$

여기서 운동량방정식 및 속도수정방정식은 분할되기 이전의 운동량방정식으로부터 유도되므로  $\Omega^{n+1/2}$  공간에서 적분이 수행되는 반면, 압력방정식은 다음 시간단계의 연속방정식을 만족하는 조건으로부터 유도되므로  $\Omega^{n+1}$  공간에서 적분이 이루어져야 한다.

### 5. 경계조건

본 논문에서는 수치해의 운동에너지 보존에 대한 일차적인 연구로서 물리적인 확산이 없는 비점성유동에 대한 에너지 보존성에 중점을 두었다. 점성이 없으므로 벽에서는 전단응력이 0이고 수직방향의 접선 속도구배가 0이 된다. 그리고 비침투성 벽이므로 수직방향의 수직 속도성분도 0으로 두었다.

자유표면이 있는 유동의 경우 자유표면에 대한 경계조건은 운동학적 구속조건(kinematic condition)과 힘의 평형관계(dynamic condition)로부터 도출되는 데, 일반적인 형태는 다음과 같다.

$$\text{운동학적 구속조건} : \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} = v \quad (11)$$

$$\text{힘의 평형관계} : \sigma_{ij} n_j n_i = \frac{\gamma}{R}, \quad \sigma_{ij} n_j t_i = 0 \quad (12)$$

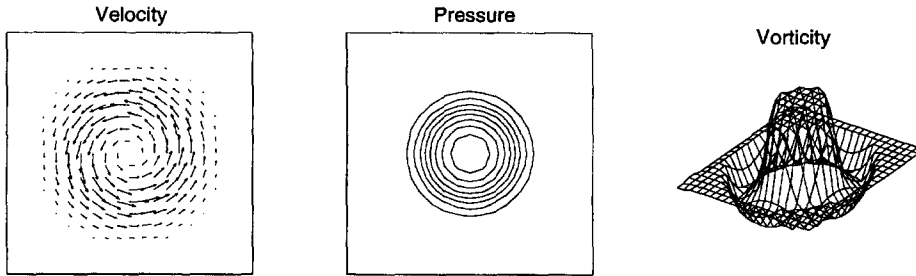


Fig. 2 Initial velocity, pressure and vorticity in a standing vortex

여기서  $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij}$ 이고,  $\gamma$ 는 표면장력을 나타내며,  $R$ 은 곡률반경이다. 운동학적 구속조건은 자유표면의 형상을 찾기 위하여 사용되며, 힘의 평형 관계에서는 자유표면의 압력을 대기압으로 하고 표면장력을 무시하면 다음과 같은 운동량방정식에 대한 경계조건을 얻을 수 있다.

$$\tau_{nn} = 0, \tau_{nt} = 0, p = 0 \text{ at } y = h \quad (13)$$

### 6. 결과 및 검토

#### 6.1 고정격자계에서 정상 와류

본 연구에서 사용한 차분화 기법이 얼마나 수치 확산을 일으키는지 확인하기 위한 첫 번째 예제로 정상 와류 문제<sup>(4)</sup>를 해석하였다.  $\rho = 1$ 이고  $1 \times 1$  영역 내에 갇혀있는 보텍스의 초기 조건으로서 반경 방향 속도는 0이고, 원주방향 속도는

$$u_\theta = \begin{cases} 5r & \text{for } r < 0.2 \\ 2 - 5r & \text{for } 0.2 \leq r < 0.4 \\ 0 & \text{for } r \geq 0.4 \end{cases} \quad (14)$$

로 주어진다. 압력은 원심력과 압력구배의 평형으로부터 얻어지며 해석적인 방법에 의하여

$$p = \begin{cases} (5r)^2/2 & \text{for } r < 0.2 \\ 4\ln(r/0.2) - 20(r - 0.2) + (5r)^2/2 & \text{for } 0.2 \leq r < 0.4 \\ 4\ln 2 - 2 & \text{for } r \geq 0.4 \end{cases} \quad (15)$$

로 주어진다. 주어진 초기조건은 정상상태에 대한 엄밀해로서 비록 시간이 지날지라도 수치해석에 의해 동일한 값을 유지하여야 한다. 따라서 본 연구에서는  $t = 3$ (약 2.4회전)에서 보텍스의 운동에너지를

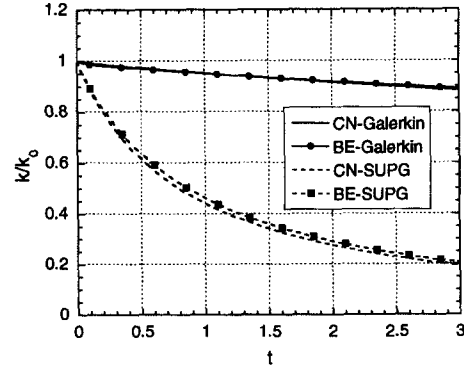


Fig. 3 Time histories of kinetic energy using the FSM ( $21 \times 21$ ,  $\Delta t = 0.05$ )

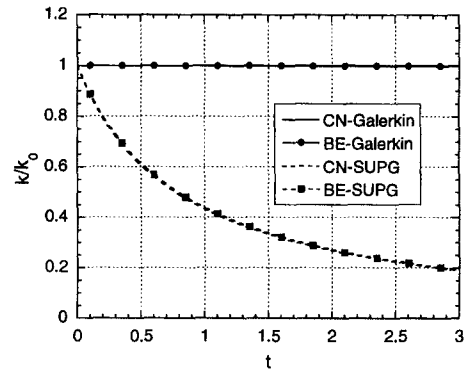


Fig. 4 Time histories of kinetic energy using the SIMPLE ( $21 \times 21$ ,  $\Delta t = 0.05$ )

가 초기에너지에 비하여 몇 퍼센트를 유지하는지 그 결과를 비교하였다. 초기조건으로 사용된 속도 및 압력, 와도의 분포는 Fig. 2와 같다.

먼저, 격자수  $21 \times 21$ (균일 격자), 시간 증분  $\Delta t = 0.05$ 에 대하여 각각의 차분화 기법에 따른 운동에너지의 변화를 Fig. 3-4에 나타내었다. Fig. 3에서는 분할방법을 기본 알고리즘으로 하고 차분기법을 달리하였을 때의 운동에너지를 나타내는데, 유

선상류도식을 사용한 경우는 수치확산에 의하여  $t=3$ 에서 운동에너지가 약 19%로 감소함을 볼 수 있다. 반면 GK를 사용하면 약 87% 정도 유지됨을 볼 수 있다. 그러나 Fig. 4에서 볼 수 있듯이, 수정된 SIMPLE 알고리즘을 사용한 경우, 유선상

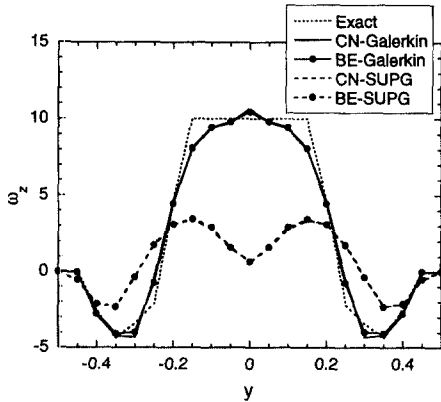


Fig. 5 Vorticity distributions along the centerline obtained by using the FSM ( $21 \times 21$ ,  $\Delta t = 0.05$ )

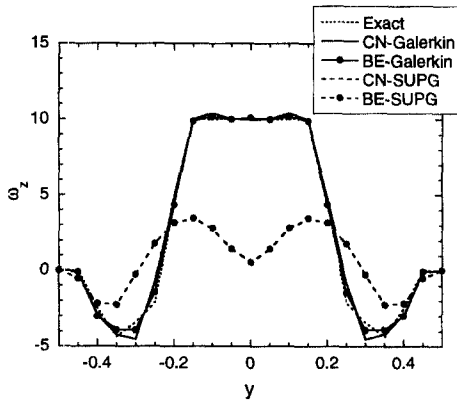


Fig. 6 Vorticity distributions along the centerline obtained by using the SIMPLE ( $21 \times 21$ ,  $\Delta t = 0.05$ )

류도식을 사용하면 마찬가지로 에너지가 보존되지 않으나 GK를 사용하면 거의 100% 유지되었다. 또한 두 알고리즘 모두에 있어 시간에 대하여 1차 정확도를 가지는 BE 기법과 2차 정확도를 가지는 CN 기법 사이에는 차이가 거의 없었다. 이는 주어진 문제가 정상상태이므로 시간에 대한 차분 정확도는 큰 영향을 주지 않는다는 것을 알 수 있다.

Fig. 5-6에서는  $t=3$ 에서 각각의 차분화 기법에 따른 중심선에서의 와도의 분포를 나타내었다. 마찬가지로 중심부근에 집중적으로 분포되어 있던 와도가 유선상류도식에 의해서는 바깥쪽으로 매우 확산된 모습을 볼 수 있다. 알고리즘에 대한 영향으로는 분할방법에 의해서는 약간의 확산이 있으나 수정된 SIMPLE에서는 거의 정확한 해를 얻을 수 있었다. 분할방법이 에너지가 보존되지 않는 가장 큰 이유는 운동량방정식을 풀 때 경계에서  $\bar{u} = u^{n+1} + O((\Delta t)^2)$ 로 주어지므로 시간 증분이 클 경우 운동량방정식에 대한 오차가 커지기 때문이다. 동일한 격자( $21 \times 21$ )에서 시간증분을 0.01로 줄였을 때 약 97% 에너지가 보존됨을 볼 수 있었다. 그러나 수정된 SIMPLE에서는 경계조건의 적용에서 이러한 오차가 개입되지 않으므로 시간증분이 큰 경우도 에너지는 항상 보존이 되었다.

다음으로 격자의 수에 대한 영향을 고찰하기 위하여 Table 1에 각 수치 기법에 대하여 격자수를 달리 하였을 때 에너지가 얼마나 유지되는지 나타내었다. 유선상류도식에 의한 수치확산은 예상한 바와 같이 수치 알고리즘과 무관하게 격자수를 증가시켜도 상당히 많이 발생하는 것을 볼 수 있고, 분할방법의 경우에는 GK 방법을 사용하였을 때 격자수를 증가시킴으로써 매우 좋은 결과를 얻을 수 있었다. 이는 앞에서 설명한 시간증분의 감소에 의한 경계조건에서 오차의 감소가 주된 원인이라

Table 1 Kinetic energy of a standing vortex at  $t=3$

Numerical algorithm	Discretizing method	$11 \times 11$	$21 \times 21$	$41 \times 41$	$81 \times 81$
		$\Delta t = 0.1$	$\Delta t = 0.05$	$\Delta t = 0.025$	$\Delta t = 0.0125$
FSM	CN-GK	53.51	87.28	97.83	99.70
	BE-GK	54.86	87.48	98.22	
	BE-SUPG	9.22	19.02	33.33	
Modified SIMPLE	CN-GK	106.09	100.09	100.00	100.00
	BE-GK	×	99.87	99.98	99.99
	CN-SUPG	9.90	19.02	33.18	

볼 수 있다. 이러한 본 연구의 결과는 Tezduyar 등<sup>(4)</sup>이 정상 와류 계산에서 사용한 외재적인 6 단계 시간전진기법의 운동에너지 보존 알고리즘보다

나은 결과이다. 그의 논문에서는  $21 \times 21$  격자계, 시간증분 0.05를 사용하였을 때,  $t=3$ 에서 약 92~94% 정도 운동에너지가 보존되었다.

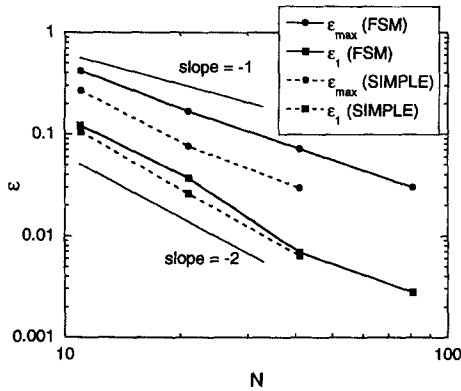


Fig. 7 Maximum and average errors of the Crank-Nicolson formulation

Fig. 7에서는 격자수의 증가에 따른 분할방법과 수정된 SIMPLE에 대하여 절대 속도의 최대오차 및 평균오차를 나타내었다. 여기서 두 알고리즘은 모두 시간에 대하여 CN, 공간에 대하여 GK 방법을 사용하였다. 그 결과, 두 알고리즘은 시간과 공간에 대하여 2차 정확도를 가지고 있음을 확인할 수 있다. 이러한 오차에 대한 공간적인 분포를 검사하기 위하여 Fig. 8-9에서는 동일한 차분기법 (CN-GK) 및 다른 격자수를 사용하여 얻어진 속도 분포를 엄밀해와 비교하였다. 분할방법의 경우 격자수가  $11 \times 11$  일 때 경계에서 속도가 엄밀해와 많은 차이를 보이고, 격자수와 관계없이 최대오차의 위치는 최대 속도가 존재하는  $r=0.2$ 에서 일어난을 볼 수 있다. 이는 전체에너지 보존에 심각한

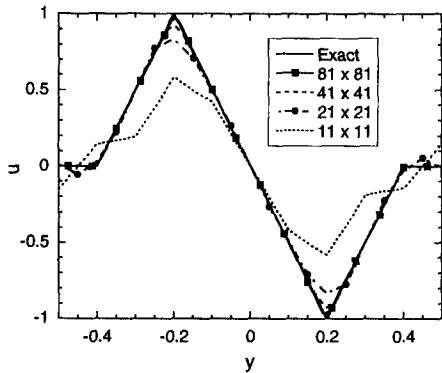


Fig. 8 u-velocity profiles along the centerline obtained by using the FSM for various grids

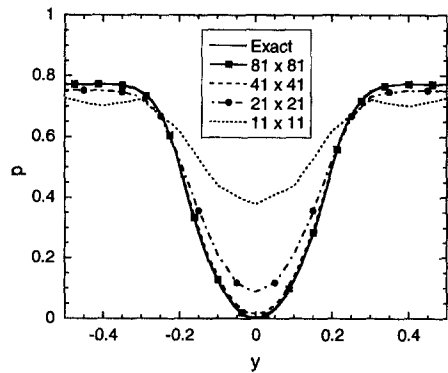


Fig. 10 Pressure distributions along the centerline obtained by using the FSM for various grids

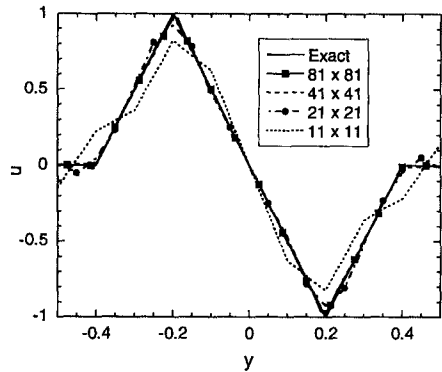


Fig. 9 u-velocity profiles along the centerline obtained by using the SIMPLE for various grids

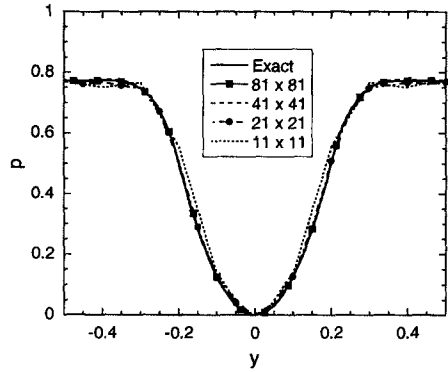


Fig. 11 Pressure distributions along the centerline obtained by using the SIMPLE for various grids

영향을 미치게 된다. 그러나 수정된 SIMPLE의 경우에는  $11 \times 11$  격자계의 각 위치에서 차별화에 따른 오차는 있지만 전체적인 에너지는 보존적임을 볼 수 있다.

Fig. 10-11에서는 중심선을 따라서 압력 분포를 엄밀해와 비교하였다. 분할방법에서는 적은 수의 격자계에서 압력이 엄밀해와 많이 다름을 알 수 있다. 반면 수정된 SIMPLE의 경우는 비록 적은 격자계일지라도 압력 분포가 잘 일치함을 볼 수 있다. 결론적으로 에너지 보존이 완전한 수치 기법을 사용한다면, 비록 적은 격자계일지라도 오차는 미분방정식의 차별화에 의해서만 발생하며 전체에너지 보존에는 영향을 미치지 않아야 함을 확인할 수 있다.

## 6.2 이동격자계에서 정상 와류

움직이는 격자계에 대한 에너지 보존을 고찰하기 위하여 격자 이동속도를 고려한 ALE 운동방정식 기술을 사용하였다. 문제를 단순화하기 위하여 매 시간단계마다 Fig. 12에 나타나 있는 실선과 점선으로 된 두 개의 격자를 교대로 차지하는 이동격자계를 사용하였다. 유한체적법에서는 이동격자계에서 질량보존을 만족시키기 위하여 주로 면적보존법칙(space conservation law)<sup>(15,16)</sup>을 사용한다. 그러나 이러한 방법은 가중잔류치 방법인 유한요소법에는 적용할 수 없고, 지금까지 ALE 유한요소법을 사용한 많은 다른 연구들에서 이에 대한 명확한 언급은 전혀 이루어지지 않았다.<sup>(6,7,17-19)</sup> 따라서 본 연구에서는 움직이는 격자계에서 유한요소의 공간적분이 어떠한 방식으로 수행되어야 하는지에 보다 중점을 두고, 수정된 SIMPLE 알고리즘을 사용하여 그 결과를 비교 고찰하였다.

Fig. 13에서 수정된 SIMPLE 알고리즘에 대하여 격자수  $21 \times 21$ , 시간증분 0.05일 때, 시간에 따른 운동에너지의 변화를 여러 가지 적분기법에 대하여 나타내었다. CN 시간 차분기법에 의하면 지금까지의 연구들에서 각 변수들은  $n$ 과  $n+1$  시간단계에서만 정의되고, 공간적분을  $n$  또는  $n+1$  시간단계의 격자계에서만 수행하였다. 그러나 CN은 현재 시간단계로서  $n+1/2$  시간단계를 사용하기 때문에 이러한 방법은 적절하지 못할 수 있으며, 본 연구에서는 최초로  $n+1/2$  시간단계의 격자를 사용하여 적분해야 함을 제안하고 또한 나중에 설명

되는 바와 같이 좋은 결과를 얻을 수 있다. ALE에서는 한 시간단계를 통하여 격자는 선형적으로 움직인다는 가정하에 계산이 이루어지므로,  $n+1/2$  시간단계의 격자계는  $n$ 과  $n+1$  시간단계의 격자계를 평균하여 사용하였다. 한편 BE는 기존의 방법에서와 같이 현재 시간단계로서  $n+1$  시간단계의 격자계를 사용하여 계산하였다.

수치해석 결과,  $n+1$  시간단계의 격자계를 사용하여 공간적분을 수행한 CN 기법은 에너지를 약간 과도하게 예측하였다. 반면,  $n+1$  시간단계의 격자계를 사용한 BE는 고정된 격자계에서의 결과와는 달리 에너지가 약 73% 정도밖에 보존이 되지 않았다. 그 이유는 격자계가 움직이기 때문에 각 격자점에서 속도장이 비정상상태가 되고, 따라서 4장에서 설명한 바와 같이 시간 차분기법이 운동에너지 보존에 영향을 미친 결과이다. 시간 차별화에 의한 오차를 줄이기 위하여 동일한 격자계 ( $21 \times 21$ )를 사용하고 시간증분을 0.025로 하여 계산하였으나 에너지는 76%밖에 보존이 되지 않았다. 이 경

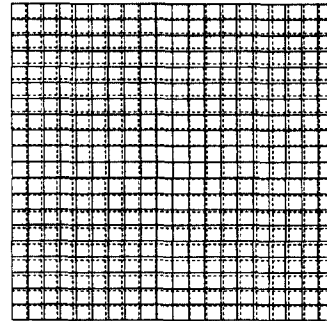


Fig. 12 Two alternately moving meshes used in the ALE method

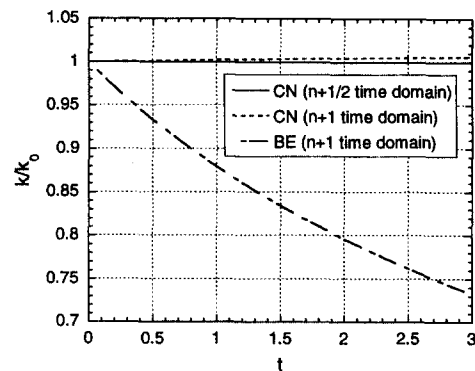


Fig. 13 Effects of integration rules applied in the ALE method ( $21 \times 21$ ,  $\Delta t = 0.05$ )



우, 중간격자를 두어 매 시간단계마다 격자이동이 절반만 이루어지도록 하였다.

6.3 주기적으로 진동하는 정상파

자유표면이 존재하는 유동의 경우에 있어 에너지 보존의 어려움은 움직이는 경계를 가지고 있다는 점과 그 경계가 미리 알려진 상태에서 유동장을 구하는 것이 아니라 경계와 유동장이 결합되어 있다는 점이다. 따라서 본 연구에서는 Fig. 14에서와 같이 가장 간단한 형태의 비점성유동으로서 진동하는 자유표면의 유동<sup>(4)</sup>을 해석함으로써 에너지 보존에 대하여 고찰하였다. 수조의 깊이가 파의 높이에 비하여 충분히 깊다고 가정하면 주기적인 정상파의 시간에 따른 자유표면 형상은 해석적인 방법에 의하여 다음과 같이 표현된다.

$$h(x) = a \sin(\pi x/b) \cos(\omega t) \tag{16}$$

여기서  $\omega = \sqrt{gk \tanh(kd)}$ ,  $k = 2\pi/\lambda$ ,  $\lambda = 2b$ 로 표시된다. 본 연구에서는  $\rho = 1$ ,  $g = 9.81$ ,  $b = 1$ ,  $d = 1$ ,  $a = 0.01$ 로 계산하였고, 그 결과를 Fig. 15-16에 나타내었다. 사용된 격자계는  $21 \times 21$  격자계를 사용하였으며, 시간 증분은 0.01을 사용하였다. 자유표면의 형상은 식 (11)에 주어진 운동학적 구속조건을 사용하여 구하였고, 이 식은 1차원 쌍곡선형 편미분방정식으로 공간 및 시간에 대하여 중심차분과 CN, 중심차분과 BE 그리고 상류도식과 BE를 사용하였다. 수치 해석의 오차를 평가하는 기준으로서 다음 식을 사용하였다.

$$E = \frac{|h - h_c|}{a} \times 100\% \tag{17}$$

여기서  $h$ 는 엄밀해이고,  $h_c$ 는 수치해이다.

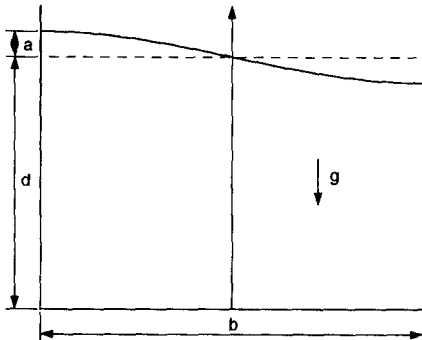


Fig. 14 Sketch of a small amplitude sloshing

Fig. 15에서는 운동학적 구속조건은 시간에 대하여 CN, 공간에 대하여 GK를 사용하여 차분화하였고, 움직이는 격자계에 대한 적분 기법을 변화시키면서 그 결과를 고찰하였다. 6.2절에서 설명한 바와 같이 본 연구에서 제안한 CN,  $n+1/2$  시간단계의 격자계로 적분하는 방법은 보존적임을 확인할 수 있다.

자유표면 유동의 가장 큰 특징은, 움직이는 경계가 미리 결정되어 있는 것이 아니라 속도장과 함께 구해져야 한다는 것이다. 따라서 자유표면의 형상을 찾기 위한 운동학적 구속조건에 대한 차분화 기법은 해를 얻는데 있어 매우 중요한 요소이다. 이 조건에 대한 차분화 기법의 영향을 고찰하기 위하여, 유한요소 적분을 CN,  $n+1/2$  시간단계의 격

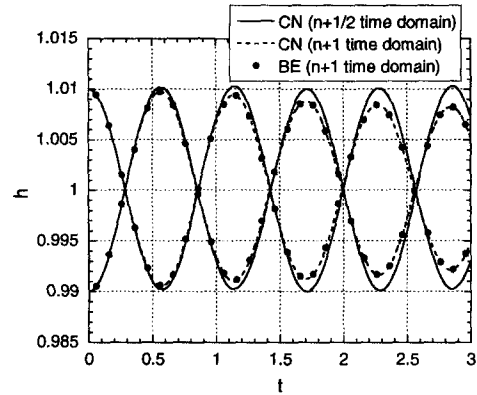


Fig. 15 Time histories of the oscillating wave height for various integration rules using the Crank-Nicolson and central difference schemes for the kinematic condition

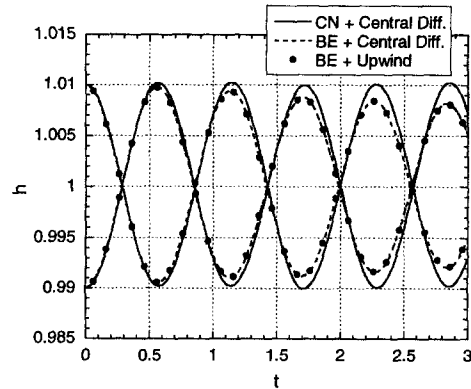


Fig. 16 Time histories of the oscillating wave height for various discretizing methods for the kinematic condition.

**Table 2** Comparison of errors after 2.5 periods

	Grid	$\Delta t$	error
Present study	11×11	0.05	3.6%
	21×21	0.01	3.1%
Thé et al. <sup>(1)</sup>	10×10	0.01	47%
	20×20	0.01	28%
	15×15	0.005	2.3%

자계에서 수행하고 운동학적 구속조건을 3가지 기법으로 차별화 하였을 때 결과를 Fig. 16에 나타내었다. 여기서 알 수 있는 것은 자유표면 유동의 해석에 있어 에너지 보존 기법이 구현되기 위하여는 운동학적 구속조건에 대한 차별화 방식도 에너지 보존적인 기법을 사용하여야 한다는 것이다.

Thé 등<sup>(1)</sup>은 유한체적법을 사용하여 정상파 유동을 해석하였고, Table 2에서 본 연구의 계산 결과와 비교하였다. 그의 연구에서는 시간에 대하여 1차 정확도의 코드를 사용하였고, 동일한 조건에서 2.5주기 지난 후의 오차가 28%였다. 또한 시간증분을 고정하고 격자수를 반으로 줄였을 때는 오차가 47%까지 나왔으며, 격자수를 15×15로 하고 시간증분을 줄임으로 해서 2.3%로 오차를 줄일 수 있었다. 반면, 본 연구에서는 2.5주기 지난 후의 오차가 3.1%였으며, 격자수를 반으로 줄이고 시간증분을 5배 늘여도 오차가 3.6%로 격자수와 무관하게 정확한 결과를 얻었다. 또한 주기는 엄밀해가 1.134인데 반해 본 연구에서는 11×11 격자계에서도 1.13으로 잘 예측하고 있음을 볼 수 있었다.

6.4 단일파의 전파

단일 파의 전파는 비점성이면서 와도가 존재하는 자유표면 유동으로서 비선형성을 가지고 있다는 점이 특징이다. 그 개념도는 Fig. 17에 나타나 있고, 초기속도와 자유표면의 형상은 Laitone<sup>(20)</sup>에 의하여 제시된 무한공간에서의 비선형 단일파 유동을 사용하였다.

$$\begin{aligned}
 u &= \sqrt{gd} \frac{H}{d} \operatorname{sech}^2 \left[ \sqrt{\frac{3H}{4d^2}} (x-ct) \right] \\
 v &= \sqrt{3gd} \left( \frac{H}{d} \right)^{3/2} \left( \frac{y}{d} \right) \operatorname{sech}^2 \left[ \sqrt{\frac{3H}{4d^3}} (x-ct) \right] \cdot \\
 &\quad \tanh \left[ \sqrt{\frac{3H}{4d^3}} (x-ct) \right] \\
 \eta &= d + H \operatorname{sech}^2 \left[ \sqrt{\frac{3H}{4d^3}} (x-ct) \right]
 \end{aligned}$$

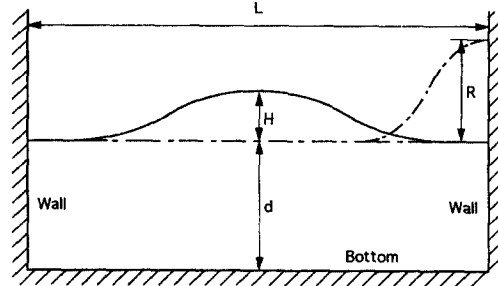


Fig. 17 Sketch of a solitary wave propagation

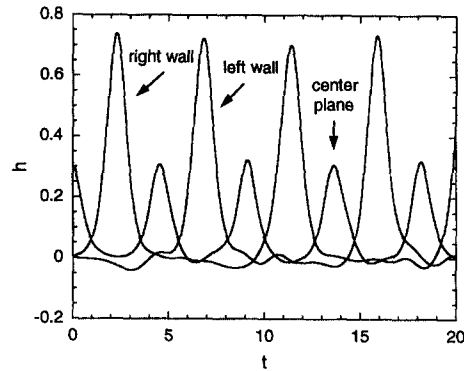


Fig. 18 Time histories of the surface height at three locations for  $H/d=0.3$  (129×11,  $\Delta t=0.01$ )

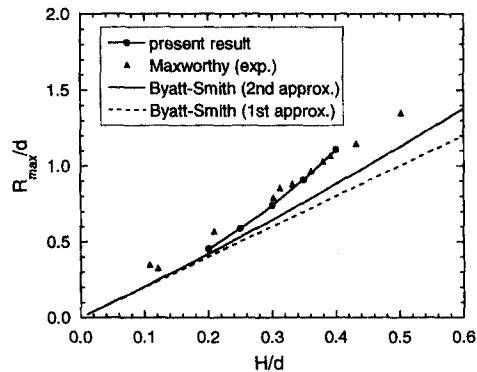


Fig. 19 Maximum run-up heights for various incident wave amplitudes

$$\begin{aligned}
 p &= \rho g (\eta - y) \\
 \frac{c}{\sqrt{gd}} &= 1 + \frac{1}{2} \frac{H}{d} - \frac{3}{20} \left( \frac{H}{d} \right)^2 + O \left( \frac{H}{d} \right)^3 \quad (18)
 \end{aligned}$$

그러나 수치해석에서는 주로 벽으로 제한된 공간에서 물결파의 거동에 대한 연구가 수행되었다.<sup>(6)</sup> 이를 위하여는 가장자리 벽이 초기 물결파의 위치에서 충분히 멀리 떨어져 있어야 하는데, 그 유효 길이에 대하여 초기파의 마루 위치에서 벽까지 거

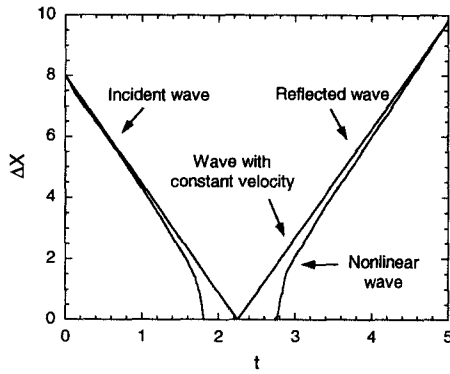


Fig. 20 Motion of the wave crest due to the existence of the side wall for  $H/d=0.3$

리를  $L/2$ 로 했을 때 Laitone이 다음 식을 제안하였다.

$$\frac{L}{d} \geq 6.90 \left( \frac{d}{H} \right)^{1/2} \quad (19)$$

또한 초기파는 오른쪽으로 진행하며, 벽을 두었을 때 오른쪽 벽에서 최고높이에 대하여 2차원 비점성에 대한 2차 정확도를 가진 이론적 해석을 통하여

Table 3 Comparison of times to reach maximum run-up height

H/d	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4
Present study	2.38	2.33	2.28	2.24	2.19
Byatt-Smith <sup>(21)</sup>	2.335	2.289	2.247	2.208	2.172

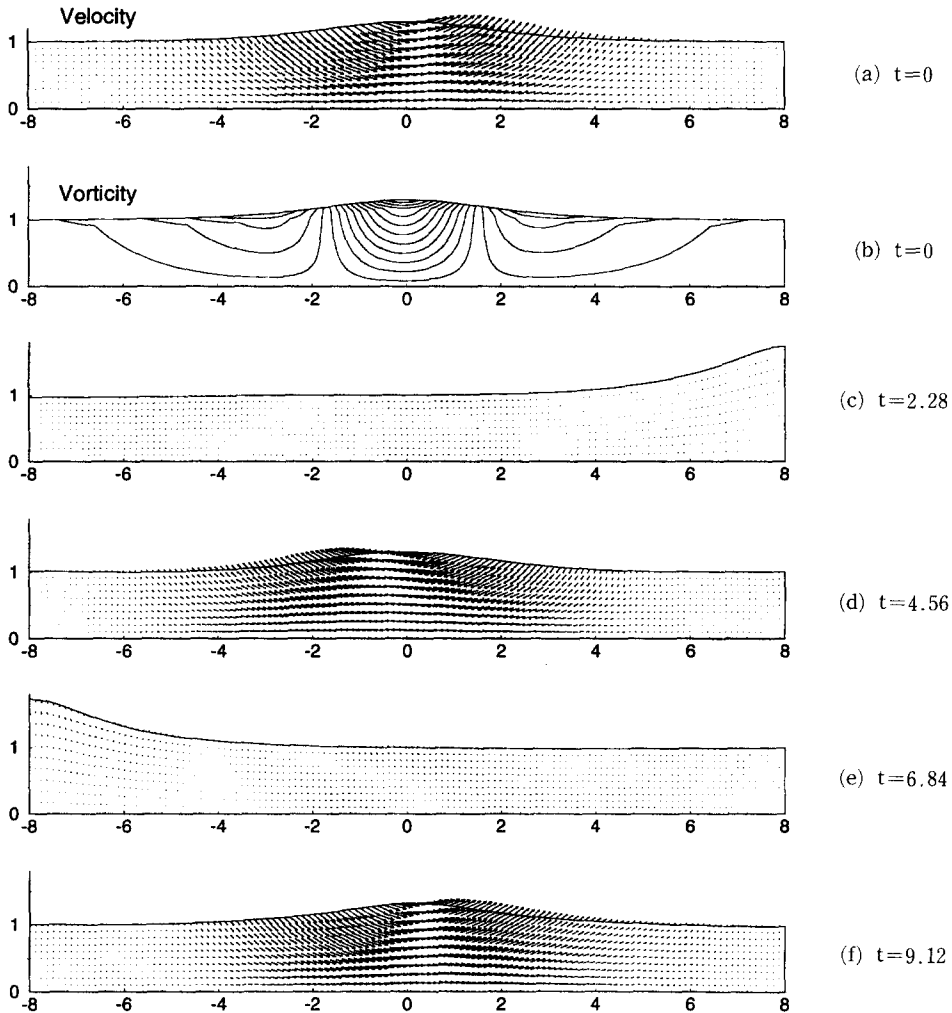


Fig. 21 Periodic motion of a solitary wave for one period  $t=9.12$

Byatt-Smith<sup>(21)</sup>는 다음과 같이 제안하였다.

$$\frac{R_{\max}}{d} = 2\frac{H}{d} + \frac{1}{2}\left(\frac{H}{d}\right)^2 + O\left(\frac{H}{d}\right)^3 \quad (20)$$

본 연구에서는 129×11 격자계에 대하여서  $\rho=1000$ ,  $g=9.81$ ,  $L=16$ ,  $d=1$  일 때 시간중분 0.01에 대하여 계산을 수행하였고, Fig. 18에서는  $H/d=0.3$  일 때 시간에 따른 오른쪽 및 왼쪽 벽, 그리고 중앙에서의 자유표면 높이를 나타내었다. 지배방정식 및 운동학적 구속조건에 대한 시간 차분은 CN을 사용하였고, 공간적분은  $n+1/2$  위치에서의 격자계에서 이루어졌다. 그 결과, 약 2주기가 지나는데 동안 파의 마루가 중앙에 왔을 때  $H$ 로 무차원화한 초기조건과의 오차는 1.8-7.6%로 거의 일정하게 나옴을 볼 수 있다.

Fig. 19에서 초기 파의 높이에 따른 최고 수면상승(run-up) 높이를 Maxworthy<sup>(22)</sup>의 실험자료 및 Byatt-Smith의 이론식<sup>(21)</sup>과 비교하였는데 실험자료와 잘 일치함을 볼 수 있다. Maxworthy는 그의 실험에서 벽에 의한 표면장력의 효과를 제거하고 비점성 효과를 구현하기 위하여, 양쪽 끝에서 서로 반대 방향으로 진행하는 동일한 형태의 파를 동시에 생성시키고 중앙에서 서로 교차하게 한 후 중앙에서 양분된 파의 한쪽 영역만을 관찰하였다. 이는 미끄럼 수직벽에 부딪혀서 반사되는 파의 형태는 진행방향이 반대이고, 동일한 파형, 전파속도를 가진 두 개의 파가 교차하는 현상과 동일하다는 사실을 이용한 것이다. 실제로는 점성이 존재하지만 수심이 충분히 깊다면 파의 전파에 있어 바닥에서의 점성은 파의 진행에 거의 영향을 주지 않는다.

식 (18)에 의하면 무한공간에서 진행하는 단일파는 기하학적 조건이 고정되면 파의 전파속도가 일정하다. 그러나 벽에 부딪혀서 반사될 때는 파의 비선형성으로 말미암아 속도가 일정하지 않게 된다. Fig. 20에서는 일정한 속도로 벽에 접근하여 일정한 속도로 반사되는 파와 수치해의 시간에 따른 파의 마루의 거동을 나타내었다. 여기서  $\Delta X$ 는 벽과 마루 사이의 거리이며, 파가 일정한 속도로 진행하다가 벽 근처에 도달하면 속도가 약간 빨라지고, 벽에 부딪힌 후 약간의 정체현상을 보인다. 그리고 반사된 후에 점차 원래의 전파속도를 회복하여 전파한다. 이러한 비선형 파의 거동은 Maxworthy의 실험을 통해서도 검증이 되었다. Table 3에서는 초기 파의 높이에 따른 최고 run

-up 높이에 도달하는 시간(1/4 주기)을 일정속도로 반사되는 파의 경우와 비교하여 도표로 나타내었다. Fig. 21에는  $H/d=0.3$  일 때 1 주기 동안의 비정상 유동과정을 나타내었다.

## 7. 결 론

본 연구에서는 비정상 유동에 대한 수치해석을 통하여 고정된 격자계 뿐만 아니라 움직이는 격자계를 사용하는 ALE 유한요소법에서도 에너지 보존 기법이 구현될 수 있음을 보였다. 그리고 이를 실현하기 위한 수치 기법에 대하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

수정된 SIMPLE 알고리즘은 한 시간단계 전진을 위하여 연속 및 운동량방정식을 엄밀하게 만족시키도록 하기 때문에 고정된 격자와 움직이는 격자에 대하여 에너지 보존적인 기법이다. 그러나 분할방법은 큰 시간 증분에 대하여는 경계에서의 오차에 의하여 에너지 보존성이 약해짐을 알 수 있었다.

지배방정식의 차분화는 시간에 대하여는 2차 정확도를 가지는 CN으로, 공간에 대하여서도 2차 정확도를 가지는 GK으로 차분화함으로써 에너지 보존을 얻을 수 있다. 그러나 완전 비정상 유동에서 BE는 에너지 보존적인 기법이 될 수 없음을 보였다.

본 연구를 통하여 움직이는 격자계를 사용하는 ALE 유한요소법에서 지배방정식에 대한 적분은 CN 시간 차분기법에 대하여  $n+1/2$  격자계에서 수행하면 에너지 보존적임을 제안하였고, 좋은 결과를 얻었다. 그리고 자유표면이 있는 유동에서는 운동학적 구속조건에 대한 차분기법이 전체 에너지 보존에 중요한 역할을 한다는 것을 확인하였고, 그 차분방법 또한 에너지 보존적이어야 한다는 것을 보였다.

## 후 기

이 연구는 터보동력기계연구센터의 지원으로 수행되었으므로 이에 감사드립니다.

## 참고문헌

- (1) Thé, J. L., Raithby, G. D. and Stubley, G. D.,

- 1994, "Surface-Adaptive Finite-Volume Method for Solving Free Surface Flows," *Numerical Heat Transfer*, Part B, Vol. 26, pp. 367~380.
- (2) Banaszek, J., 1989, "Comparison of Control Volume and Galerkin Finite Element Methods for Diffusion-Type Problems," *Numerical Heat Transfer*, Part B, Vol. 16, pp. 59~78.
- (3) Giudice, S. D., Comini, G. and Nonino, C., 1992, "A Physical Interpretation of Conservative and Non-Conservative Finite Element Formulations of Convection-Type Problems," *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, Vol. 35, pp. 709~727.
- (4) Tezduyar, T. E., Mittal, S. and Shih, R., 1991, "Time-Accurate Incompressible Flow Computations with Quadrilateral Velocity-Pressure Elements," *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* Vol. 87 pp. 363~384.
- (5) Hirt, C. W., Amsden, A. A. and Cook, J. L., 1974, "An Arbitrary Lagrangian-Eulerian Computing Method for All Flow Speeds," *J. Comput. Phys.*, Vol. 14, pp. 227~253.
- (6) Ramaswamy, B. and Kawahara, M., 1987, "Arbitrary Lagrangian-Eulerian Finite Element Method for Unsteady Convective Incompressible Viscous Free Surface Fluid Flow," *Int. J. Numer. Methods Fluids*, Vol. 7, pp. 1053~1075.
- (7) Chippada, S., Ramaswamy, B. and Wheeler, M. F., 1994, "Numerical Simulation of Hydraulic Jump," *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, Vol. 37, pp. 1381~1397.
- (8) Chorin, A. J., 1968, "Numerical Solution of the Navier-Stokes Equations," *Math. Comp.*, Vol. 22, pp. 745~762.
- (9) Choi, H. and Moin, P., 1994, "Effects of the Computational Time Step on Numerical Solutions of Turbulent Flow," *J. Comp. Phys.*, Vol. 113, pp. 1~4.
- (10) Choi, H. G., Choi, H. and Yoo, J. Y., 1997, "A Fractional Four-Step Finite Element Formulation of the Unsteady Incompressible Navier-Stokes Equations Using SUPG and Linear Equal Order Element Methods," *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 143, pp. 333~348.
- (11) Nonino, C. and Giudice, S. D., 1988, "Finite Element Analysis of Turbulent Forced Convection in Lid-Driven Rectangular Cavities," *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, Vol. 25, pp. 313~329.
- (12) Tabarrok, B. and Su, J. C., 1994, "Semi-Implicit Taylor-Galerkin Finite Element Methods for Incompressible Viscous Flow," *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 117, pp. 391~410.
- (13) Brooks, A. N. and Hughes, T. J. R., 1982, "Streamline Upwind Petrov-Galerkin Formulations for Convection Dominated Flows with Particular Emphasis on the Incompressible Navier-Stokes Equations," *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 32, pp. 199~259.
- (14) Ferziger, J. H. and Peric, M., 1996, *Computational Methods for Fluid Dynamics*, Springer-Verlag, Berlin.
- (15) Thomas, P. D. and Lombard, C. K., 1979, "Geometric Conservation Law and Its Application to Flow Computations on Moving Grids," *AIAA Journal*, Vol. 17, pp. 1030~1037.
- (16) Demirdzic, I. and Peric, M., 1990, "Finite Volume Method for Prediction of Fluid Flow in Arbitrarily Shaped Domains with Moving Boundaries," *Int. J. Numer. Methods Fluids*, Vol. 10, pp. 771~790.
- (17) Soulaimani, A., Fortin, M., Dhatt, G. and Ouellet, Y., 1991, "Finite Element Simulation of Two- and Three-Dimensional Free Surface Flows," *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 86, pp. 265~296.
- (18) Tezduyar, T. E., Behr, M. and Liou, J., 1992, "A New Strategy for Finite Element Computations Involving Moving Boundaries and Interfaces-The Deforming-Spatial-Domain/Space-Time Procedure: I. The Concept and the Preliminary Numerical Tests," *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 94, pp. 339-351.
- (19) Nomura, T. and Hughes, T. J. R., 1992, "An Arbitrary Lagrangian-Eulerian Finite Element Method for Interaction of Fluid and a Rigid Body," *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 95, pp. 115~138.

- (20) Laitone, E. V., 1960, "The Second Approximation to Conoidal and Solitary Waves," *J. Fluid Mech.*, Vol. 9, pp. 430~444.
- (21) Byatt-Smith, J. G. B., 1971, "An Integral Equation for Unsteady Surface Waves and a Comment on the Boussinesq Equation," *J. Fluid Mech.*, Vol. 49, pp. 625~633.
- (22) Maxworthy, T., 1976, "Experiments on Collisions between Solitary Waves," *J. Fluid Mech.*, Vol. 76, No. 1, pp. 177~185.