

<논 문>

이종재료로 구성된 영역의 응력장 해석 개선방안 연구

송 기 남*

(1995년 1월 27일 접수)

A Study on the Improvement Method of the Stress Field Analysis in a Domain Composed of Dissimilar Materials

Kee-Nam Song

Key Words : Displacement-formulated Finite Element Method(변위형 유한요소법), Dissimilar Material(이종재료), Conjugate Stress(공액응력), Stress Smoothing Method(응력 평탄화법), Penalty Function Method(벌칙함수법), Interface Traction(접합응력)

Abstract

Displacement fields and interface stresses are obtained by modifying the potential energy functional with a penalty function which enforces the continuity of stresses at the interface of two materials. Based on the displacement field and the interface stresses, a new methodology to generate a continuous stress field over the entire domain including the interface of the dissimilar materials has been proposed by combining the L^2 projection method of stress-smoothing and the Loubignac's iterative method of improving the displacement field. Stress analysis was carried out on two examples which are made of highly dissimilar materials. As a result of the analysis, it is found that the proposed method provides improved continuity of the stress field over the entire domain as well as predicting accurate nodal stresses at the interface. In contrast, the conventional displacement-based finite element method provides significant stress discontinuities at the interfaces. In addition, it was found that the total strain energy evaluated from the improved continuous stress field converge to the exact value as increasing the number of iterations in the proposed method.

기 호 설 명

N^* : 형상함수 행렬

B : 변형률 행렬

D : 재료의 구성행렬

Ω_e : 요소의 영역

K_π : 변위형 유한요소법의 강성행렬

K_p : 벌칙함수에 의한 강성행렬

$\{\sigma\}$: 불연속한 변위기초응력장

$\{\sigma^*\}$: 연속인 응력장

$\{\sigma_{sp}\}$: 접합면에서 규정된 연속응력장

π_p^* : 벌칙함수가 부과된 포텐셜에너지 범함수

I^* : 벌칙함수가 부과된 응력투사 범함수

a_σ, α : 벌칙상수

1. 서 론

상이한 물성치를 갖는 재료들이 접합되어 구성된 구조물들이 산업전반에 걸쳐서 널리 사용되고 있으며, 공학적인 관심이 점차 고조되고 있다. 이러한 구조물들의 예로는 재료의 열팽창 차이에 따른 변

*회원, 한국원자력연구소 신형핵연료기술개발과제

형질의 차이를 이용하여 온도측정에 사용하는 서머스탯(thermostat)용 바이메탈을 비롯하여 반도체나 반도체의 에칭기술을 이용한 미소기계나 센서 설계시에 실리콘 기초(silicon base)와 접합되는 금속부위부 그리고 정형외과에서 사용하는 인체삽입물(implant)이나 보철구(prosthesis)와 인체의 뼈 혹은 뼈 접착제(bone cement) 결합부 등을 예로 들 수 있으며, 항공산업이나 우주산업에 사용되는 경구조물의 접합 혹은 내열재의 접합 등을 비롯하여 원자력산업의 핵연료에도 종래에 사용되던 지르칼로이-2 피복관의 내면에 연성이 좋은 지르코늄을 덧붙인(lining) 피복관의 사용 등을 예로 들 수 있다.

이종재질로 구성된 구조물의 구조적 건전성을 평가하는데 중요한 요체는 접합부를 비롯한 주요 부위에서 응력을 신뢰할 수 있게 평가하는 방법을 확보하는 것이다. 이종재료로 구성된 구조물에 대한 응력해석에는 여러 방법이 적용되고 있으나 이종재료의 접합면에서 연속인 응력성분과 불연속한 응력성분이 있어서 해석에 어려움이 존재한다. 즉, 접착면에서 면에 수직인 방향으로의 수직응력 성분과 전단응력 성분은 연속이나 접착면에 수직인 평면에서 정의되는 수직응력 성분과 전단응력 성분은 불연속이다. 2차원 문제를 예로 들 경우 접합면에 수직인 방향을 n 이라 하고 접선방향을 t 라 할 때 수직응력(σ_n)과 전단응력(τ_{nt})은 연속이나 접합면에서 접선방향으로의 수직응력(σ_t)은 불연속이고 대신 접선방향으로의 수직변형률(ϵ_t)은 연속이다.⁽¹⁾ 그런데 요소간의 변위 연속성(C^0 continuity)에 근거하여 형성된 변위형 유한요소법의 응력장은 유한요소의 크기를 작게 세분하여도(h-version approach) 두 물체간의 접합면에서 응력의 괴리는 어느 정도 줄어들 뿐 여전히 상당한 정도의 불연속이 발생하고 있는 것으로 알려졌다.⁽²⁾ 이러한 변위형 유한요소해에 근거하여 후처리과정(post-process)에서 구한 통상적인 연속응력장은 재료의 물성치 차이가 크지 않으면 믿을 만한 결과를 주지만 재료의 물성치 차이가 크게 다르면 신뢰할 수 없는 결과를 줄 수도 있다. 이 경우 접합면을 따라 두 재료에서 심한 응력의 괴리가 발생하며 진동현상이 발생하기도 한다.^(3,4) 또한 전체 영역에서 연속인 응력장을 가정할 혼합 유한요소법에서도 불연속한 응력성분에 대한 조건을 만족시킬 수 없으므로 해석시 오차를 수반하게 된다. 이러한 응력의 불연속에 대한

문제는 이론해나 특수한 수식으로만 해결할 수 있으며, 이론해는 형상이 단순하고 간단한 경계조건에서만 제한적으로 이용될 수 있고 정확한 해를 얻기 위해서는 엄밀한 가정이 요구된다.⁽⁵⁾

이종재료로 구성된 접합부에 대한 연구로는 초기에 접착층을 무시하거나^(6,7) 접착층을 인장-전단스프링으로 가정한 Goland 및 Reissner⁽⁸⁾의 연구를 기초로 하여 확장 발전되어 왔다. 근래에 수치해석적인 방법에 대한 연구로는 Angelides 등⁽³⁾이 서로 다른 재료로 이루어진 두 4절점 선형 변위요소의 접합점에 중간절점을 첨가하고 이 절점에서 수직응력과 전단응력이 연속이 되도록 만든 접합요소를 개발하여 여러 가지 이종재료로 이루어진 구조에 대한 해석을 수행하였고, Shirazi-Adl^(1,3) 등은 두 요소의 접착 경계에서 접합응력(interface traction)이 같다는 조건을 벌칙함수로 포텐셜에너지에 부과하는 방법을 이용하여 두 물체의 접합 경계에서 접합응력을 비교적 정확하게 구하였다. 또한 Chouchaouil 등⁽²⁾은 Hellinger-Reissner 범함수를 기초로 영역내에서 변위와 응력을 연속으로 잡는 혼합형 유한요소법으로 해석을 하였고, Kim⁽⁵⁾은 결합형 혼합 범함수를 이용하고, Kim⁽⁹⁾은 섭동 라그랑지안방법을 이용하여 접합문제를 해석하였고 개선된 해를 보여 주었다. 그러나 이러한 연구들은 접합면에서 접합응력의 개선에 초점이 맞추어졌고 접합면을 포함한 영역에서 개선된 연속응력장 해석은 수행하지 않았다.

변위형 유한요소해와 응력평탄화과정^(10,11)을 이용하여 이종재료로 구성된 계의 영역내에서 연속응력장을 계산하려 할 때 접합면에서의 심한 응력의 괴리로 인하여 해석의 정확도에 대한 신뢰성이 떨어진다. 따라서 본 연구에서는 이종재료의 접합면 양측에서 접합응력이 같다는 조건을 벌칙함수로 포텐셜 범함수에 부과하여 구한 변위해와 접합응력을 기초로 하여 접합면에서 연속인 응력성분들과 불연속한 응력성분에 대응되는 방향으로의 변형률이 접합면 양측에서 같다는 조건을 추가로 응력평탄화과정의 범함수에 벌칙함수로 적용하고 연속응력장이 평형방정식을 만족하도록 변위장을 개선하는 Loubignac의 반복계산법⁽¹²⁻¹⁴⁾ 이용함으로써 접합면을 포함한 전 영역에서 개선된 연속응력장을 구할 수 있는 방법을 제안하였다. 또한 Loubignac의 반복계산법 및 벌칙함수를 부과한 응력평탄화과정을 국부영역 모델에 적용하여⁽¹⁵⁾ 접합면을 포함한 국

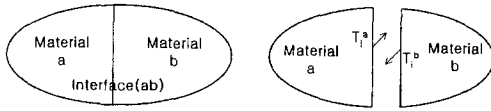


Fig. 1 Interface traction acting on a bi-metallic interface between two region a and b

부영역에 대하여 연속응력장 개선을 수행하였다.

2. 벌칙함수에 의한 유한요소 수식화

Fig. 1은 이중재료로 구성된 계의 접합면에 작용하는 접착응력을 나타낸 것으로 이중재료들의 접합면이 완전히 접착되어 있다고 가정하면 접착면에서 접착응력에 대한 제한 방정식은 다음과 같이 표현되어 질 수 있다.^(1,4)

$$T_i^a + T_i^b = 0 \tag{1}$$

여기서, 상첨자 a, b 는 Fig. 1에서 공통 접합면 (ab)을 갖는 접합물질들을 각각 나타내며, 하첨자 i 는 응력성분을 나타낸 것으로 3차원 해석에서 i 는 1에서 3까지의 세 성분(즉, 1개의 수직응력 성분과 2개의 전단응력 성분)을 나타낸다. 상기 식 (1)은 재래의 포텐셜에너지 범함수(π_p)의 Euler방정식으로 간주될 수 있으며, 벌칙함수 과정에 따라 재래의 포텐셜에너지 범함수에 구속조건으로 부과하면 수정된 포텐셜에너지 범함수(π_p^*)는 다음과 같이 표현된다.

$$\pi_p^* = \pi_p + \frac{1}{2} \alpha \int_s (T_i^a + T_i^b)^2 dS \tag{2}$$

여기서 α 는 벌칙상수, S 는 공통 접합면을 나타내며 식 (2)의 둘째 항에서 T_i^a 와 T_i^b 는 다음과 같은 벡터로 표현된다.

$$\{T^a\} = [n^a][E^a][B^a]\{d^a\} \tag{3}$$

$$\{T^b\} = [n^b][E^b][B^b]\{d^b\} \tag{4}$$

여기서, $[n]$ 은 접합면에서 외향방향으로의 수직단위벡터의 공간좌표 성분을 나타내는 행렬이며 $[E]$ 는 탄성행렬, $[B]$ 는 변위-변형률 구성행렬을 나타내며, $\{d\}$ 은 요소의 절점변위벡터를 나타낸다. 접합면에서 마주보는 두 요소가 결합되었을 때 접합면 (ab)에서의 변위벡터 $\{d^{ab}\}$ 로 표시하면 다음과 같은 관계 식을 얻을 수 있다.

$$\{T^a + T^b\} = [K^{ab}]\{d^{ab}\} \tag{5}$$

여기서, $[K^{ab}] = [n^a]([E^a][B^a][T^a] - [E^b][B^b][T^b])$ 이며, $[T^a]$ 및 $[T^b]$ 는 물질 a, b 의 각 요소에서 절점 자유도벡터를 결합한 형태의 절점 자유도벡터로 변환시키는 변환행렬을 나타낸다.

식 (5)를 식 (2)에 대입하고 변위 자유도에 대하여 범함수를 최소화하는 과정을 취하면 식 (2)의 우변 첫째항은 변위형 유한요소법에서 잘 알려진 요소 방정식으로 귀결되며, 식 (2)의 우변 둘째항에서는 아래의 식 (6)과 같은 벌칙함수에 의한 대칭 강성행렬이 만들어진다.

$$[K_p] = \int_s [K^{ab}]^T [K^{ab}] dS \tag{6}$$

식 (6)을 식 (2)의 우변 첫째항에서 얻은 변위형 유한요소의 강성행렬에 벌칙함수로 부과하여 다음과 같은 유한요소 방정식을 풀면 변위해 및 접착면에서 접착응력이 구해진다.

$$[K]\{u\} = \{f\} \tag{7}$$

여기서,

$$[K] = [K_\pi] + \alpha [K_p]$$

3. 연속응력장의 계산

영역내에서 연속인 응력장(응력성분이 불연속일 경우 불연속 응력성분에 대응되는 연속 변형률 성분으로 대체됨)의 절점에서 값을 $\{\sigma^*\}$ 이라 하면 영역내의 연속응력장은 형상함수벡터($[N^*]$)들의 선형조합으로 다음과 같이 표현된다.

$$\{\sigma^*\} = [N^*]\{\bar{\sigma}^*\} \tag{8}$$

변위해와 변위-변형률 및 변형률-응력 구성식에서 얻은 불연속한 변위기초응력장을 $\{\sigma\}$ 라 표시하면 연속 변위장에서 절점응력벡터 $\{\bar{\sigma}^*\}$ 는 연속응력장과 불연속한 변위기초응력장의 오차를 영역내에서 다음과 같이 투사(projection)시켜서 얻어질 수 있다.⁽¹³⁾

$$I = \int_\Omega [N^*]^T (\{\sigma^*\} - \{\sigma\}) d\Omega = 0 \tag{9}$$

여기서, 형상함수벡터($[N^*]$)가 변위를 근사화시키는데 사용된 형상함수와 동일할 경우 공액근사법⁽¹⁰⁾ 및 전체 응력평탄화법⁽¹¹⁾ 그리고 위의 식 (8)에서 사용한 투사법⁽¹³⁾이 동일한 것으로 알려져 있다. 그러나 이중재료로 이루어진 계의 접합면에서 접합

응력이 같다는 조건과 불연속한 응력에 대응하는 방향으로의 변형률이 같다는 조건을 이용하여 식 (9)의 범함수에 벌칙함수로 부과하면 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$I^* = I + \alpha_\sigma \int_S [N^*]^T (\{\sigma^*\} - \{\sigma_{sp}\}) dS = 0 \quad (10)$$

여기서, α_σ 는 벌칙상수이며, 식 (10)을 절점응력 벡터 $\{\sigma^*\}$ 에 대하여 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}^* & (\int_\Omega [N^*]^T [N^*] d\Omega + \alpha_\sigma \int_S [N^*]^T [N^*] dS) \\ & = (\int_\Omega [N^*]^T \{\sigma\} d\Omega + \alpha_\sigma \int_S [N^*]^T \{\sigma_{sp}\} dS) \quad (11) \end{aligned}$$

식 (11)에서 구한 절점응력벡터 $\{\bar{\sigma}^*\}$ 와 식 (8)을 이용하면 영역내에서 연속인 응력장이 표시될 수 있다.

4. 평형조건 만족에 의한 변위장의 반복개선

영역내에서 연속인 응력장을 $\{\sigma^*\}$ 라 하면, 이 응력장에 의한 절점력은 다음과 같이 표시된다.

$$\int_\Omega [B]^T \{\sigma^*\} d\Omega = \{f^*\} \quad (12)$$

식 (12)에서 구한 절점력 $\{f^*\}$ 은 유한요소 방정식의 원래 평형조건에서의 절점력 $\{f\}$ 과 일치하지 않기 때문에 평형조건을 만족할 수 있도록 다음과 같은 반복적인 알고리즘^(12~14)을 이용하여 변위장을 개선한다

$$\{\Delta u\}^i = [K]^{-1} (\{f\} - \sum_{element} \int_{\Omega_e} [B]^T \{\sigma^*\}^i d\Omega_e) \quad (13)$$

$$\{u\}^{i+1} = \{u\}^i + \{\Delta u\}^i, \quad i=1, 2, 3 \quad (14)$$

$$\{\sigma\}^{i+1} = [D][B]\{u\}^{i+1} \quad (15)$$

식 (8)과 식 (11) 그리고 식 (15)를 이용하여 새로운 연속응력장을 구하고, 식 (13)에서 구한 $\|\Delta u\|^i$ 가 미리 정해 놓 값보다 작을 때까지 상기 식 (8)~(15)의 과정을 반복한다.

5. 수치계산 및 검토

Fig. 2는 보 하단부의 재료상수가 보 상단부의 그것보다 100배 큰 이종재료로 구성된 직선보로서 보의 끝단에 전단하중이 작용하고 있는 예제이다.

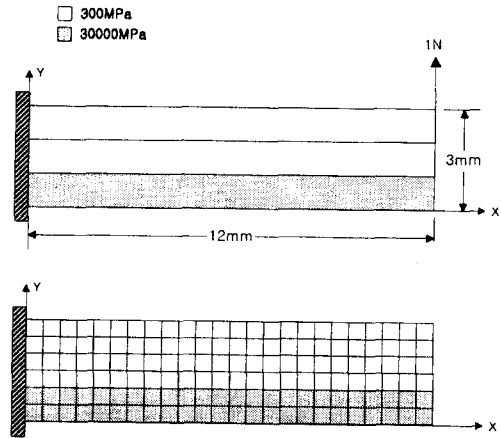


Fig. 2 A two-material cantilever beam under end load

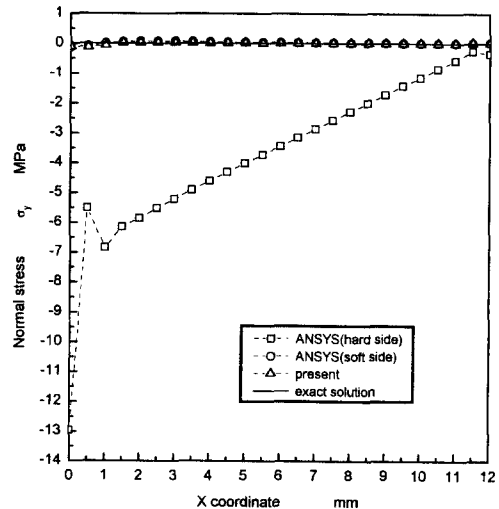


Fig. 3 Nodal normal stress on the two-material interface

이 예제를 해석할 때 평면응력상태로 가정하고 보 끝단에 전단력은 2차식 분포(quadratic distribution)로 가정하였으며, 이론해는 Muskhelishvili의 결과⁽¹⁶⁾ 참조하였다. Fig. 2의 예제를 4절점 사각형 유한요소를 사용하여 모델링하였다. Fig. 2의 유한요소 모델에 대하여 변위형 유한요소법으로부터 얻은 응력장(ANSYS 결과와 동일함)과 본 연구에서 제시한 방법으로부터 얻은 응력장 그리고 이론해를 비교하였다. Fig. 3과 4는 이론적으로는 연속이어야만 하는 접합면의 절점응력성분들, 즉 접합면의 수직응력성분(σ_y)과 전단응력성분(τ_{xy})에 대한 응력해석 결과와 이론해를 비교한 것이다. Fig. 3과

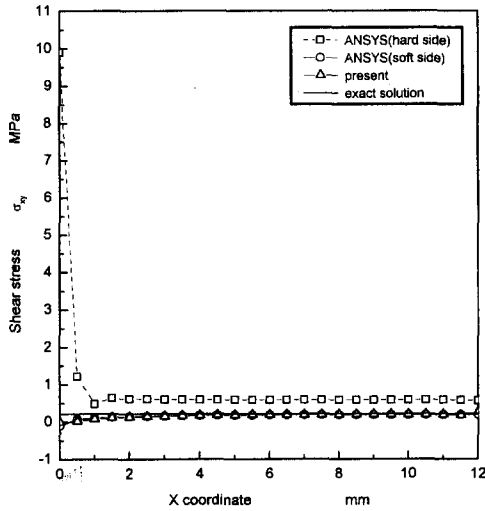


Fig. 4 Nodal shear stress on the two-material interface

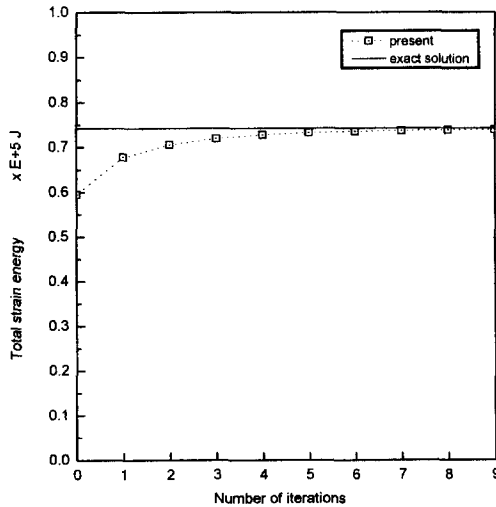


Fig. 5 Total strain energy vs. iteration numbers for the two-material cantilever beam under end shear

4에서 보면 변위형 유한요소법으로부터 얻은 접합면의 응력장에서 무른 재질 쪽(soft side)의 응력은 이론해($\sigma_y=0$, $\tau_{xy}=0.219298$ MPa)와 비슷하나 단단한 재질 쪽(hard side)의 응력은 이론해와 상당한 차이를 보이고 있어서 이중재료의 접합면에서 변위형 유한요소법에 의한 응력해석은 적절하지 못함을 알 수 있으나, 본 연구에서 얻은 접합면의 응력장은 접합면 상·하면에서 모두 연속일 뿐만 아니라 이론해와 비교할 때 보의 양 끝단을 제외하고

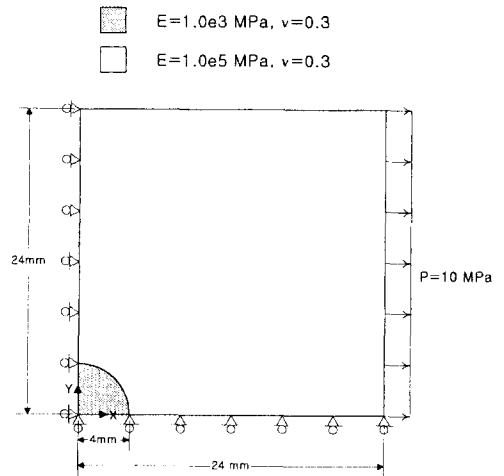


Fig. 6(a) A plate containing a circular disc of a different material under tension

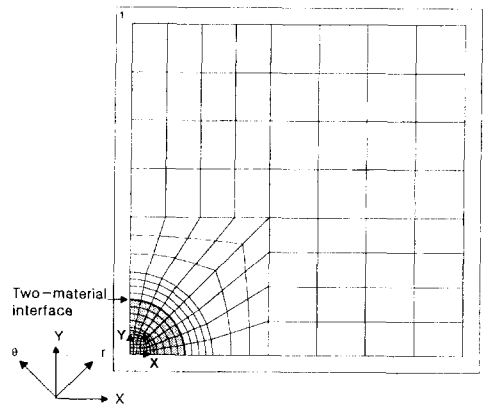


Fig. 6(b) Finite element model

는 비교적 잘 일치하고 있으며, 예전의 연구결과들(1,3,5,9)과도 잘 일치하고 있다. Fig. 5는 반복계산횟수에 따른 전체 변형률에너지의 변화를 나타낸 것이며, Fig. 5에서 반복계산횟수가 0 인 경우의 전체 변형률에너지는 Fig. 2의 유한요소 모델에 대하여 변위형 유한요소법으로부터 얻은 전체 변형률에너지(ANSYS 해석결과와 동일함)를 나타낸다. Fig. 5에서 보면 반복계산이 진행됨에 따라 전체 변형률에너지가 꾸준히 증가하여 이론해(0.74210E-1 MJ)에 근접하고 있어서 본 연구에서 제안한 방법으로 얻은 연속응력장은 접합면을 포함한 전 영역에서 정확도가 크게 개선되고 있음을 알 수 있다. 또한 수회 이내의 반복계산에서 이미 수렴하고 있어서 본 연구에서 제안한 방법은 수치계산 시간

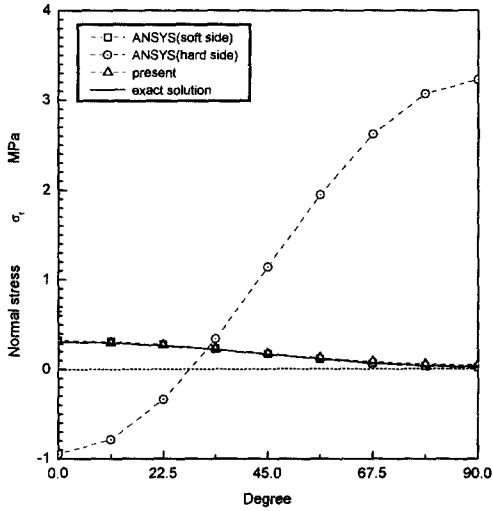


Fig. 7 Nodal normal stress on the two-material interface

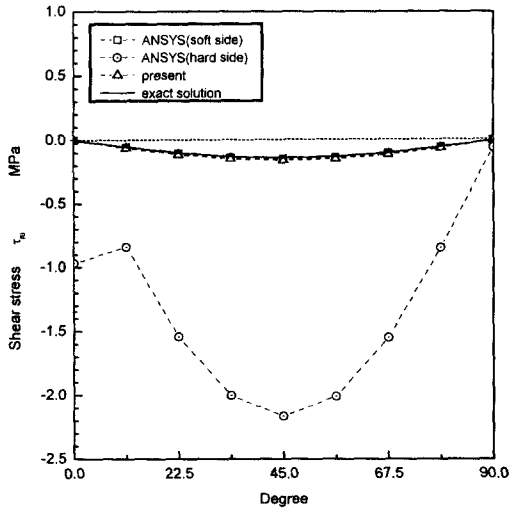


Fig. 8 Nodal shear stress on the two-material interface

이 크게 소요되지 않는 효과적인 방법임을 알 수 있다.

Fig. 6(a)는 사각판의 원형 중심부에 내재된 원형판 재료의 탄성계수가 주변 평판에 비해 100배 부르며 사각판의 양 끝단에 X축 방향으로 균일한 분포하중을 받고 있는 이종재료체에 대한 예제로서 이 예제에 대한 이론해는 Muskhelishvili⁽¹⁷⁾의 하여 구해졌다. Fig. 6(b)는 이 예제에 대하여 평면변형률 문제로 가정하고 4절점 사각형 유한요소를 사용하여 모델링한 유한요소 모델(184개의 유한

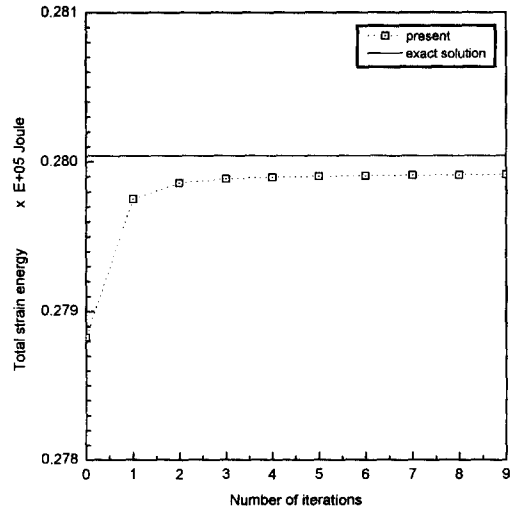


Fig. 9 Total strain energy vs. iteration numbers

요소 사용)을 나타낸 것이다. Fig. 6(b)의 유한요소 모델에 대하여 변위형 유한요소법으로부터 얻은 응력장(ANSYS⁽¹⁸⁾결과와 동일함)과 본 연구에서 제시한 방법으로부터 얻은 응력장 그리고 이론해를 비교하였다. Fig. 7과 8은 각각 이론적으로는 연속이어야만 하는 접합면의 절점응력성분들(σ_r , $\tau_{r\theta}$)에 대하여 응력해석 결과와 이론해를 비교한 것이다. Fig. 7과 8에서 보듯이 변위형 유한요소법으로부터 얻은 응력장은 접합면 상·하측에서 불연속이며 큰 차이를 보이고 있으나 본 연구에서 제시한 방법으로부터 얻은 응력장은 연속일 뿐만 아니라 이론해와 비교할 때 잘 일치하고 있다. Fig. 9는 반복계산횟수에 따른 전체 변형률에너지의 변화를 나타낸 것이며, Fig. 9에서 반복계산횟수가 0인 경우의 전체 변형률에너지는 Fig. 6(b)의 유한요소 모델에 대하여 변위형 유한요소법으로부터 얻은 전체 변형률에너지(ANSYS 해석결과와 동일함)를 나타낸다. 여기서 전체 변형률에너지의 이론값은 Fig. 6(b)의 유한요소 모델보다 유한요소의 크기를 1/4로 균일하게 세분한 유한요소 모델(2944개의 유한요소 사용)에 대하여 변위형 유한요소법으로부터 얻은 전체 변형률에너지로 가정하였다. Fig. 9에서 보면 반복계산이 진행됨에 따라 전체 변형률에너지가 Fig. 6(b)의 유한요소 모델에 대하여 변위형 유한요소법으로부터 얻은 그것보다 크게 증가하며, 수 회의 반복계산에서 이론해에 근접한 값으로 수렴하고 있어서 본 연구에서 얻은 연속응력장은 접

합면을 포함한 전 영역에서 정확도가 크게 개선되고 있음을 보여주어 있다. 한편 Fig. 6에서 보듯이 접합면(interface)을 기준으로 상, 하측으로 각 4원의 유한요소층을 국부영역 모델(submodel)로 선택하고 국부영역 대하여 벌칙함수를 부과한 응력평탄화법 및 반복적인 변위장 개선방법을 적용할 때 접합면에서 응력분포는 Fig. 7과 8의 결과와 거의 차이가 없어서 접합면을 포함한 영역에서 연속응력장 및 절점응력을 계산할 때 전체영역 모델에 대한 반복계산 대신에 국부영역 모델에 적용함으로써 수치 계산 시간을 크게 줄일 수 있음을 시사해 준다.

7. 결 론

이종재료의 접합면에서 접합응력이 같다는 조건을 벌칙함수로 부과하여 구한 유한요소 변위해와 접합응력을 기초로 하여 응력투사법에 의한 응력평탄화기법 및 Loubignac의 변위장 반복개선기법 등을 결합하여 이종재료로 구성된 복합 구조물에서 접합면을 포함한 전 영역에서 연속인 응력장을 구하는 방법을 제안하고 재료의 물성치가 100배 차이가 나는 이종재료로 구성된 직선보와 100배 무른 원형판을 내재한 사각판에 대하여 응력해석을 수행하였다. 이들 예제들에 대하여 본 연구에서의 제안한 방법으로 구한 응력해석 결과를 변위형 유한요소해 및 이론해와 비교한 결과 변위형 유한요소해는 접합면 상·하측에서 응력이 불연속일 뿐만 아니라 심하게 차이가 나며 이론해와도 많은 차이를 보이고 있는 반면, 본 연구에서 제시한 방법으로부터 얻은 응력장은 접합면을 포함한 전 영역에서 연속일 뿐만 아니라 접합면에서의 응력이 이론해에 근접하고 있음을 발견하였다. 또한 반복계산횟수가 증가함에 따라 연속응력장으로부터 구한 변형률에 너지는 변위형 유한요소해에서의 그것보다 크며 이론해에 빠르게 수렴하고 있어서 본 연구에서 제안한 방법은 수회이내의 반복계산에서 접합면을 포함한 영역에서 개선된 연속응력장을 얻을 수 있는 효과적인 방법이며, 아울러 접합면을 포함한 국부영역에도 효과적으로 적용할 수 있다.

참고문헌

- (1) Shirazi-Adl, A., 1992, "Finite Element Stress Analysis of a Push-out Test Part I: Fixed Interface Using Stress Compatible Elements," *ASME Journal of Biomechanical Engineering*, Vol. 114, pp. 111~118.
- (2) Chouchaoui, B. and Shirazi-Adl, A., 1992, "A Mixed Finite Element Formulation for the Stress Analysis of Composite Structures," *Computers & Structures*, Vol. 43, No. 4, pp. 687~698.
- (3) Angelides, M., Shirazi-Adl, A., Shrivastava, S. C. and Ahmed, A. M., 1988, "A Stress Compatible Finite Element for Implant/Cement Interface Analysis," *ASME Journal of Biomechanical Engineering*, Vol. 110, pp. 43~49.
- (4) Shirazi-Adl, A., 1989, "An Interface Continuous Stress Penalty Formulation for the Finite Element Analysis of Composite Media," *Computers & Structures*, Vol. 33, No. 4, pp. 951~956.
- (5) Kim, D. S., 1994, "Finite Element Analysis of Bonding Problems Based on a New Mixed Variational Principle," Ph. D. Thesis, KAIST.
- (6) Erdogan, F. and Ratwani, M., 1971, "Stress Distribution in Bonded Joints," *Journal of Composite Materials*, Vol. 5, pp. 378~392.
- (7) Erdogan, F. and Arin, K., 1972, "A Sandwich Plate with a Part-through and Debonding Crack," *Journal of Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 4, pp. 449~458.
- (8) Goland, M. and Reissner, E., 1944, "The Stresses in Cemented Joints," *Journal of Applied Mechanics, Trans. ASME*, Vol. 1, No. 1, pp. (A. 17)~(A. 27).
- (9) Kim, Y. H., 1994, "Analysis of 2-D Bonding Problems Using Perturbed Lagrangian Method," M. S. Thesis, KAIST.
- (10) Brauchli, H. J. and Oden, J. T., 1971, "Conjugate Approximation Function in Finite Element Analysis," *Quarterly of Applied Mathematics*, No. 1, pp. 65~90.
- (11) Hinton, E. and Campbell, J. S., 1974, "Local and Global Smoothing of Discontinuous Finite Element Functions Using a Least Squares Method," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 8, pp. 461~480.
- (12) Loubignac, G., Cantin, G. and Touzot, G., 1977, "Continuous Stress Field in Finite Element

- Analysis," *AIAA Journal*, Vol. 15, No. 11, pp. 1645~1646.
- (13) Zienkiewicz, O. C., Li Xi-Kui and Nakazawa, S., 1985, "Iterative Solution of Mixed Problems and the Stress Recovery Procedures," *Communications in Applied Numerical Method*, Vol. 1, pp. 3~9.
- (14) Hwang, W. C. and Sun, C. T., 1987, "Iterative Study for Three-dimensional Finite Element Stress Analysis," *AIAA Journal*, Vol. 25, No. 12, pp. 1636~1638.
- (15) Song, K. N., 1997, "A Study on the Improvement of the Local Stress Field Using the Theory of Conjugate Approximation and Loubignac's Iterative Method," *Journal of KSME (A)*, Vol. 21, No. 10, pp. 1598~1608.
- (16) Muskhelishvili, N. I., 1963, *Some Basic Problems of Mathematical Theory of Elasticity (Translated by J. R. M. Radok)*, Noordhoff, Groningen, Holland, pp. 641~649.
- (17) *ibid.*, pp. 205~229.
- (18) *ANSYS User's Manual for Revision 5.0*, 1992, Swanson Analysis System, Inc.