

<논 문>

구조물 진동·소음의 수치해석시 최적 요소크기는 $\frac{\lambda}{4}$ 이다.

김 정 태* · 강 준 수**

(1997년 4월 28일 접수)

Optimum Mesh Size of the Numerical Analysis for Structural Vibration and Noise Prediction

Jeung-Tae Kim and Jun-Soo Kang

Key Words : Optimum Mesh Size(최적 요소 크기), Structural Vibration(구조물 진동), Natural Frequency(고유진동수), Modal Density(모드밀도), Driving Point Mobility(가진점 속도비)

Abstract

An engineering goal in vibration and noise professionals is to develop quiet machines at the preliminary design stage, and various numerical techniques such as FEM, SEA or BEM are one of the schemes toward the goal. In this paper, the research has been focused on the sensitivity effect of mesh sizes for FEM application so that the optimum size of the mesh that leads to engineering solution within acceptable computing time could be generated. In order to evaluate the mesh size effect, three important parameters have been examined : natural frequencies, number of modes and driving point mobility. First, several lower modes including the fundamental frequency of a 2-D plate structure have been calculated as mesh size changes. Since theoretical values of natural frequencies for a simple structure are known, the deviation between the numerical and theoretical values is obtained as a function of mesh size. The result shows that the error is no longer decreased if the mesh size becomes a quarter wavelength or smaller than that. Second, the mesh size effect is also investigated for the number of modes. For the frequency band up to 1.4 kHz, the structure should have 38 modes in total. As the mesh size reaches to the quarter wavelength, the total count in modes approaches to the same values. Third, a mobility function at the driving point is compared between SEA and FEM result. In SEA application, the mobility function is determined by the modal density and the mass of the structure. It is independent of excitation frequencies. When the mobility function is calculated from a wavelength to one-tenth of it, the mobility becomes constant if the mesh becomes a quarter wavelength or smaller. We can conclude that dynamic parameters, such as eigenvalues, mode count, and mobility function, can be correctly estimated, while saving the computing burden, if a quarter wavelength ($\frac{\lambda}{4}$) mesh is used. Therefore, ($\frac{\lambda}{4}$) mesh is recommended in structural vibration analysis.

*회원, 홍익대학교 기계공학과

**한국전력공사

1. 서 론

수치해석적인 방법을 통한 구조물의 진동해석은 구조물의 표면진동값을 예측하기 위한 것으로써 통상 유한요소법(FEM)을 많이 이용한다. 그런데 유한요소해석에서, 진동결과는 구조물을 모델링할 때의 요소의 크기에 의해 크게 영향을 받으며, 요소의 크기가 작을수록 정확한 결과를 얻을 수 있다고 알려져 있다. 그러나 고주파수 대역의 해석 경우에는 요소의 크기가 작을수록 계산량은 기하급수적으로 크게 증가하게 되고, 그 결과 수치해석의 오차는 많이 나타나게 된다.

한편, 여러 종류의 소음진동 수치해석 상용프로그램에서는 코드 개발자에 따라 요소크기를 파장의 1/3, 1/4 또는 1/6 등을 추천하는 등 다양한 값을 사용하고 있다.^(1~3)

따라서, 유한요소법을 이용한 진동해석시 구조물의 동특성을 비교적 정확히 나타낼 수 있는 적당한 요소의 크기로 모델링하는 것이 해석시간을 절약하고 합리적인 해석결과를 얻는데 매우 중요하다.

본 연구에서는 주요 동특성변수인 고유진동수(natural frequency), 모드밀도와 가진점 속도비(driving point mobility) 값을 이용하여 구조물을 모델링하는데 필요한 최적의 요소의 크기를 구하였다.

2. 구조물의 진동전달 특성

기계구조물은 기계적인 충격 등과 같은 외부 가진에 의해 진동이 유발된다. 이때 2차원 평판구조의 경우, 수직방향 w 의 운동방정식은 다음과 같다.⁽⁴⁾

$$D\nabla^4 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \quad (1)$$

여기서, D 는 평판의 굽힘강성, E 는 영률, h 는 판의 두께, ρ 평판의 밀도, ν 는 푸아송비를 나타낸다.

평판이 조화운동을 하는 경우, x 방향으로 진행하는 파동에 대한 식 (1)의 완전해는 다음과 같으며,

$$w = (Ae^{k_b x} + Be^{-k_b x} + Ce^{-jk_b x} + De^{jk_b x}) e^{j\omega t}$$

$$k_b = \left(\frac{\rho h \omega^2}{D} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (2)$$

k_b 는 굽힘파의 파동수(wave number)를 나타낸다.

식 (2)에서 처음 두항은 파동이 발생위치로부터 멀어짐에 따라 감쇠하는 비전파성 파동으로서 전혀 진동에너지 전달하지 못하며, 나머지 두 항은 전파성 파동으로서 공간상에서 정현파형을 가지는 실제 굽힘파이다. 진동에너지는 주로 굽힘파(bending wave)에 의해 전달되며, 굽힘파가 구조물을 통해 전달되는 속도(phase velocity)는 다음과 같다.⁽⁵⁾

$$C_b = \sqrt{\omega \cdot \kappa \cdot C_l} \quad (3)$$

여기서, C_l 는 평판에서의 종파(longitudinal wave)의 속도로서 $(E/\rho(1-\nu^2))^{1/2}$ 의 값을 가지며, κ 는 구조물의 강성과 관련된 값으로서 일정한 두께 h 를 갖는 평판의 경우 $h/\sqrt{12}$ 의 값을 갖는다.

윗 식에서 보는 바와 같이 굽힘파의 속도는 주파수의 함수로서 주파수에 따라 변하는 분산(dispersion) 특성을 가지고 있다. 이 특징은 진동에너지를 저장하는데 필요한 구조물의 모드개수와 공진주파수에 큰 영향을 미치게 되며, 이와 관련된 진동전달 특성으로는 모드밀도(modal density)와 속도비(mobility)가 있다.⁽⁶⁾

2.1 모드밀도

Fig. 1과 같이 두변의 길이가 각각 a, b 인 직사각형 평판으로서 경계조건이 4변 단순지지일 때 운동방정식 (1)을 만족하는 모드형상(mode shape)은 다음과 같다.

$$\Psi_{mn} = A_{mn} \sin k_m x \sin k_n y \quad (4)$$

$$k_m = \frac{m\pi}{a}, \quad k_n = \frac{n\pi}{b} \quad (m, n=1, 2, 3, \dots)$$

여기서, k_m 과 k_n 은 각각 x, y 방향의 파동수(wave number)를 나타낸다.

한편, 고유진동수에 대한 식은 다음과 같다.

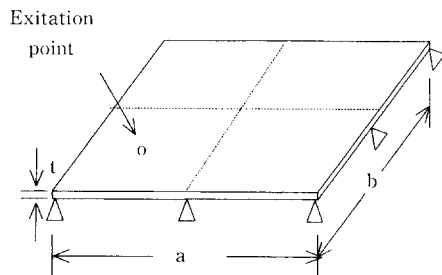


Fig. 1 The shape for a simple plate

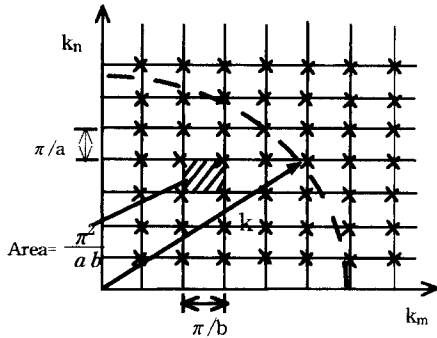


Fig. 2 Two dimensional wave number lattice for a simple plate

$$\omega_{mn} = \sqrt{\frac{D}{\rho h}} (k_m^2 + k_n^2) \cdot \alpha \cdot C_l (k_m^2 + k_n^2) \quad (5)$$

식 (5)를 식 (3)과 비교하면 다음과 같은 관계식을 얻을 수 있다.

$$k^2 = k_m^2 + k_n^2 \quad (6)$$

Fig. 2는 2차원 평판구조의 고유진동모드에 대한 관계식 (6)을 격자형태로 나타낸 것이다. Fig. 2에서 k_m , k_n 의 모드간 간격은 각각 π/a , π/b 이고, 각각의 격자점은 하나의 진동모드에 해당된다. 따라서 임의의 파동수 k 까지 존재하는 모드개수를 다음과 같이 근사적으로 나타낼 수 있다.

$$N(k) = \frac{\frac{1}{4} \text{원의 종면적}}{\text{모드당 면적}} = \frac{k^2 A}{4\pi} \quad (7)$$

여기서, A 는 평판의 표면적을 나타내며, 위 식을 주파수의 함수로 나타내면 다음과 같다.

$$N(f) = \frac{A \cdot f}{2 \cdot \alpha \cdot C_l} \quad (8)$$

주파수의 변화에 따른 모드개수의 변화는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$n(f) = \frac{dN}{df} = \frac{A}{2 \cdot \alpha \cdot C_l} \quad (9)$$

식 (9)는 2차원 평판구조의 모드밀도를 나타내며 그 역수는 모드간 평균주파수 간격을 의미하는데 다음과 같다.

$$\overline{\delta f} = \frac{1}{n(f)} = \frac{t \cdot C_l}{\sqrt{3} \cdot A} \quad (10)$$

위 식에서 보는 바와 같이 2차원 평판구조의 경우, 모드밀도는 주파수와는 무관하고 기하학적 인

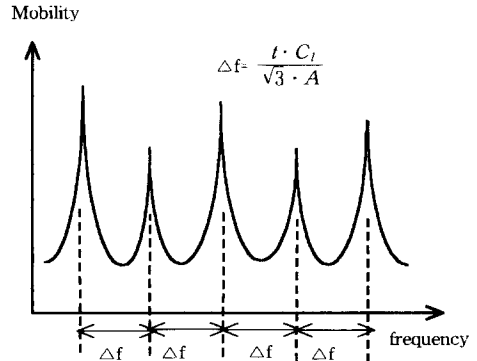


Fig. 3 The average frequency separation between modes for a plate

자(표면적과 두께)에 의해서 결정되며 모드간 일정한 주파수 간격을 유지하리라는 것을 예상할 수 있다. Fig. 3은 평판구조의 모드간 평균주파수 간격이 일정함을 보여주고 있다.

그러나 빔(beam)과 같은 1차원 구조의 경우 모드밀도는 이와 다르며 다음과 같다.

$$n(f) = \frac{L}{C_b} = \frac{L}{\sqrt{2\pi} \cdot f \cdot \alpha \cdot C_l} \quad (11)$$

여기서, L 은 구조물의 길이를 나타낸다. 즉 굽힘파(bending wave)의 경우, 1차원 구조물에서의 모드밀도는 주파수에 따라 변하며 모드간 평균 주파수 간격도 일정한 2차원 평판구조와는 달리 \sqrt{f} 비례함을 알 수 있다.

2.2 가진점 속도비

전달함수(transfer function)는 외부가진에 대한 시스템의 반응을 나타내는 함수로서 속도비(mobility)가 그 대표적인 전달함수다. 속도비(mobility)는 속도와 가진력의 비로서 정의되며, 자유도계의 수에 따라 1자유도계 또는 다자유도계로 나눌 수 있다. 1자유도계의 경우 속도비는 다음과 같이 표현된다.

$$M(\omega) = \frac{j\omega}{M} \frac{1}{\omega_0^2 \omega^2 + j\omega_0 \omega \eta} \quad (12)$$

여기서, ω_0 는 고유진동수, η 는 감쇠계수, ω 는 가진주파수를 나타낸다.

그러나 평판과 같은 연속체 구조물은 다자유도계이며 이러한 다자유도계의 문제는 보통 1자유도계의 중점으로 해석이 가능하다. 따라서 다자유도계의 속도비는 다음과 같이 나타낼 수가 있으며,⁽⁶⁾

Table 1 Material Property for the simple plate.

Material	Young's modulus (GPa)	Density (kg/m ³)	Poisson ratio
Al	71	2700	0.33

Table 2 Dimensions for the simple plate (mm)

a	b	t	B, C
1000	600	6	S. S. S. S

$$M(\omega) = \frac{j\omega \sum_n \frac{\psi_n(x_s)\psi_n(x_o)}{\omega_n^2 - \omega^2 + j\omega_n\omega\eta}}{M} \quad (13)$$

$\psi_n(x_s)$ 는 가진점의 모드형상, $\psi_n(x_o)$ 는 측정점의 모드형상을 나타낸다.

속도비중에서 가진력과 속도를 동일한 위치에서 측정하여 계산한 값을 가진점 속도비(driving point mobility)라고 한다. 평판의 경우, 가진점 속도비의 실수부는 임의의 주파수 밴드에서의 평균값을 가진점이 가지고 있는 에너지와 평판의 감쇠에 의해 소산되는 에너지와의 관계로부터 다음과 같이 구할 수가 있다.

$$M_{ip} = \frac{n(f)}{4 \cdot M} = \frac{1}{8 \cdot \chi \cdot C_i \cdot \rho_s} \quad (14)$$

여기서, M 은 평판의 질량을, ρ_s 는 단위면적당 밀도를 나타낸다. 가진점 속도비의 실수부는 외부가 진원에 의해 구조물에 유입되는 에너지의 크기를 의미하므로 양(+)의 값을 갖게 된다. 위 식에서 가진점 속도비의 실수부는 모드밀도에 비례하는데 이는 가진원의 에너지를 흡수할 수 있는 모드개수와 관계가 있음을 의미한다. 이와 같이 가진점 속도비는 구조물의 진동해석시에 중요하게 쓰이며, 특히 구조물에 가해지는 에너지를 계산하거나 구조물의 위상조건을 알고자 할 때 필요하다.⁽⁷⁾

3. 요소크기의 영향검토

3.1 대상모델

본 연구에서는 재질이 균일하고 등방성인 단순평판을 대상으로 유한요소해석을 이용하여 진동해석을 수행하였다. 이는 유한요소해석 모델링시 구조물의 동특성을 비교적 정확히 나타낼 수 있는 최적의 요소크기를 구하고자 한 것이다.

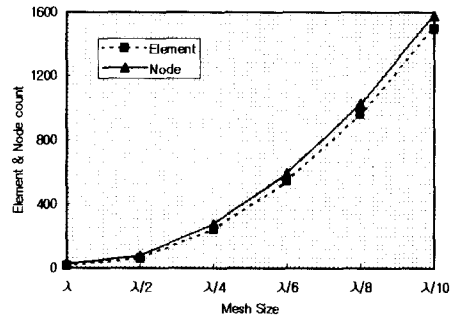


Fig. 4 The number of element and node in various mesh sizes

사용된 평판의 재질은 알루미늄이며, 형상은 사각형으로 하였다. 그리고 경계조건은 4변 단순지지로서 평판을 구속하였다.

Fig. 1은 그 형상을 도식적으로 보여주고 있으며, 평판의 재료특성값(material property)과 기하학적 치수는 Table 1과 Table 2에 제시되어 있다.

유한요소해석은 상용프로그램인 ANSYS를 사용하였으며, 요소(element type)는 4절점 셸(shell) 요소를 사용하여 구조물을 모델링하였다.⁽⁸⁾

측정변수로는 동특성 변수인 고유진동수(natural frequency)와 가진점 모빌리티(driving point mobility)를 대상으로 하여 모드해석(modal analysis)과 주파수응답해석(frequency response analysis)을 수행하였다. 최대해석주파수는 중심주파수가 1,000 Hz인 옥타브 밴드의 상한 주파수 1,414 Hz로 제한하였고, 이때 이에 해당하는 압힘파의 파장의 길이(0.2 m)를 기준으로 하여 요소의 크기를 변화시켜 가면서 해석을 수행하였다.

Fig. 4에 요소의 크기에 대한 요소와 절점의 개수가 나타나 있다. 요소의 크기가 작을수록 요소와 절점의 개수는 크게 증가하고 있음을 볼 수 있다. 특히 요소의 크기가 반으로 줄어들면 요소와 절점의 개수는 기하학적으로 증가하고 있다. 따라서 요소의 크기가 작아질수록 해석시간이 급격히 증가하리라는 것을 예상할 수가 있다.

3.2 고유진동수의 영향

평판이론에 의하면 경계조건이 4변 단순지지인 경우, 1차모드에 해당하는 고유진동수는 55.83 Hz이고, 2차모드는 100.17 Hz, 3차모드는 174.07 Hz이며 4차모드는 179.00 Hz로 판정되었다.

본 연구에서는 유한요소해석으로 모드해석(modal

Table 3 Natural Frequency in various mesh sizes. (% Error)

Element	λ	$\lambda/2$	$\lambda/4$	$\lambda/6$	$\lambda/8$	$\lambda/10$	Theory (m, n)
1	54.93(1.6)	55.58(0.44)	55.77(0.11)	55.81(0.04)	55.82(0.02)	55.83(0.01)	55.83(1, 1)
2	97.00(3.17)	99.26(0.92)	99.93(0.24)	100.07(0.1)	100.11(0.06)	100.13(0.04)	100.17(2, 1)
3	166.42(4.40)	171.94(1.22)	173.49(0.33)	173.83(0.14)	173.92(0.09)	173.98(0.05)	174.07(3, 1)
4	175.64(1.88)	177.74(0.71)	178.63(0.21)	178.84(0.09)	178.90(0.06)	178.94(0.03)	179.00(1, 2)

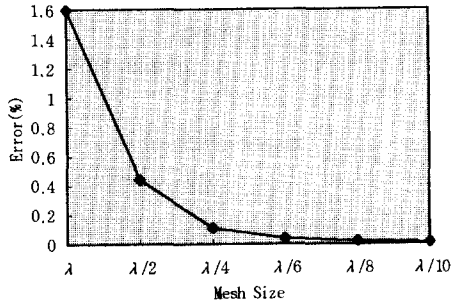


Fig. 5 First mode error in natural frequency for a simple plate

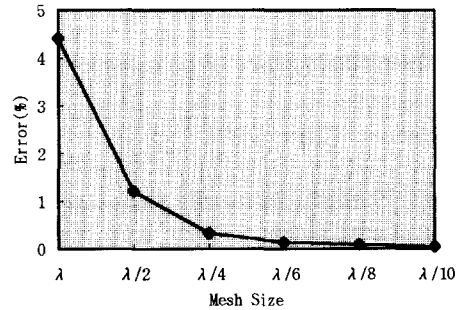


Fig. 7 Third mode error in natural frequency for a simple plate

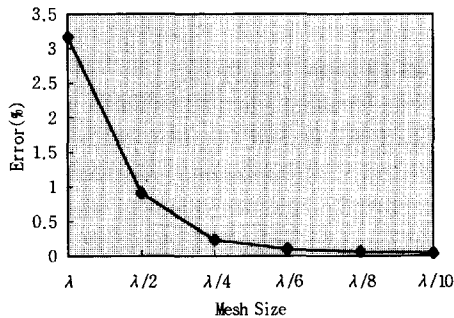


Fig. 6 Second mode error in natural frequency for a simple plate

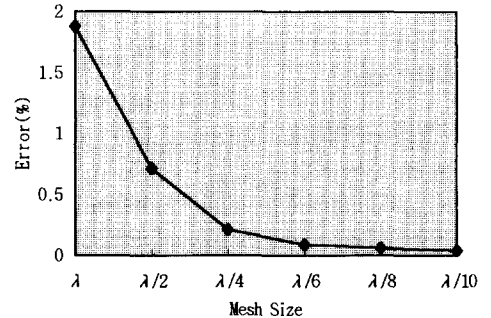


Fig. 8 Fourth mode error in natural frequency for a simple plate

analysis)을 수행하여 고유진동수를 4차모드까지 요소의 크기에 따라 구하고 이를 평판이론값과 비교분석하여 오차를 계산하였다.

Table 3에 4차모드까지의 고유진동수의 오차가 전체적으로 제시되어 있다. 그리고 Fig. 5와 Fig. 6은 1차모드와 2차모드, Fig. 7과 Fig. 8은 3차모드와 4차모드의 평판이론값과의 오차를 요소의 크기 별로 보여주고 있다. 그리고 4차모드까지의 오차자승(squared error)을 구한 결과가 Fig. 9에 나타나 있다. 비교결과, 요소의 크기가 작을수록 오차가 줄어들고 있음을 알 수 있다. 특히, 파장당 4개의 요소로 모델링한 경우 오차가 1차모드는 0.11%, 2

차모드는 0.24%, 3차모드는 0.33%, 4차모드는 0.21%로써 그 결과가 매우 정확하다는 것을 알 수 있다. 그리고 파장당 4개의 요소보다 더 조밀하게 모델링하여도 오차의 변화율은 거의 미미함을 알 수 있다.

3.3 모드수에 대한 영향

요소의 크기에 따른 모드개수의 변화를 계산하기 위해 유한요소해석을 수행하였다. 먼저 최대 해석주파수 범위내에 존재하는 총 모드개수를 요소의 크기에 따라 구하고 이를 평판이론값과 비교하였다. 최대 해석주파수 범위는 1,000 Hz 옥타브 밴

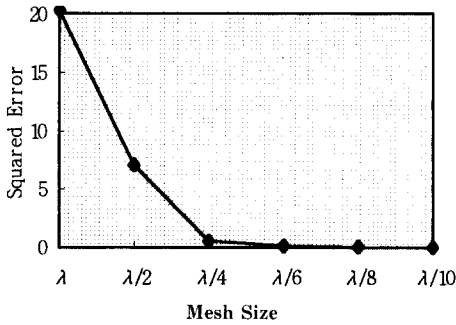


Fig. 9 The overall error in natural frequency for a simple plate

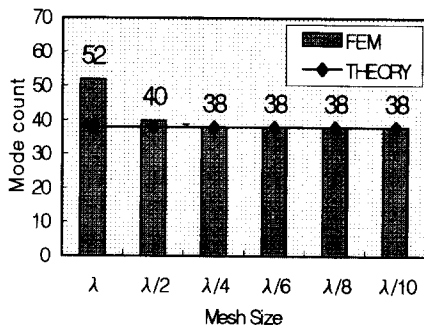


Fig. 10 Mode count in finite element analysis

드로 제한하였으며, 이때 평판이론에 의한 총 모드 개수는 38개로 판정되었다.

Fig. 10에 해석결과가 나타나 있다. Fig.에서 보는 바와 같이 요소의 크기가 작을수록 유한요소해석으로 구한 모드의 개수가 평판이론값에 접근함을 알 수 있으며, 최대 해석주파수에 해당하는 파장당 4개의 요소로 모델링했을 때부터 총 모드개수는 38개로 이론값과 일치하고 있음을 알 수 있다.

참고로, 통계적 에너지해석기법(SEA)을 이용하여 모드개수를 구하면 동일한 주파수대역에서 나타나는 총 모드개수는 48개가 된다. 이것은, 통계적 에너지해석기법의 적용이 어려운 저주파대역이 포함되었기 때문이다.

3.4 가진점 속도비의 영향

가진점 속도비를 계산하기 위하여 주파수응답해석을 수행하였다. 최대 해석주파수는 1,414 Hz까지며, 1 Hz 간격으로 가진점 속도비의 실수값을 구하였다. 평판의 경우 가진점 속도비의 실수값은 식 (14)로 표현되므로, 이론적으로는 주파수와 무관한 일정한 값을 가진다. 본 연구에서는 가진점

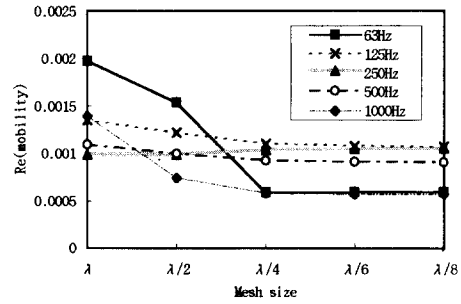


Fig. 11 Driving point mobility in octave bands for various mesh sizes

속도비를 옥타브 밴드별로 산술평균값을 구하였다. 이때 가진점과

측정점의 위치는 3사분면의 정 중앙점으로 서 가진력의 크기는 단위 가진력으로 하였다. Fig. 1에 가진점의 위치가 표시되어 있다. 또한 판의상재료의 감쇠비(damping ratio)는 전 주파수대역에 걸쳐 일정한 값인 0.01로 가정하였다.

한편, 가진점 속도비는 이론적으로 값은 존재하지 않으나, 통계적 에너지해석기법 등에서 계산할 수는 있다. 이 값이 의미가 있기 위해서는 통계처리가 가능하도록 모드밀도가 높은 고주파수대역에서 적용해야 한다. 따라서 본 연구에서의 유한요소 해석결과치의 비교대상은 존재하지 않기 때문에 본 연구에서는 해석결과치의 변화가 크게 줄어드는 요소의 크기가 존재하리라는 가정하에 해석을 수행하였다.

해석을 수행한 결과가 Fig. 11에 나타나 있다. 정확한 가진점 속도비값은 사용된 재료의 감쇠비에 의해 결정될 것이다. 그러나 본 해석에서는 감쇠비의 예상값의 사용으로 해석의 정밀도는 일정한 값에 수렴하는 정도로 하였다. 즉, 식 (14)에 의해 평판의 가진점 속도비는 주파수와 무관한 일정한 값을 가지는 특성을 가지고 있다. 따라서, Fig. 11에 보여져 있는 경향중에서 일정한 값에 수렴하는 영역이 올바르게 수치해석된 결과라 할 수 있다. Fig. 11은 옥타브 밴드별로 요소의 크기에 따른 가진점 모빌리티의 실수부의 평균값을 보여주고 있다. 전 옥타브 밴드에서 요소의 크기가 작아질수록 일정한 값으로 수렴하고 있으며, 특히 파장당 4개의 요소로 모델링했을 때부터 평균값의 변화가 크게 줄어들음을 알 수 있다.

이와 같이, 앞에서 검토된 바와 같이, 올바른 고유진동수의 예측, 모드수의 판정시 최소한의 오차,

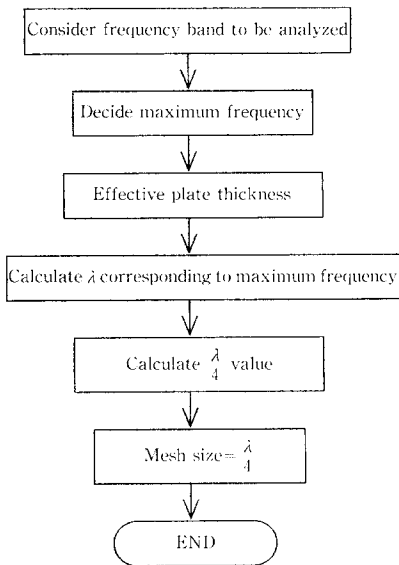


Fig. 12 Flow for the optimum mesh size calculation

가진점 속도비 해석시 이론값에의 수렴특성 등, 3가지 측면의 물리량으로부터 도출된 결과는 수치해석시 파장의 1/4되는 단위요소의 사용이 바람직하다고 판단된다. 실제 구조물의 진동·소음해석시 $\lambda/4$ 의 요소크기로 계산하는 대략적인 흐름도는 Fig. 12에 정리되어 있다.

4. 결 론

본 연구에서는 구조물 진동의 유한요소해석에서 구조물의 동특성을 비교적 정확히 나타낼 수 있는 최적의 요소의 크기를 구하고자 하였다. 추정변수로는 대표적 동특성변수인 고유진동수와 모드계수 그리고 가진점 속도비를 대상으로 하였으며, 요소의 크기에 따라 유한요소해석을 수행하고 그 결과를 평판이론값과 비교 분석하였다.

고유진동수에 대한 해석결과는 요소의 크기가 최대 해석주파수 파장의 1/4일 때부터 이론값과의 오차가 더 이상 줄어들지 않음을 보여주었다. 모드계수 또한 1.4 Hz까지 유한요소해석으로 구한 결과, 요소의 크기가 작을수록 모드계수는 이론값에 접근하였고, 특히 파장의 1/4일 때부터는 정확한 이론값인 38개를 나타내었다. 옥타브 밴드별로 가진점 속도비의 실수부의 평균값을 구한 결과도 같은 경향을 보여주었는데, 요소의 크기가 파장의 1/4일 때부터 전 옥타브 밴드에서 일정한 값을 보여주었

다.

유한요소해석을 수행한 결과, 요소의 크기가 너무 작은 경우에는 그 오차의 변화율이 아주 미미한 반면, 해석시간은 크게 증가하는 경향을 보여주었다. 이러한 경향은 구조물의 모델링시 적당한 요소 크기의 도입이라는 문제를 제기하고 있다. 이러한 문제에 대한 해결책으로 본 연구에서는 해석주파수의 파장당 4개의 요소로 모델링하는 것이 가장 합리적이고 경제적이라는 결과를 도출하였다.

따라서 유한요소법을 이용하여 진동해석을 수행하는 경우 최적의 요소의 크기는 해석주파수의 파장의 1/4이라고 판단된다. 이러한 요소의 크기로 구조물을 모델링한다면 비교적 정확한 구조물의 동특성을 나타낼 수가 있으며, 합리적인 해석결과와 함께 해석시간도 크게 절약할 수 있으리라 판단된다.

후 기

본 연구는 '96년도 교육부 학술연구조성비(기계공학 : ME 96 D 29)에 의하여 연구되었습니다. 연구비를 지원해 준 관계기관에 감사드립니다.

참고문헌

- (1) Bernhard, R. J. and Keltie, R. F. (Eds), 1989 "Numerical Techniques in Acoustic Radiation," *WAM Meeting of ASME, NCA Vol 6, Dec 10-15.*
- (2) AAC, *COMET Acoustics, User Document*, 1994.
- (3) *SYSNOISE Rev. 5.1, User's Manual*, 1994.
- (4) Leissa, A. W., 1969 "Vibration of Plate," *NASA SP-160.*
- (5) Lyon, R. H., 1987, *Machinery Noise and Diagnostics*, Butterworths, 1987.
- (6) Smith, P. W. and Lyon, R. H., 1965 "Sound and Structural Radiation," *NASA CR-160.*
- (7) 김정태, 김동희, 이용봉, 1991 "모드 평면을 이용한 원통형 구조물의 고유진동수 해석에 관한 연구," *대한국체학회논문집*, 제15권, 제3호, pp. 789~798.
- (8) *ANSYS Rev. 5.0, User's Manual.*