〈논 문〉

4륜구동 차량구동계의 비틀림진동 특성에 관한 연구

최은오* · 김희송** · 홍동표***

(1997년 5월 8일 접수)

A Study on the Characteristics of Torsional Vibration for 4×4 Vehicles Drivetrain

Eun-O Choi, Hei-Song Kim and Dong-Pyo Hong

Key Words: Torsional Vibration(비틀림진동), Natural Frequency(고유진동수), Mode Shape(모드형), Resonance(공진), Angular Acceleration(각가속도), Frequency Response Characteristics(주파수응답특성)

Abstract

Torsional vibration is to vibrate strongly when the ignition pulses of the engine is excited with natural frequency of driveline. Torsional vibration like this can cause various noises as rattle and booming. For this study multi-degree of freedom analysis model of torsional vibration, which is combined with mass moment of inertia and torsional spring, was developed toward two wheel drive, four wheel drive and torsional vibration characteristics were compared and analyzed through the natural frequences, mode shapes and frequency response charateristics which was acquired by the simulation of it. The pertinence of that model was proved by the field test and the outcome of the simulations coincided with feeling test. Therefore, four wheel drive simulation model is considered to be useful thing for reducing torsional vibration of driveline and developing full-time four wheel drive vehicles.

1. 서 론

차량의 구동계는 진동을 발생시키는 많은 요소들로 이루어져 있으며, 구동계의 비틀림진동은 엔진의 폭발로 가진되지만 유니버셜 조인트(universal joint)와 같은 다른 원인에 의해서도 가진된다. 경제성과 공간성의 이유로 유니버셜 조인트가 구동계에 대부분 널리 사용되고 있으나, 유니버셜 조인트는 각이 존재할시 1회전당 2회 가진된다. 기어 전달오차는 물림주파수로 가진하며, 이것은 구동계를 국부적으로 가진하고 소음을 만드는 고주파 가진이다. 엔진의 관성력(inertia force)은 구동계를 가진시킬 수 있으며, 구동계에서 구조적 공진을 일으킨다. 대부분의 토크변동이 플라이휠에서 흡수되지만 저주파 진동은 구동계로 전달된다. 구동계는 무한개의 고유진동수가 있으며 엔진 폭발이 이러한 고유진동수중 하나로 구동계를 가진하면 대부분 심각한 진동을 한다. 이것이 비틀림진동의 원인이다.[1] 이러한 비틀림진동은 치타음(rattle noise), 부밍음(booming noise) 등을 야기시킬 수 있으며, 진동·소음문제는 구동계가 공진(resonance)될 때 일어나기 쉽다. 또한 공진은 좁은 주파수대역이며, 거기서 기계적 구조의 고유진동수가 진동을 증폭한다.

*회원, 단국대학교 대학원 기계공학과
**회원, 단국대학교 기계공학과
***회원, 전북대학교 정밀기계공학과

최근에는 소비계층의 다양화와 함께 레저용이나 경트럭에서 4륜구동 차량의 수요가 점차 증가하고 있으나, 구동계의 복잡성으로 인하여 다양한 소음·진동문제가 발생되고 있다. 4륜구동 차량의 구동계는 변속기에 중간변속기(transfer case)가 결합되고 전후 추진축(propeller shaft)으로 동력이 분배되며, 두개의 전후 디퍼렌셜(front & rear differential)과 네개의 엑슬-샤프트(axle shaft)가 덧붙여지는 복잡한 구조이다. 자동차구동계를 진동계의 관점으로 보면 진동전달계(shaft, joint, suspension)에 연결되어 있고, 소음방사(vehicle body)되는 가진원(engine, transmission, axle)구조이다.[2]

구동계의 비틀림진동은 최근 4륜구동 차량의 증가로 인해 관심이 높아지고 있으며, 컴퓨터 시뮬레이션은 이러한 문제를 해석하는데 효과적이다. Kataoka[3,4]는 기어의 공차(clearance)를 고려한 변속기의 강제 비틀림진동을 해석하였으며, Arai[5]는 클러치 접속시 발생하는 외란과 계의 안정성을 고려하여 시뮬레이션을 수행하였고, Petrl[6]은 엔진의 가진원들과 이로 인해 발생하는 현상들과 그 특성에 대해 설명하였다. Ttomas[7]와 Petkus[8]는 특정차량의 동력전달계 비틀림 특성에 관한 데이터베이스를 통해 비틀림진동 컴퓨터 프로그램을 개발하였다.

본 연구에서는 변환방식 4륜구동(part-time four wheel drive) 차량에 대해 2륜구동과 4륜구동시에 대한 질량관성모멘트와 비틀림스프링이 조합된 다자유도 비틀림진동 해석모델을 개발하였으며, 시뮬레이션을 통해 고유진동수와 모드형 그리고 주파수응답특성을 구하여 비틀림진동 특성을 비교 분석하였으며 구동계 요소들의 비틀림강성의 기여도를 조사하였다. 그리고 실차 실험으로 모델의 타당성을 검증하였고 관능평가와도 일치함을 보였다. 이로써 개발된 4륜구동 해석모델은 상시 4륜구동 개발 및 구동계 비틀림진동 저감에 유용할 것으로 생각된다.

2. 구동계 비틀림진동 해석

2.1 진동·소음현상

주행시 실내 소음 계측결과를 4륜구동시와 2륜구동시로 비교하여 Fig. 1에 나타냈다. 주행시험장에서 3단으로 엔진회전속도를 4000 rpm 까지 서서히 증가시키면서 실내 소음을 계측하였다. 여기서, 2륜구동시와 비교하여 4륜구동 주행시 엔진 회전속도 3100 rpm의 피크치에서 부밍음은 줄지만 그외 영역은 다소 악화되는 결과를 보였다. 또한 2150 rpm에서는 2륜구동시에는 피크가 보이지 않고 4륜구동시에만 피크가 나타나고 있다. 이는 실험 전문운전자의 관능평가에서 4륜구동시 2150 rpm 부근에서 4륜구동 구동계에 의한 공진으로 판단하였다. 계측치에서도 2150 rpm, 즉 엔진 가진의 4차 차수인 143.5 Hz부근에서 4륜구동으로 인한 구동계 공진으로 추정하였다. 이러한 현상의 효과적인 규명을 위하여 구동계 비틀림진동에 대한 2륜구동·4륜구동의 컴퓨터 시뮬레이션 모델을 세웠고, 그 모델로 자유진동해석을 수행하여 고유진동수와 모드형을 조사하였다. 그리고 컴퓨터상의 모의가진실험으로 비틀림진동에 영향이 큰 질량요소와 강성요소들에 대한 주파수응답을 분석하였다.

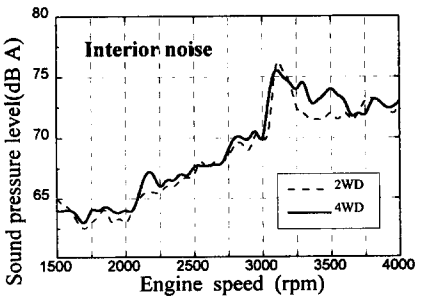

Fig. 1 Noise in the interior

2.2 구동계 모델링

2륜구동시의 시뮬레이션 모델을 Fig. 2에 나타냈으며, 4륜구동시의 시뮬레이션 모델을 Fig. 3에 나타냈다. 주행시 구동계 전체의 비틀림진동을 해석하기 위하여 엔진에서부터 타이어까지의 구성요소들을 질량관성모멘트와 비틀림스프링이 조합된 시스템으로 모델링하였다. 각 요소의 질량관성모멘트와 비틀림스프링 강성들은 단면 형상으로부터 계산된다. 엔진과 플라이휠(fly wheel)을 하나의 등가관성으로 보았으며, 기어물림시나 조인트(joint)에서는 백래쉬(backlash)가 없는 선형으로 고려하였다.

Fig. 2의 2륜구동시 시뮬레이션 모델에서 J_1과 J_2는 엔진과 클러치 허브(clutch hub)의 등가관성이며, J_3~J_6은 변속기의 등가관성, J_7과 J_8은 중간변속기의 등가관성, J_9와 J_{10}은 후륜 추진축의 등가관성, J_{11}과 J_{12}는 후륜 디퍼렌셜(differential)의 등가

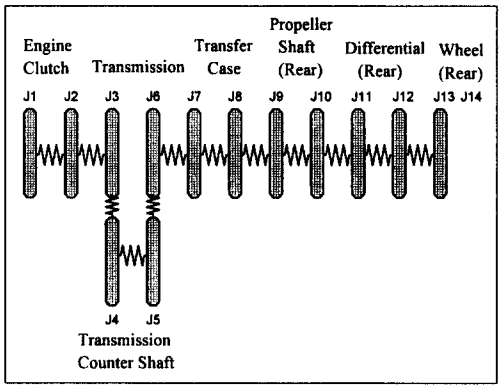

Fig. 2 Two wheel drive simulation model

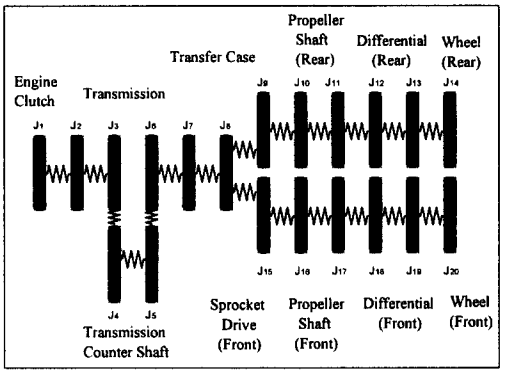

Fig. 3 Four wheel drive simulation model

Table 1 Inertia of models (kgm²)

2WD		4WD	
Number	Component	Number	Component
J_1, J_2	Engine, Clutch	$J_7 \sim J_9$	Transfer case
$J_3 \sim J_6$	Transmission	J_{10}, J_{11}	Rear propeller shaft
J_7, J_8	Transfer case	$J_{12} \sim J_{14}$	Rear differential, rear wheel
J_9, J_{10}	Rear propeller shaft	J_{15}	Front drive sprocket
J_{11}, J_{12}	Rear differential	J_{16}, J_{17}	Front propeller shaft
J_{13}, J_{14}	Rear wheel	$J_{18} \sim J_{20}$	Front differential, Front wheel

관성, 그리고 J_{13}과 J_{14}는 휠(wheel)의 등가관성이다.

Fig. 3의 4륜구동시 시뮬레이션 모델에서 $J_1 \sim J_6$는 Fig. 2의 2륜구동 모델에서의 등가관성과 동일하며, $J_7 \sim J_9$는 구동스프라켓(drive sprocket)을 포함한 중간변속기의 등가관성, J_{10}과 J_{11}은 후륜 추진축의 등가관성이다. $J_{12} \sim J_{14}$는 후륜 디퍼렌셜 및 휠의 등가관성, J_{15}는 전륜 구동 스프라켓(front drive sprocket)의 등가관성, J_{16}과 J_{17}은 전륜 추진축, 그리고 $J_{18} \sim J_{20}$은 전륜 디퍼렌셜 및 휠의 등가관성이다. Table 1에 2륜구동·4륜구동시의 등가관성을 정리하였다.

Fig. 2와 Fig. 3의 다자유도 모델에서 식(1)의 운동방정식을 구할 수 있다.

$$j_i\ddot{\theta} + k_i(\theta_i - \theta_{i-1}) - k_{i+1}(\theta_{i+1} - \theta_i) = 0 \quad (i = 1, 2, 3 \cdots, n) \tag{1}$$

행렬형태로 정리하면

$$[J]\{\ddot{\theta}\} + [K]\{\theta\} = \{0\} \tag{2}$$

여기서,

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_n \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1+k_2 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & k_{n-2}+k_{n-1} & -k_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{n-1} & k_{n-1} \end{bmatrix}$$

식 (2)를 정리하면 다음과 같다.

$$-\omega_n^2[J]\{\theta\} + [K]\{\theta\} = \{0\} \tag{3}$$

$$([K]-\omega_n^2[J])\{X\}=\{0\} \quad (4)$$

$$\Delta=|k_{ij}-\omega_n^2 j_{ij}|=|[K]-\omega_n^2[J]|=0 \quad (5)$$

식 (4)와 식 (5)의 고유치(eigenvalue) 문제에서 고유치 ω_n^2과 각 고유치에서 고유벡터 $\{X\}_n$, 고유행렬 $[X]$을 얻을 수 있다. 여기서 ω_n은 고유진동수이다.

컴퓨터 시뮬레이션은 비틀림진동 해석전용 상용 프로그램을 사용하였으며, 그것은 ARLA-SIMUL 6.70B[9,10]이다.

2.3 해석 및 실험 대상차량

실험에 사용된 차량은 수동변속기가 탑재되어 있으며, 변환방식 4륜구동으로 필요에 따라서 수동조작에 의해 전·후륜을 기계적으로 직결하는 것으로서 2륜구동시는 후륜구동방식(front engine rear drive)이 기본이다. Fig. 4에 전·후륜이 기계적으로 연결된 4륜구동 차량구동계를 개략적으로 나타냈다. 변속기로부터 전달받은 토크를 중간변속기(transfer case)에서 전·후륜으로 분배하게 된다.

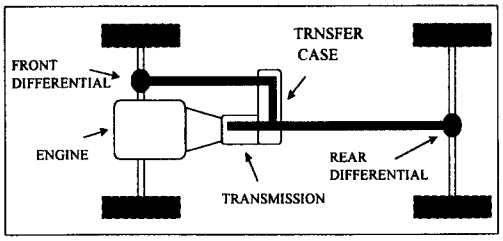

Fig. 4 Part-time four wheel drive

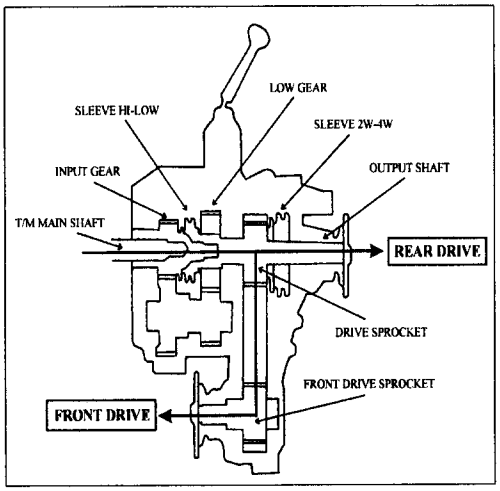

Fig. 5 Part-time transfer case powerflow

중간 차동장치(center differential)가 부착되지 않은 형식이며, 앞은 독립현가장치이고 뒤는 일체형 차축이다.

Fig. 5에 중간변속기의 동력분배과정을 간략하게 나타냈다. 변속기의 주축(main shaft) 끝과 중간변속기 입력축(input shaft)은 스플라인(spline)으로 물리게 되어 있으며, 2륜구동시는 하이-로우 슬리이브(sleeve high low)에 의해 중간변속기 출력축(output shaft)과 바로 연결되어 후륜 추진축에 동력을 전달한다. 4륜구동시는 2륜-4륜 슬리이브(sleeve 2wd-4wd)에 의해 중간변속기 출력축상의 스프라켓 드라이브(sprocket drive)와 전륜 스프라켓 드라이브(front sprocket drive)가 저소음 체인(silent chain)으로 연결되어 전·후륜으로 동력을 배분한다. 이에 따라 4륜구동시 시뮬레이션 모델링은 이러한 동력분배과정을 토대로 고려되었다.

3. 비틀림진동 해석결과

3.1 고유진동수

엔진의 가진주파수는 엔진실린더의 수에 따라 비틀림진동에 미치는 주파수가 달라진다. 4 실린더 4사이클 엔진의 특성에 의해 비틀림진동은 엔진의 가진주파수와 이 주파수의 배조파에서 발생한다. 비틀림진동의 6차 차수(order) 이상은 2차와 4차에 비해 상당히 작은 진동성분으로 거의 영향을 미치지 않는다고 볼 수 있다. 따라서 구동계의 비틀림진동에 영향을 미치는 진동차수는 2차와 4차인데 이러한 진동이 구동계의 비틀림 특성에 의하여 절연되거나 증폭되어 나타난다. Fig. 1의 실차실험계측결과 피크주파수대에서의 공진 가능성을 검토하기 위해 먼저 각 모드별 고유진동수를 조사하였으며, Table 2에 각 모드별 고유진동수를 나타냈다.

Fig. 1의 2150 rpm의 4차 가진 주파수는 (2150 rpm/60 sec)×4 order=143.3 Hz로 시뮬레이션결과 Table 2에서 4륜구동시의 네번째 모드 고유진동수와 거의 일치하며, 3100 rpm에서는 4차 가진주파수가 (3100 rpm/60 sec)×4 order=206.7 Hz로

Table 2 Natural frequences of the modes (Hz)

Mode no.	1	2	3	4	5
2WD	8	10	40	213	403
4WD	8	9	29	149	210

2륜구동시 네번째 모드와 4륜구동시 다섯번째 모드의 고유진동수와 근사치를 갖는다. 이로써 시뮬레이션 결과와 실차실험 결과가 상당히 일치하고 있음을 알 수 있으며, Fig. 1에서 2150 rpm에서의 피크치는 4륜구동시 구동계 공진일 가능성이 크다고 볼 수 있다.

3.2 모드분석

Fig. 6에 구동계 비틀림진동해석에 의해 구해진 2륜구동과 4륜구동의 진동모드를 나타냈다. 시뮬레이션을 통해 모델의 고유진동수를 조사하였고, 모드 분석은 비틀림진동의 영향을 보기 위한 상용 주파수대역에서 이루어졌다. 모드형은 각 고유진동수에서 구동계가 어떻게 진동하는지를 보여준다.

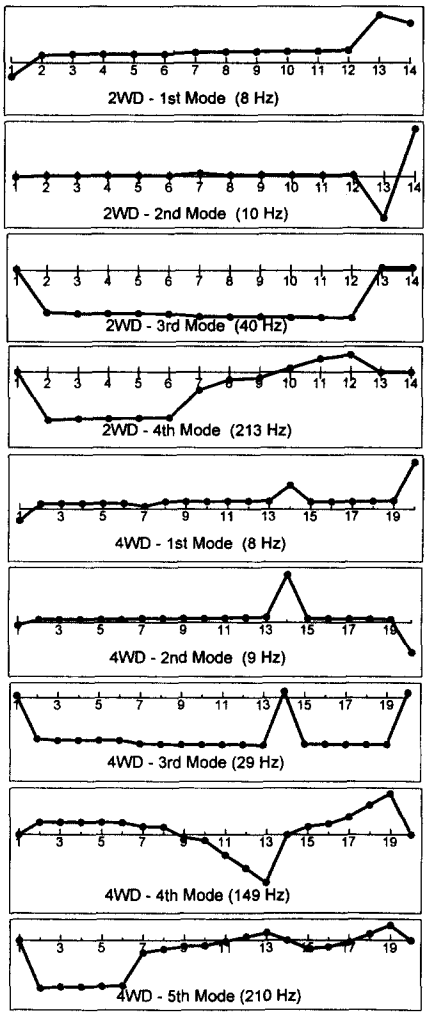

Fig. 6 Comparison of mode shapes

2륜구동과 4륜구동 모두 동일하게 첫번째 모드에서는 클러치에서부터 디퍼런셜에 이르는 요소들이 동일위상에서 강체로서 진동하는 것이고, 두 번째 모드는 타이어의 진폭이 매우 큰 타이어에 의한 모드이며, 세번째 모드는 클러치 강성에 의한 영향을 받는 클러치 모드이다. 이 모드에서 4륜구동시에 2륜구동시보다 공진주파수가 다소 낮으나 모드는 동일하다.

Fig. 6의 2륜구동시 네번째 모드(213 Hz)와 4륜구동시 다섯번째 모드(210 Hz)에서 고유진동수와 모드형이 거의 일치하고 있으며, 2륜구동시 $J_1 \sim J_{14}$까지와 4륜구동시 $J_1 \sim J_{14}$까지의 후륜구동에서 거의 동일한 위상을 나타낸다. 그리고 4륜구동시 네번째 모드(149 Hz)를 보면 $J_9 \sim J_{13}$과 $J_{15} \sim J_{19}$까지 위상은 반대이나 그 크기는 거의 동일하다.

Fig. 7은 2륜구동시의 네번째 모드(212.8 Hz), Fig. 8은 4륜구동시의 다섯번째 모드(210 Hz)이며, Fig. 9는 4륜구동시의 네번째 모드(149 Hz)이다. 이들 그림에서 EKIN, EPOT은 ARLA-SIMUL

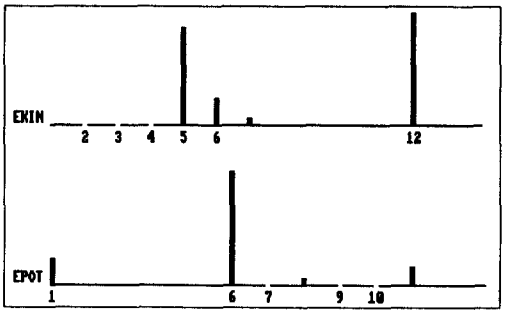

Fig. 7 The 4th mode in the 2WD model (213 Hz) -simulation

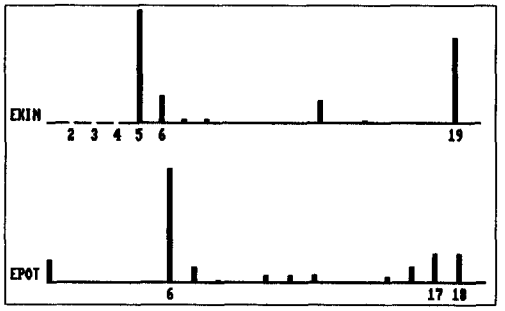

Fig. 8 The 5th mode in the 4WD model (210 Hz) -simulation

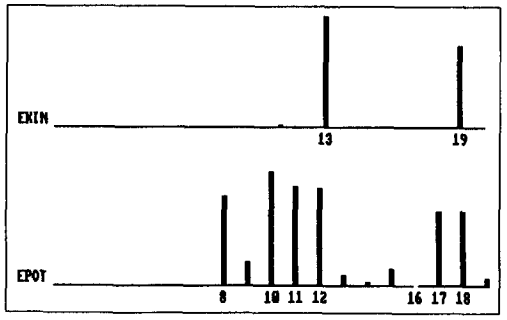

Fig. 9 The 4th mode in the model (149 Hz) simulation-simulation results

6.70-B에서 제공되는 분석형태중 하나로, EKIN은 각 질량요소에 대한 운동에너지로서 질량관성모멘트의 영향도를 나타내고 있으며, EPOT는 이웃하는 두 질량요소 사이의 상대 변위에 대한 위치에너지로서 비틀림강성의 영향을 나타내고 있다. 즉, EKIN이나 EPOT에서 막대의 높이는 각 모드에서 관성과 강성의 영향도를 보이고 있다.

Figs. 7, 8에서 EKIN 항을 살펴보면 2륜구동시 J5는 변속기 카운터샤프트, J12는 후륜 디퍼렌셜의 관성이며, 4륜구동시의 J19는 전륜 디퍼렌셜의 관성이다. 그리고 2륜구동시 6번 째 비틀림강성은 변속기 출력축의 강성이고, 4륜구동시도 동일하다. 이 모드에서는 2륜구동과 4륜구동에서 동일하게 변속기 카운터 기어의 관성과 변속기 출력축의 강성이 가장 많은 영향을 주고 있음을 알 수 있으며, 따라서 이 모드는 변속기에 의해 발생하는 모드로 볼 수 있다.

Fig. 9는 4륜구동시 네번째 모드(149 Hz)를 보여준다. EKIN 항에서 J13은 후륜 디퍼렌셜이고, J19는 전륜 디퍼렌셜이다. 강성의 항을 보면 8번째 강성은 중간변속기 출력축의 강성이며 10, 11, 12번째의 강성은 후륜 추진축의 강성이다. 그리고 17, 18번째의 강성은 전륜 추진축의 강성이다. 따라서 이 모드는 전후 디퍼렌셜의 관성과, 중간변속기 출력축의 강성, 그리고 전후 추진축의 강성에 의한 영향이 큰 것을 알 수 있으며, 4륜구동시 전후륜으로 동력분배가 이루어져 전후 추진축의 구동에 의한 것으로서 이 모드에서는 전후 추진축 비틀림강성의 영향이 가장큰 4륜구동시의 구동계 공진으로 간주할 수 있다.

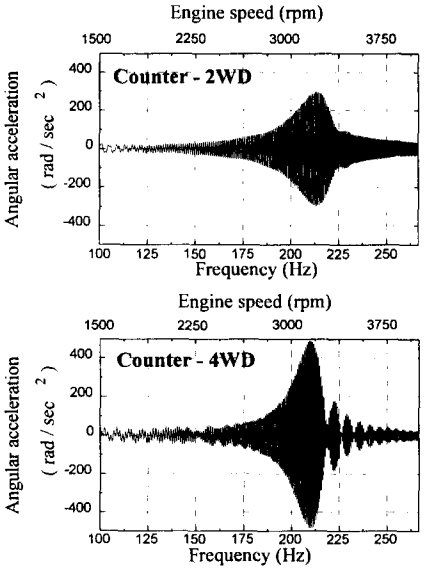

Fig. 10 Comparison of angular acceleration on transmission counter gear under sinusoidal excitation simulation results

3.3 컴퓨터 가진 시뮬레이션 결과

실험차량에 대한 2륜구동과 4륜구동시의 엔진 가진 대신에 정현파 가진에 의한 모의실험을 수행하였다. 1500 rpm~4000 rpm까지 엔진 4차 가진차수인 100 Hz~267 Hz로 일정한 토크 가진하에서 모드 분석시 고유진동수에 영향이 많은 관성요소에 대해서는 각가속도를 구하고 강성요소에 대해서는 상대 각가속도를 구하여 비교 분석하였으며, 또한 이를 토대로 주파수 분석을 수행하였다.

Fig. 10은 2륜구동시와 4륜구동시 카운터 기어의 각가속도를 엔진 4차 가진주파수 대역으로 비교하여 나타냈으며, Fig. 11은 변속기 출력축에서 2륜구동시와 4륜구동시의 상대 각가속도를 엔진 4차 가진주파수 대역으로 보여준다. 위의 그림들에서는 변속기 모드(210 Hz)임을 확인할 수 있다. 그리고 Fig. 12는 4륜구동시 후륜 추진축과 전륜 추진축에서 상대 각가속도를 비교하여 나타냈다. 공진점이 두개가 나타나고, 이는 149 Hz와 210 Hz이며, 여기서 후륜 추진축의 진폭이 전륜 추진축보다 커 후륜 추진축의 강성 영향이 상대적으로 큰 것을 알 수 있다.

3.4 추진축 비틀림강성의 영향

Fig. 9의 EKIN, EPOT를 분석한 바에 따르면 4

륜구동시 네번째 모드에서 4륜구동 구동계의 비틀림진동에 미치는 영향이 가장 큰 요소는 추진축의 강성임을 알 수 있다. 그리하여 추진축의 외경의 변화에 대한 비틀림진동 기여도를 조사하였고, 추진축의 무게와 강성을 약간 증가시켜 시뮬레이션을 수행한 결과 약간 변화된 추진축의 비틀림 강성에 의해 공진주파수가 크게 영향을 받을 수 있음을 알게 되었다. 추진축 외경의 증감에 대한 기준을 시뮬레이션에서는 추진축 강성의 ±25%로 하였다. Figs. 13, 14에 나타낸 바와 같이 추진축의 강성을

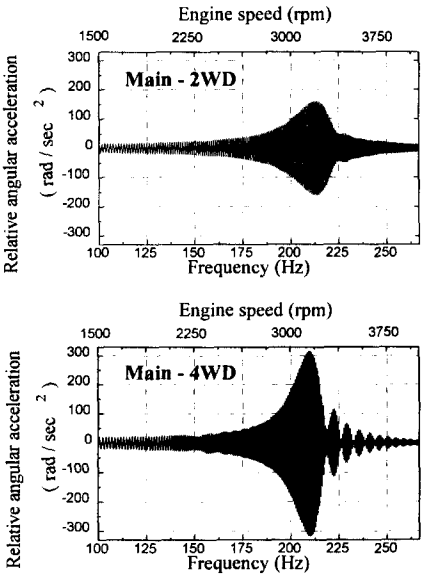

Fig. 11 Comparison of relative angular acceleration on transmission main gear under sinusoidal excitation-simulation results

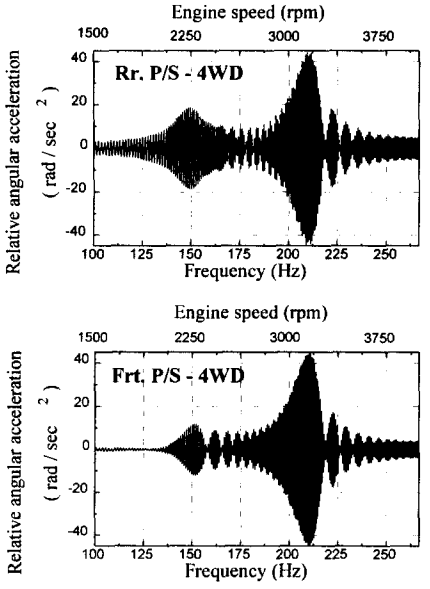

Fig. 12 Comparison of relative angular acceleration on rear and front propeller shaft under sinusoidal excitation-simulation results

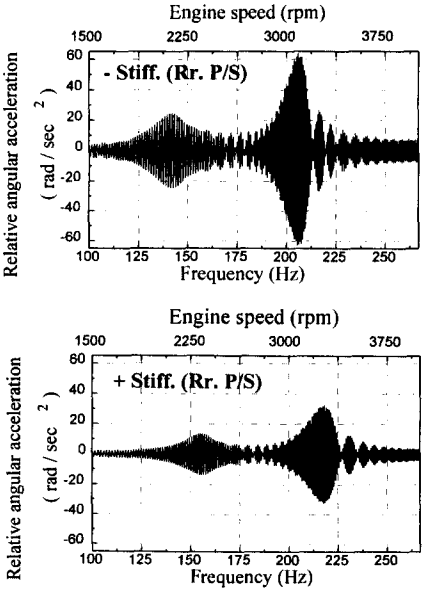

Fig. 13 Influence of stiffness on rear propeller shaft-simulation results

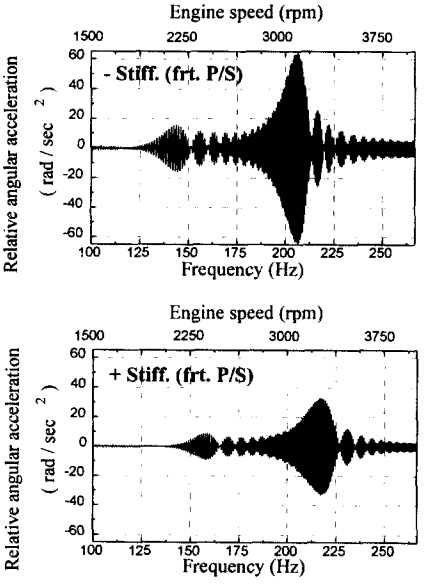

Fig. 14 Influence of stiffness on front propeller shaft-simulation results

높이기 위해 와경을 증가시키면 Fig. 12와 비교하여 구동계 공진주파수는 고주파 대역으로 이동하고 상대 각가속도의 진폭은 감소하는 반면, 강성을 작게 하면 저주파 영역으로 공진주파수가 이동하지만 진폭은 커지는 경향을 나타낸다. 이는 이러한 비틀림진동의 경우 추진축의 강성을 변경시키는 것이 효과적인 방법이 될 수 있으며, 따라서 진동저감 대책 수립시 구동계 구조의 큰 설계 변경없이 추진축의 강성변화를 우선 고려하는 것이 타당할 것으로 사료된다.

4. 결 론

본 연구를 통하여 구동계의 비틀림진동에 관한 다음의 결론을 얻었다.

(1) 변환방식 4륜구동 차량에 대해 2륜구동시와 4륜구동시에 대한 질량관성모멘트와 비틀림스프링이 조합된 다자유도 해석모델을 이용하여 시뮬레이션을 수행하였으며, 비틀림진동 해석결과와 계측결과 그리고 관능평가가 서로 일치하였다.

(2) 4륜구동시의 구동계 공진은 추진축의 강성의 영향이 가장 크며, 따라서 비틀림진동저감에 추진축 강성의 변경이 효과적이다.

(3) 개발된 4륜구동 모델은 구동계 비틀림진동 특성을 예측하므로써 상시 4륜구동 개발 및 구동계 비틀림진동 저감에 유용할 것으로 생각된다.

참고문헌

(1) Christopher S. Keeny and Shan Shin, 1992, "Prediction and Control of Heavy Duty Powertrain Torsional Vibration," *SAE Paper 922481*, pp. 805~814.

(2) Wolfgang Exner, 1995, "NVH Phenomena in Light Truck Drivelines," *SAE Paper 952641*, pp. 1~6.

(3) Kataoka, M. Ohno, S. and Sugimoto, T., 1986, "Forced Torsional Vibration of a Two Dgrees of Freedom System with a Clearance (1st Report ; Experiment and Simulation)," *Bulletin of JSME*, Vol. 29, No. 256, pp. 3491~3498.

(4) Kataoka, M. Ohno, S. and Sugimoto, T., 1986, "Forced Torsional Vibration of a Two Dgrees of Freedom System with a Clearance (2nd Report : Analytical Solution)," *Bulletin of JSME*, Vol. 29, No. 256, pp. 3822~3829.

(5) Arai, H., Otani, H., Umeyama, M. and Matsuura, K., "Design Method for Optimal Torsional Clutch Plate Characteristics," トヨタ技術, Vol. 36, No. 1, pp. 71~77.

(6) Petrl, H. and Heldlngsfeld, D., 1989, "The Hydraulic Torsion Damper - A New Concept for Vibration Damping in Powertrains," *SAE Paper 892477*, pp. 1~10.

(7) Thomas, C. T. and Daniel, A. G., 1986, "Computer Simulation of Drivetrain Torsional Vibration in Heavy and Medium Duty Truck," *SAE Paper 861960*, pp. 1~8

(8) Petkus E. P. and Clark, S. F., 1987, "A Simple Algorithm for Torsional Vibration Analysis," *SAE Paper 870996*, pp. 379~387.

(9) Andreas Laschet, "ARLA-SIMUL Quick User's Guide Version 6.70B," ARLA Maschinentechnik GmbH.

(10) Andreas Laschet, 1992, "Computer Simulation of Vibration in Rotationg Machinery - Machine Vibration," *Springer-Verlag London Limited*, Vol. 1, No. 1, pp. 42~51