

〈논 문〉

## 회전원판과 스프링-댐퍼를 가진 질점계의 상호작용에 의한 불안정성

김 창 부\* · 한 덕 호\*\*

(1997년 1월 3일 접수)

### Instability Caused by Interaction Between a Rotating Disk and a Mass-Spring-Damper System

C. B. Kim and D. H. Han

**Key Words :** Instability(불안정성), Dimensionless Variable(무차원 변수), Orthogonality(직교성), Eigenfunction(고유함수), Disk(원판), Mass-Spring-Damper System(스프링-댐퍼를 가진 질점계)

#### Abstract

In this paper the instability of the system which has a disk and a mass-spring-damper system interacting through a medium having stiffness and damping is analyzed. To solve the equations of motion of this system, it is assumed that the solution consists of the eigenfunctions which are the products of the Bessel functions and sine or cosine functions. The former represents the radial characteristics of the disk and the latter represents the circumferential characteristics. Using this assumed solution and the orthogonality of the eigenfunctions, the equations of motion can be transformed into a set of equations of motion with variables dependent only on the time. After this set is changed to the state equation, the eigenvalue problem can be made. Once the eigenvalues are calculated according to the angular velocity of the disk, the dynamic characteristics of this system is obtained. Because the thickness of the disk and the element characteristics of the mass-spring-damper system have important effects on the stability of the system, it will be understood how these factors affect the system and then a method to ameliorate the stability of the system with a disk will be presented.

#### 기호설명

{O XYZ} : 고정좌표계

{o-xyz} : 회전좌표계(원판 위에 고정)

(r, ϕ) : 고정좌표계에 대한 극좌표

(r, θ) : 회전좌표계에 대한 극좌표

( $\bar{r}$ ,  $\hat{\phi}$ ), ( $\bar{r}$ ,  $\hat{\theta}$ ) : 질점계의 극좌표

Ω : 원판의 회전각속도

a : 원판의 안쪽 반지름

b : 원판의 바깥쪽 반지름

h : 원판의 두께

D : 원판의 굽힘강성

E : 원판의 탄성계수

ρ : 원판의 밀도

σ<sub>r</sub> : 원판의 반경방향응력

σ<sub>ϕ</sub> : 원판의 원주방향응력

M<sub>r</sub> : 원판의 반경방향응력에 의한 굽힘모멘트

\*회원, 인하대학교 자동화공학과

\*\*회원, LG산전(주) 연구소

- $M_\phi$  : 원판의 원주방향응력에 의한 굽힘모멘트  
 $M_{r\phi}$  : 원판의 전단응력에 의한 굽힘모멘트  
 $z(t)$  : 질점계의 질점의 변위  
 $\tilde{w}(r, \phi, t)$  : 고정좌표계에 대한 원판 위의 점 A의 변위  
 $w(r, \theta, t)$  : 회전좌표계에 대한 원판 위의 점 A의 변위  
 $M$  : 질점의 질량  
 $k_1$  : 질점지지부의 탄성  
 $c_1$  : 질점지지부의 점성  
 $k_2$  : 질점과 원판 연결부의 탄성  
 $c_2$  : 질점과 원판 연결부의 점성  
 $\tilde{f}(t)$  : 질점계와 원판의 상호작용에 의해 발생된 힘

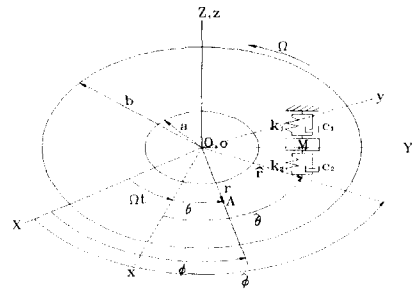


Fig. 1 Total system

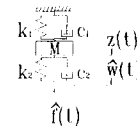


Fig. 2 Mass-spring-damper system

## 1. 서론

기계의 고속화, 소형화에 따라 회전원판을 사용하는 기계에서도 그 회전속도가 원판의 임계속도 근처에서 동작해야 할 필요성을 갖게 되었다. 그런데 충분히 두꺼운 원판을 저속으로 사용할 때와는 달리 얇은 원판을 고속으로 동작시키는 경우 원판과 상호작용을 하는 질점계가 전체 시스템의 동적 거동에 큰 영향을 준다. 이와 관련하여 Iwan은 유적이는 질점계를 가진 고정원판을 해석<sup>(1)</sup>한 후 원판에 대해 상대운동을 하는 질점계를 가진 회전원판을 원심력에 의한 영향을 고려하여 해석<sup>(2)</sup>하였고, Ono<sup>(3)</sup>와 Chen<sup>(4)</sup>은 질점계를 더욱 상세하게 모델링하여 유연 원판과의 상호작용에 의한 전체 시스템의 안정성을 해석하였다. Shen<sup>(5)</sup>은 원심력이 고려되지 않은 비대칭구조를 가진 회전원판의 불안정성을 Valeev의 방법<sup>(6)</sup>으로 해석하였다.

위에 제시된 논문들의 공통점은 원판과 상호작용을 하는 질점계의 질점의 변위가 접촉부의 원판의 변위와 같은, 즉 질점과 원판이 항상 접촉상태를 유지하는 시스템을 해석했기 때문에 컴퓨터의 플로피 디스크 드라이브 시스템이나 원형 회전톱 등의 진동해석에는 사용할 수 있지만 하드 디스크 드라이브 시스템과 같이 헤드가 디스크의 표면에 접촉하지 않고 공기막에 의해 부상된 상태로 동작하는 시스템의 해석에는 적합하지 않다. 이와 관련하여 장인배<sup>(7)</sup>는 동압 공기윤활 슬라이더 베어링의 특성을 고려한 하드 디스크 헤드 시스템의 동특성을 해석하였는데, 일정 진동수를 가진 평판 위에 형성된

동압 공기윤활 슬라이더 베어링과 헤드가 어떤 동특성을 갖는지 알아보고 헤드설계의 중요성을 강조하였다.

본 논문은 회전하는 원판과 그 위에 형성된 공기막의 탄성과 점성이 고려된 질점계와의 상호작용에 의한 불안정성을 해석하는데 목적을 두고 있다. 또한 하드 디스크 드라이브의 안정성을 향상시키는 방안을 제시하고자 한다.

## 2. 운동방정식과 경계조건 및 근사식

### 2.1 운동방정식

하드디스크 드라이브의 원판과 헤드를 Figs. 1, 2와 같이 모델링하였는데, 여기서 XYZ 좌표계는 고정좌표계이고, xyz 좌표계는 원판과 함께 회전하는 좌표계이다. 또한  $z(t)$ 는 질점의 변위를,  $\tilde{w}(t)$ 는 질점이 위치한 곳에서의 원판의 고정좌표계에 대한 변위를 나타내며,  $\hat{f}(t)$ 는 원판이 질점계에 가하는 힘이다.

회전원판은 일정한 각속도  $\Omega$ 를 유지하므로 원판 위의 한 점 A의 고정좌표계에 대한 위치와 회전좌표계에 대한 위치 사이의 관계식은 (1)과 같다.

$$\phi(\theta, t) = \Omega t + \theta \quad (1)$$

두께가 일정하고 축대칭인 균질 선형 탄성물질(homogeneous linear elastic material)로 이루어진 평평한 원판을 가정하고, 원판의 두께방향으로 반경방향응력  $\sigma_r$ 과 원주방향응력  $\sigma_\phi$ 의 변화가 없다고 본다. 원판 표면에 응력이 발생하지 않고 원판의

회전속도가 일정하다는 가정하에서, 원판의 Z 방향 관성력과 회전에 의한 원심력이 Z-방향 변위에 미치는 영향, 그리고 집중하중의 효과를 고려하여 고정좌표계에 대한 원판의 운동방정식을 나타내면 다음과 같다.

$$\rho h \left( \frac{\partial}{\partial t} + \Omega \frac{\partial}{\partial \phi} \right)^2 w + D \nabla^4 w - h \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \sigma_r \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{\sigma_\phi}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} \right] = -\frac{1}{\hat{r}} \langle r - \hat{r} \rangle^{-1} \langle \phi - \hat{\phi} \rangle^{-1} [c_2(\dot{\hat{w}} - \dot{z}) + k_2(\hat{w} - z)] \quad (2)$$

$$M \ddot{z} + (c_1 + c_2) \dot{z} + (k_1 + k_2) z = c_2 \dot{\hat{w}} + k_2 \hat{w} \quad (3)$$

여기에서  $\hat{w}$ 는 고정좌표계에 대한 원판 위의 한 점의 변위를 나타내고,

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

$$\nabla^4 = \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right)^2$$

$$\sigma_r = e_1 + \frac{e_2}{r^2} - \frac{3+\nu}{8} \rho \Omega^2 r^2$$

$$\sigma_\phi = e_1 - \frac{e_2}{r^2} - \frac{3+\nu}{8} \rho \Omega^2 r^2$$

$$e_1 = \frac{\rho \Omega^2}{8} (1+\nu) \frac{(3+\nu)b^4 + (1-\nu)a^4}{(1+\nu)b^2 + (1-\nu)a^2}$$

$$e_2 = \frac{\rho \Omega^2}{8} a^2 b^2 (1-\nu) \frac{(3+\nu)b^2 + (1+\nu)a^2}{(1+\nu)b^2 + (1-\nu)a^2}$$

$$\hat{w}(t) = \int_0^{2\pi} \int_a^b \langle r - \hat{r} \rangle^{-1} \langle \phi - \hat{\phi} \rangle^{-1} w(r, \phi, t) dr d\phi$$

$$\dot{\hat{w}} = \frac{d\hat{w}}{dt}$$

이다.  $\langle \rangle^{-1}$ 은 디랙델타함수(Dirac delta function)를 의미한다. 그런데, 변수들의 수치가 상대적으로 큰 차이를 갖기 때문에 유도된 운동방정식 (2), (3)를 그대로 사용하여 계산하면 옳은 결과를 얻을 수 없게 된다. 이를 방지하기 위해서 다음과 같은 관계를 갖는 무차원 변수를 사용한다.

$$r = br^*$$

$$t = b^2 \sqrt{\frac{\rho h}{D}} t^*$$

$$w = \frac{h^2}{b} w^*$$

$$z = \frac{h^2}{b} z^*$$

$$\Omega = \frac{1}{b^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \Omega^*$$

$$\omega_{jk} = \frac{1}{b^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \omega_{jk}^*$$

$$M = \rho h b^2 M^*$$

$$c_i = \sqrt{\rho h D} c_i^*, \quad \bar{c}_i^* = \frac{c_i^*}{M^*}, \quad i=1,2$$

$$k_i = \frac{D}{b^2} k_i^*, \quad \bar{k}_i^* = \frac{k_i^*}{M^*}, \quad i=1,2$$

$$\sigma_r = \frac{D}{b^2 h} \sigma_r^*, \quad \sigma_\phi = \frac{D}{b^2 h} \sigma_\phi^*$$

$$e_1 = \frac{D}{b^2 h} e_1^*, \quad e_2 = \frac{D}{h} e_2^*$$

여기에서  $j$ 는 절원수(number of nodal circles),  $k$ 는 절직경수(number of nodal diameters)를 나타내는 0 이상의 정수이며,  $\omega_{jk}$ 는  $(j, k)$  모드의 고유진동수이다. 여기서  $(j, k)$  모드란 절원수가  $j$ , 절직경수가  $k$ 인 모드를 말한다.

위 관계식들을 이용하여 식 (2), (3)를 변환하면

$$\left( \frac{\partial}{\partial t^*} + \Omega^* \frac{\partial}{\partial \phi^*} \right)^2 w^* + \nabla^{*4} w^* - \left[ \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left( r^* \sigma_r^* \frac{\partial w^*}{\partial r^*} \right) + \frac{\sigma_\phi^*}{r^{*2}} \frac{\partial^2 w^*}{\partial \phi^{*2}} \right] = -\frac{1}{\hat{r}^*} \langle r^* - \hat{r}^* \rangle^{-1} \langle \phi - \hat{\phi} \rangle^{-1} [c_2^*(\dot{\hat{w}}^* - \dot{z}^*) + k_2^*(\hat{w}^* - z^*)] \quad (4)$$

$$z^{*''} + (\bar{c}_1^* + \bar{c}_2^*) z^{*' } + (\bar{k}_1^* + \bar{k}_2^*) z^* = \bar{c}_2^* \hat{w}^{*' } + \bar{k}_2^* \hat{w}^* \quad (5)$$

여기서,

$$\hat{w}^{*' } = \frac{d\hat{w}^*}{dt^*}$$

$$z^{*' } = \frac{dz^*}{dt^*}$$

이다. 마찬가지로  $\nabla$ ,  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\phi$ ,  $e_1$ ,  $e_2$  등도 변환된다.

## 2.2 경계조건

무차원 변수를 이용하여 경계조건식들을 구하면, 원판이  $r^* = a^*$ 에서 고정되어 있으므로

$$w^*(a^*, \phi, t^*) = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial w^*}{\partial r^*}(a^*, \phi, t^*) = 0 \quad (7)$$

이고,  $r^* = b^*$ 에서 자유로우므로

$$\left[ Q_r^* + \frac{1}{r^*} \frac{\partial M_r^*}{\partial \phi^*} \right]_{(b^*, \phi, t^*)} = 0 \quad (8)$$

$$M_r^*(b^*, \phi, t^*) = 0 \quad (9)$$

이다. 여기서,

$$Q_r^* = -\frac{\partial}{\partial r^*} (\nabla^{*2} w^*)$$

$$M_{r\phi}^* = -(1-\nu) \left( \frac{1}{r^*} \frac{\partial^2 w^*}{\partial r^{*2} \partial \phi} - \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial w^*}{\partial \phi} \right)$$

$$M_r^* = - \left[ \frac{\partial^2 w^*}{\partial r^{*2}} + \nu \left( \frac{1}{r^*} \frac{\partial u^*}{\partial r^*} + \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial^2 w^*}{\partial \phi^2} \right) \right]$$

### 2.3 근사식

운동방정식 (4), (5)의 해는 경계조건을 만족하는 고유함수들에 의해 다음과 같이 가정할 수 있다.

$$w^* = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} [a_{jk}(t^*) \cos k\phi + \beta_{jk}(t^*) \sin k\phi] \Gamma_{jk}(r^*) \quad (10)$$

$$z^*(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} z_{jk}^* \quad (11)$$

여기서,

$$\Gamma_{jk}(r^*) = B_{jk}^{(1)} J_{jk}(x_{jk} r^*) + B_{jk}^{(2)} Y_{jk}(x_{jk} r^*) + B_{jk}^{(3)} I_{jk}(x_{jk} r^*) + B_{jk}^{(4)} K_{jk}(x_{jk} r^*)$$

$$x_{jk}^4 = \omega_{jk}^{*2}$$

이고,  $j$ 는 절원수,  $k$ 는 절직경수를 나타내는 0 이상의 정수이며,  $\omega_{jk}$ 는  $(j, k)$  모드의 고유 진동수이다. 여기서  $(j, k)$  모드란 절원수가  $j$ , 절직경수가  $k$ 인 모드를 말한다.  $J_{jk}$ ,  $Y_{jk}$ 는  $k$ 차 1종, 2종 Bessel 함수(Bessel functions of the first and second kind of order  $k$ ),  $I_{jk}$ ,  $K_{jk}$ 는 수정된  $k$ 차 1종, 2종 Bessel 함수(modified Bessel functions of the first and second kind of order  $k$ )이고,  $B_{jk}^{(i)}$ ,  $i=1, 2, 3, 4$ 는 각 Bessel 함수들의 상수계수들이다. 그리고,  $\Gamma_{jk}$ 는 다음과 같은 성질을 갖는다.

$$\int_a^{b^*} \Gamma_{jq} \Gamma_{pq} r^* dr^* = \delta_{jp} \quad (12)$$

$$\int_a^{b^*} L_1[\Gamma_{jq}] \Gamma_{pq} r^* dr^* = \omega_{pq}^{*2} \delta_{jp} \quad (13)$$

여기서,

$$L_1[\cdot] = \frac{\partial^4}{\partial r^{*4}} + \frac{2}{r^*} \frac{\partial^3}{\partial r^{*3}} - \frac{1+2k^2}{r^{*2}} \frac{\partial^2}{\partial r^{*2}} + \frac{1+2k^2}{r^{*3}} \frac{\partial}{\partial r^*} + \frac{k^2(k^2-4)}{r^{*4}}$$

이고,  $p, q$ 는 각각 절원수와 절직경수를 나타낸다.

식 (10), (11)을 식 (4), (5)에 대입한 후, 식 (12), (13)의 성질들을 이용하여 정리하면 다음과 같이 분리된 운동방정식들을 얻을 수 있다. 계산의 편의상  $\hat{\phi}=0$ 으로 놓았다.

$$\alpha_{pq}'' + 2q\Omega^* \alpha_{pq}' + (\omega_{pq}^{*2} - q^2 \Omega^{*2}) \alpha_{pq}$$

$$- \sum_{j=0}^{\infty} \int_a^{b^*} L_2[\Gamma_{jq}] \Gamma_{pq} r^* dr^* \alpha_{jq}$$

$$= - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} [(c_2^* \alpha_{jk}' + k_2^* \alpha_{jk}) \hat{\Gamma}_{jk} - (c_2^* z_{jk}' + k_2^* z_{jk}^*) \hat{\Gamma}_{pq}] \quad (14)$$

$$\beta_{pq}'' - 2q\Omega^* \beta_{pq}' + (\omega_{pq}^{*2} - q^2 \Omega^{*2}) \beta_{pq}$$

$$- \sum_{j=0}^{\infty} \left( \int_a^{b^*} L_2[\Gamma_{jq}] \Gamma_{pq} r^* dr^* \right) \beta_{jq} = 0 \quad (15)$$

$$z_{pq}^{*'} + (\bar{c}_1^* + \bar{c}_2^*) z_{pq}^{*'} + (\bar{k}_1^* + \bar{k}_2^*) z_{pq}^*$$

$$= (\bar{c}_2^* \alpha_{pq}' + \bar{k}_2^* \alpha_{pq}) \hat{\Gamma}_{pq} \quad (16)$$

여기서,

$$L_2[\cdot] = \sigma_r^* \frac{\partial^2}{\partial r^{*2}} + \left( \frac{\sigma_r^*}{r^*} + \frac{\partial \sigma_r^*}{\partial r^*} \right) \frac{\partial}{\partial r^*} - q^2 \frac{\sigma_p^*}{r^{*2}}$$

$$\hat{\Gamma}_{pq} = \Gamma_{pq}(\hat{r}^*)$$

운동방정식 (14~16)을 정확히 풀기 위해서는 절원수와 절직경수의 한계를 무한대로 취해야 하나 실제로 계산하기가 불가능하므로 한정된 개수의 모드를 사용해야 한다.  $s$ 개의 모드를 고려했을 때, 운동방정식 (14~16)을 상태방정식으로 고쳐보면

$$\dot{y} = By \quad (17)$$

의 형태로 변환되는데, 여기서

$$y = [\alpha^T \beta^T z^T \hat{\alpha}^T \hat{\beta}^T \hat{z}^T]^T$$

$$\alpha^T = [\alpha_{j_1 k_1}, \dots, \alpha_{j_s k_s}]$$

$$\hat{\alpha}^T = [\hat{\alpha}_{j_1 k_1}, \dots, \hat{\alpha}_{j_s k_s}]$$

이고,  $j_i, k_i$ 는 각각  $i$ 번째 모드의 절원수와 절직경수이다.  $i$ 번째 모드라는 것은 계산을 할 때 고유진동수가 낮은 모드부터 취했기 때문에 사용되었다. 여기서,  $i$ 는 자연수이다. 또한  $\beta^T, \hat{\beta}^T, \hat{z}^T, \hat{\alpha}^T, \hat{\alpha}^T$ 와 비슷하게 결정된다. 그리고

$$B = \begin{bmatrix} O & O & O & I & O & O \\ O & O & O & O & I & O \\ O & O & O & O & O & I \\ B^{41} & O & B^{43} & B^{44} & B^{45} & B^{46} \\ O & B^{52} & O & B^{54} & O & O \\ B^{61} & O & B^{63} & B^{64} & O & B^{66} \end{bmatrix}$$

이고, 여기서  $O$ 는 모든 요소가 0인  $s \times s$  행렬이고,  $I$ 는  $s \times s$  단위행렬이다. 그리고 운동방정식들로부터

$$B_{(pq,jk)}^{41} = (q^2 \Omega^{*2} - \omega_{pq}^{*2}) \delta_{jp} \delta_{kq}$$

$$+ \int_a^{b^*} L_2[\Gamma_{jq}] \Gamma_{pq} r^* dr^* \cdot \delta_{kq}$$

$$- \frac{1}{\pi} k_2^* \hat{\Gamma}_{jk} \hat{\Gamma}_{pq}$$

$$B_{(pq,jk)}^{43} = \frac{1}{\pi} k_2^* \hat{\Gamma}_{pq}$$

$$\begin{aligned}
 B_{(pq,jk)}^{44} &= -\frac{1}{\pi} c_2^* \hat{\Gamma}_{jk} \hat{\Gamma}_{pq} \\
 B_{(pq,jk)}^{45} &= -2q\Omega^* \delta_{jp} \delta_{kq} \\
 B_{(pq,jk)}^{46} &= \frac{1}{\pi} c_2^* \hat{\Gamma}_{pq} \\
 B_{(pq,jk)}^{52} &= (q^2 \Omega^{*2} - \omega_{pq}^{*2}) \delta_{jp} \delta_{kq} \\
 &\quad + \int_a^{b^*} L_2[\Gamma_{jq}] \Gamma_{pq} r^* dr^* \cdot \delta_{kq} \\
 B_{(pq,jk)}^{54} &= 2q\Omega^* \delta_{jp} \delta_{kq} \\
 B_{(pq,jk)}^{61} &= \bar{k}_2^* \hat{\Gamma}_{pq} \delta_{jp} \delta_{kq} \\
 B_{(pq,jk)}^{63} &= -(\bar{k}_1^* + \bar{k}_2^*) \delta_{jp} \delta_{kq} \\
 B_{(pq,jk)}^{64} &= \bar{c}_2^* \hat{\Gamma}_{pq} \delta_{jp} \delta_{kq} \\
 B_{(pq,jk)}^{66} &= -(\bar{c}_1^* + \bar{c}_2^*) \delta_{jp} \delta_{kq}
 \end{aligned}$$

임을 알 수 있는데, 여기서  $\delta$ 는 크로네커 델타함수(Kronecker delta function)이며,  $(pq, jk)$ 는 행렬안에서의 위치를 나타내는 것으로 (1, 1)에서 (s, s)까지 대응된다.

회전각속도에 따라 행렬 B의 고유치들이 변화하는 것을 살펴보면 시스템의 안정성이 어떻게 변화하는지를 쉽게 알 수 있다. 고유치는 무차원 수이고, 실수부는  $\xi$ , 허수부는  $\omega$ 로 나타내기로 한다.

### 3. 모의실험 결과

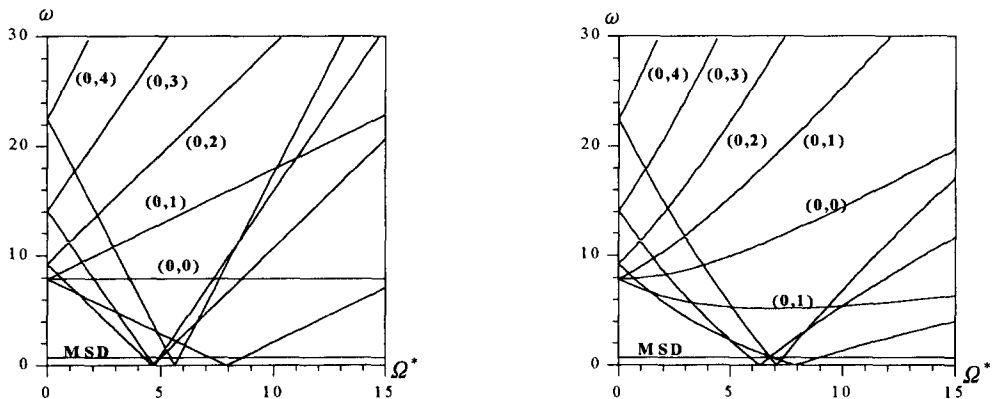
평판의 대표값은 기존 하드 디스크 드라이브 원판의 치수를 이용하였고, 재료는 철(stainless steel)을 가정하였고, 질점계의 대표값은 Ono<sup>(3)</sup>의 논문 에 근거하여 다음과 같이 결정하였다.  $\rho=7.85 \times 10^3 \text{ kg/m}^2$ ,  $E=200 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ ,  $\nu=0.3$ ,  $a=17.0 \times 10^{-3} \text{ m}$ ,  $b=47.5 \times 10^{-3} \text{ m}$ ,  $\hat{r}=0.75b \text{ m}$ ,  $h_0=1.27 \times 10^{-3} \text{ m}$ ,  $M_0=4.4 \times 10^{-3} \text{ kg}$ ,  $k_{10}=15.8 \text{ N/m}$ ,  $k_{20}=$

$100k_1 \text{ N/m}$ ,  $c_1=0.0 \text{ Ns/m}$ ,  $c_2=0.0 \text{ Ns/m}$ ,  $s=5$ .

이후 설명에서 임계속도란 후진모드의 주파수가 0이 되도록 하는 원판의 최저 회전속도이고, 정적 불안정성(stationary-type instability<sup>(3)</sup>)이란 후진모드의 주파수가 어느 회전속도구간에서 0을 유지하고 있을 때 발생하는 불안정성이다. 결합 불안정성(merged-type instability<sup>(3)</sup>)은 하나의 전진모드와 다른 모드의 상호작용에 의해 일정구간에서 두개의 모드가 하나로 결합되면서 발생하는 불안정성이다. 그리고 질점계 모드(MSD mode)란 질점계가 원판의 절선(nodal line) 위에 있을때 나타나는 원판의 진동에 의한 영향을 받지 않는 모드이다.

Fig. 3은 원판의 회전속도변화에 따른 대표값을 갖는 시스템의 고유치의 허수부의 변화를 나타낸다. Fig. 3(a)는 원심력을 고려하지 않은 경우로 원판이 정지해 있고 질점계가 회전하는 시스템을 나타내는데,  $\Omega^*$ 의 증가에 따라  $\omega$ 가 선형으로 변하는 것을 볼 수 있다. 이에 비해 Fig. 3(b)는 원심력을 고려한 경우로 질점계가 정지상태를 유지하고 원판이 회전하는 시스템을 나타내는데,  $\Omega^*$ 의 증가에 따라  $\omega$ 는 어떤 곡선을 그리며 변화한다. 원심력이 고려된 경우에 (0, 1) 모드의 임계속도는 없으며, 각 모드는 원심력이 고려되지 않은 경우에 비해 더 높은 임계속도를 갖는다.

고유치의 실수부부는 거의 모든 영역에서 0이기 때문에 대표값을 갖는 시스템은 매우 안정하다고 볼 수 있다. 물론 이 시스템이 완전히 안정한 것은 아니다. 예를 들어  $\Omega^* \in (6.330672, 6.330678)$ 에서 (0, 3) 모드에 의해,  $\Omega^* \in (7.080490, 7.084092)$ 에서 (0, 4) 모드에 의해,  $\Omega^* \in (7.887547, 7.887570)$ 에



(a) Without centrifugal force (b) With centrifugal force  
 Fig. 3 Imaginary part of the eigenvalues of the system with the representative values

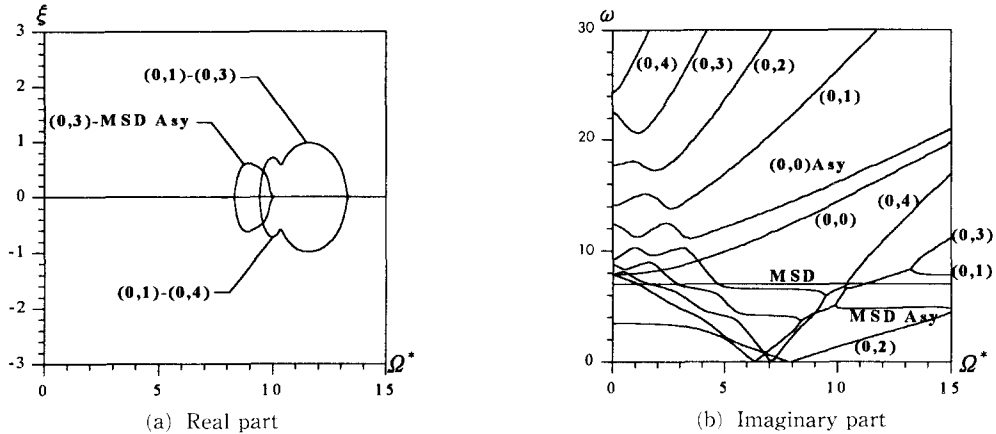


Fig. 4 Variation of the thickness ( $h=0.1 h_0$ )

서 (0, 2) 모드에 의해 약한 정적 불안정성을 보인다. Fig. 3(b)를 살펴보면 (0, 0) 모드는 단조 증가하고, (0, 1) 모드는 느리게 하강하다가 매우 완만한 상승곡선을 그리는 것을 볼 수 있다. 질점계 모드는 회전속도에 관계없이 일정한 값을 유지하고,  $\Omega^*=0$  일때 각 모드는 두개의 서로 다른 값을 갖지만, 거의 차이가 없기때문에 그림에 잘 나타나지 않는다.

두께가 얇아진 경우, 원판의 고유진동수들은 그 두께에 비례하여 작아지지만 질점계의 강성은 그대로이기 때문에 질점계의 고유진동수는 변하지 않는다. Fig. 4(b)에서 질점계의 고유치가 커진 것처럼 보이는 것은 그런 이유에서이다. 또한 이런 현상은 질점계가 전체 시스템의 거동에 미치는 영향이 커진 것을 의미하고, 실제로 기본값을 가진 시스템의 값과 비교했을때 큰 차이가 있음을 알 수 있다. 원판이 정지상태일 때도 하나의 모드에 대해 고유치의 허수부가 큰 차이를 보이고, 회전속도가 증가함에 따라 점차 기본값을 가진 시스템의 값으로 접근한다. 특히 회전속도를 증가시키면 (0, 0) 모드와 질점계 모드로 접근하는 두개의 모드를 발견할 수 있는데 다른 전진모드와 만나지 않는 한 시스템의 안정성에 영향을 주지 않는다. 이들을 각각 (0, 0) 점근모드와 MSD 점근모드라고 하겠다. 이후 그림에서 Asy라고 표시된 것은 이런 점근모드를 나타내는 것이다. Fig. 4(a)에서 양의 부분을 살펴보면, 불안정한 영역이 어느 구간에서 나타나는지 알 수 있다.  $\Omega^* \in (8.327194, 9.909917)$ 에서 (0, 3) 모드와 MSD 점근모드에 의해,  $\Omega^* \in (9.423527, 10.35757)$ 에서 (0, 1) 모드와 (0, 4) 모드에

의해,  $\Omega^* \in (10.35757, 13.25841)$ 에서 (0, 1) 모드와 (0, 3) 모드에 의해 결합 불안정성이 발생한다. 이 경우에도 약하게 정적 불안정성을 보이는데, (0, 3) 모드는  $\Omega^* \in (6.330672, 6.338220)$ 에서, (0, 4) 모드는  $\Omega^* \in (7.080490, 7.083507)$ 에서, (0, 2) 모드는  $\Omega^* \in (7.887547, 7.911383)$ 에서 불안정성을 유발시킨다.

질점계의 질량을 증가시키면 질점계 모드 고유치의 허수값이 작아진다. 따라서 MSD 점근모드와 원판모드 사이의 결합 불안정성이 Fig. 4에 나타난 것보다 낮은 회전속도에서 시작된다. Fig. 5(b)에 나타난 것처럼 MSD 점근모드는 (0, 3) 모드와  $\Omega^* \in (6.964626, 8.393888)$ 에서, (0, 2) 모드와  $\Omega^* \in (9.278144, 14.05335)$ 에서 결합 불안정성을 보인다. 다른 전진모드 사이의 결합 불안정성도 마찬가지인데, (0, 1) 모드와 (0, 4) 모드에 의해  $\Omega^* \in (9.343822, 9.858174)$ 에서, (0, 1) 모드와 (0, 3) 모드에 의해  $\Omega^* \in (10.01570, 11.64704)$ 에서 불안정하게 나타난다. Fig. 5(b)를 보면 고유치의 양의 실수부가 작아졌으므로 질량증가가 시스템을 안정시키는 경향이 있다고 할 수 있지만, 불안정성이 시작되는 회전속도가 더 낮으므로 시스템에 좋은 영향을 준다고 할 수 있다.

대표값에서  $k_1$ 이  $k_2$ 의 0.01배이므로  $k_1$ 을 원래값의 1/10만큼 감소시키도 질점계 모드에 별 영향을 주지 않는다. 따라서 Fig. 6은 Fig. 4와 별로 다른 점을 보이지 않는다. 결합 불안정성이 나타나는 영역도 그리한데, (0, 3) 모드와 MSD 점근모드에 의해  $\Omega^* \in (8.298209, 9.907143)$ 에서, (0, 1) 모드와 (0, 4) 모드에 의해  $\Omega^* \in (9.420775, 10.34869)$

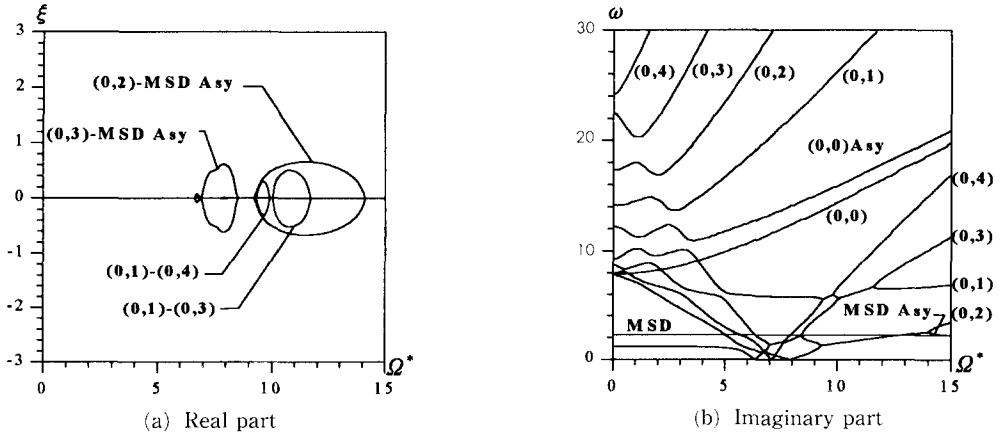


Fig. 5 Variation of the thickness and the mass ( $h=0.1 h_0$ ,  $M=10 M_0$ )

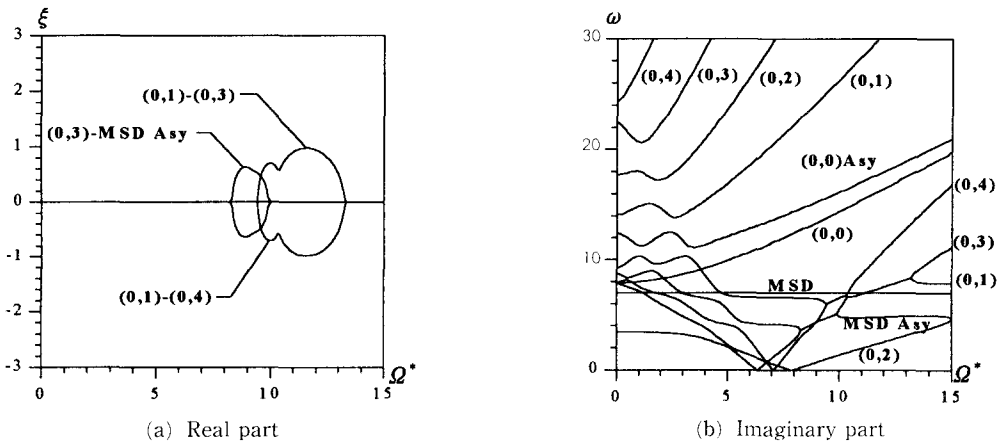


Fig. 6 Variation of the thickness and the stiffness  $|$  ( $h=0.1 h_0$ ,  $k_1=0.1 k_{10}$ )

에서, (0, 1) 모드와 (0, 3) 모드에 의해  $\Omega^* \in (10.34869, 13.24548)$ 에서 불안정하게 나타난다. Fig. 4의 경우보다 조금 낮은 회전속도에서 불안정하게 되는 이유는  $k_1$ 의 감소로 인해 질점계 모드의 허수값이 조금 감소했기 때문이다.

질점계에서  $k_2$ 는 큰 값을 갖고 있고, 원판과 상호 작용을 하는 과정에서 힘을 전달하는 부분이기 때문에 시스템의 특성을 변화시키는데 직접적인 영향력을 갖는다.  $k_2$ 를 감소시켰을 때, Fig. 7(b)에서 나타난 것처럼 고유치의 허수부가 대표값을 가진 시스템의 경우와 비슷하게 나타나고, 결합 불안정성 영역이 크게 감소했음을 알 수 있다. 이는 MSD 점근모드가 질점계 모드 가까이에 있고  $\Omega^*$ 가 증가함에 따라 질점계 모드로 빠르게 점근하기 때문에 MSD 점근모드에 의해 발생하는 결합 불안정성이 약화되었고,  $k_2$ 가 결합 불안정성에 큰 영향

을 준다는 것을 보여준다. Fig. 7(a)를 통해서도 고유치의 양의 실수값이 줄었음을 볼 수 있으므로 시스템이 좀 더 안정해졌다고 할 수 있겠지만 질량을 증가시킨 경우와 마찬가지로 MSD 점근모드와 원판의 전진모드들과의 결합 불안정성이 빨리 나타나게 되어 원판의 동작 한계속도를 낮추는 결과를 가져온다. 결합 불안정성은 (0, 3) 모드와 MSD 점근모드에 의해  $\Omega^* \in (7.456410, 8.228402)$ 에서, (0, 1) 모드와 (0, 4) 모드에 의해  $\Omega^* \in (9.318117, 9.428134)$ 에서, (0, 1) 모드와 (0, 3) 모드에 의해  $\Omega^* \in (9.982579, 10.22919)$ 에서, (0, 2) 모드와 MSD 모드에 의해  $\Omega^* \in (10.80951, 12.62876)$ 에서 발생한다.

질점지지부의 점성  $c_1$ 이 고려된 경우, Fig. 8(a)에서처럼  $\Omega^*=6.330672$ 일 때부터 불안정하기 시작하는데, 이 값은 (0, 3) 모드의 임계속도이다. (0,

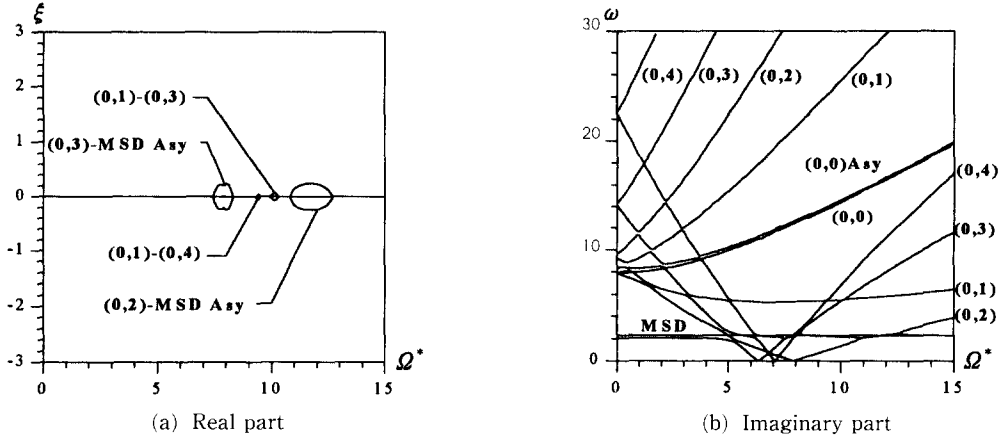


Fig. 7 Variation of the thickness and the stiffness II ( $h=0.1 h_0$ ,  $k_2=0.1 k_{20}$ )

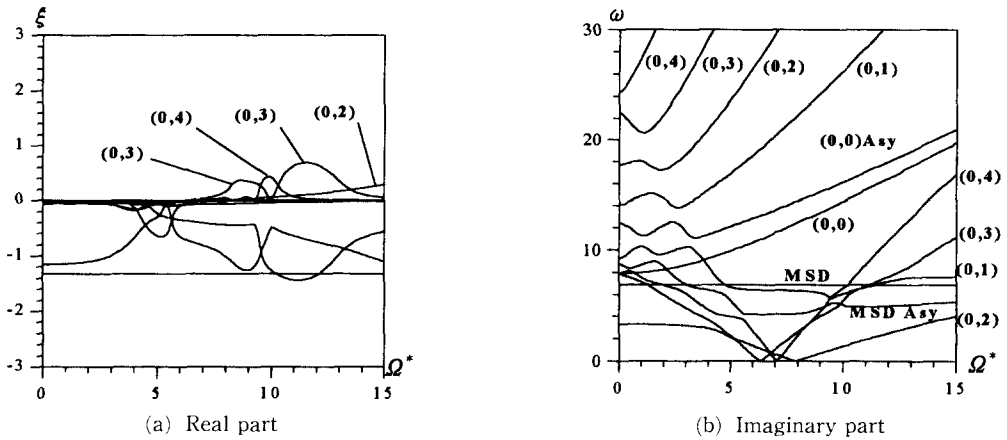


Fig. 8 Variation of the thickness and the damping I ( $h=0.1 h_0$ ,  $c_1=1.0$ )

3) 모드가 다른 모드들 보다 먼저 임계속도에 도달하므로  $c_1$ 의 존재는 최초 임계속도를 지나면 시스템을 불안정하게 한다고 볼 수 있다. 그러나 그 이전의 회전도 영역에서는 시스템 안정성에 좋은 효과를 준다. Fig. 8(b)와 Fig. 4(b)의 다른 점은 점성이 없는 경우에 발생되었던 결합 불안정성이 사라졌다는 것이다. 그 대신 한 전진모드와 다른 모드의 값이 서로 가까워질 수록 양의 실수부가 커지고, 멀어질 수록 작아지다가 충분히 멀어지면 어떤 일정한 값을 유지하게 된다. 질점과 원판 연결부의 점성  $c_2$ 만 고려된 경우엔  $c_1$ 만 고려된 경우에 비해 시스템에 미치는 영향이 더 작음을 볼 수 있다. 즉, Fig. 9에서 고유치의 양의 실수값들을 자세히 살펴보면  $\Omega^*=6.330672$  이후에 항상 작은 양의 값이 존재하다가 (0, 3) 모드와 MSD 점근 모드가 충분히 가까워진 이후에 분명한 불안정성을 보이

고,  $c_1$ 만 고려된 경우와 마찬가지로 결합 불안정성은 나타나지 않는다. 이 경우도  $c_2$ 는 (0, 3) 모드의 임계속도에 도달하기 전에는 시스템 안정성에 좋은 영향을 주며, 한 전진모드와 다른 모드가 접근할 수록 양의 실수값이 커지고, 멀어질 수록 작아지다가 충분히 멀어지면 일정한 값을 유지하게 된다.

#### 4. 결론 및 고찰

스프링-댐퍼를 가진 질점계를 포함한 회전원판 시스템에서 질점이 원판과 직접 접촉하지 않고 탄성이나 점성을 지닌 매체를 통하여 상호작용하는 시스템의 동특성을 해석하여 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

(1) 원판이 정지상태일 때도 하나의 모드가 두개



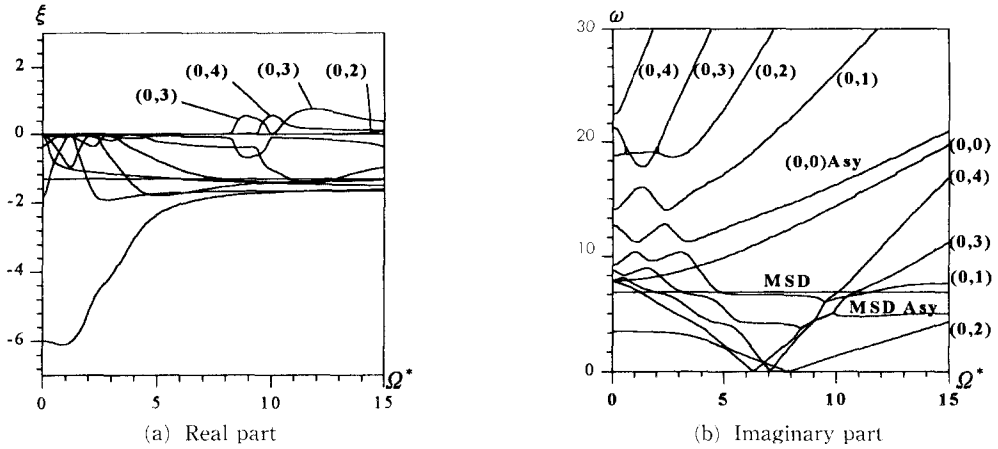


Fig. 9 Variation of the thickness and the damping II ( $h=0.1 h_0, c_2=1.0$ )

의 고유치를 가지며, 질점계가 회전하는 시스템 보다 원판이 회전하는 시스템의 모드별 임계속도가 더 높다. 그리고 질점계 모드와 질점계 점근모드 및 (0, 0) 점근모드가 발생함을 볼 수 있다.

(2) 원판의 굽힘강성에 대한 질점계의 탄성이 큰 경우에 불안정성이 커지는데, 주로 싹함 불안정성에 의해 발생한다. 또한 원판의 전진모드들에 의한 결합 불안정성이 시작되는 부차원화된 원판 회전속도  $\Omega^*$ 는 원판의 두께에 관계없이 일정하다.

(3) 질점계의 질량을 증가시키거나 탄성을 감소시키면 시스템이 약간 안정되지만 불안정 영역이 불연속적으로, 더 낮은 회전속도에서 발생한다. 따라서 이들의 값은 시스템의 요구조건에 따라 적절한 값을 갖도록 해야한다.

(4) 질점계의 점성은 최초의 임계속도 이후 상당히 넓은 회전속도 영역에서 시스템을 불안정하게 하므로 임계속도보다 높은 동작속도를 필요로 하는 시스템에서는 제거되어야 한다.

하드 디스크 드라이브의 경우 회전속도 및 헤드와 원판 사이 간격변화에 따라 공기막의 탄성 및 점성이 변하기 때문에 이를 고려한 시스템 해석이 필요하다. 또한 비대칭, 비균질 원판을 포함하거나 여러 개의 질점계를 가진 경우 등 일반적인 시스템의 안정성을 해석할 수 있는 방법을 연구해 볼 수 있을 것이다.

참고문헌

(1) Iwan, W. D. and Stahl, K. J., 1973, "The

Response of an Elastic Disk with a Moving Mass System," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 40, pp. 445~451.

(2) Iwan, W. D. and Moeller, T. L., 1976, "The Stability of a Spinning Elastic Disk with a Transverse Load System," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 43, pp. 485~490.

(3) Ono, K., Chen, J-S. and Bogoy, D. B., 1991, "Stability Analysis for the Head Disk Interface in a Flexible Disk Drive," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 58, pp. 1005~1014.

(4) Chen, J-S. and Bogoy, D. B., 1992, "Effects of Load Parameters on the Natural Frequencies and Stability of a Flexible Spinning Disk with a Stationary Load System," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 59, pp. S230~S235.

(5) Shen, I. Y. and Mote, Jr, C. D., 1991, "On the Mechanisms of Instability of a Circular Plate Under a Rotating Spring-Mass-Dashpot System," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 148, pp. 307~318.

(6) Valeev, K. G., 1963, "On the Danger of Combination Resonances," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 27, pp. 1745~1759.

(7) 장인배, 한동철, 1990, "마그네틱 헤드 슬라이더의 극소 공기막에 대한 동특성 해석," 대한기계학회논문집, 제14권, 제6호, pp. 1487~1494.