

〈논 문〉

## 3차원 자체접촉을 위한 유한요소해석에 의한 등속조인트 고무부트의 변형해석

이형욱\* · 김세호\* · 이충호\* · 허 훈\*\* · 이종화\*\*\* · 오승탁\*\*\*

(1997년 6월 20일 접수)

### Finite Element Analysis for 3-D Self-Contact Problems of C. V. Joint Rubber Boots

H. W. Lee, S. H. Kim, C. H. Lee, H. Huh, J. H. Lee and S. T. Oh

**Key Words :** Finite Element Method(유한요소법), Constant Velocity Joint Boot(등속조인트 부트), Self-Contact(자체접촉), Contact Force(접촉력)

#### Abstract

A finite element code is developed for 3-D self-contact problems, using continuum elements with a SRI(Selective Reduced Integration) scheme to prevent locking phenomenon by the incompressibility of rubber. Contact treatment is carried out in two ways : using the displacement constraints in case of rigid contact ; and imposing the same contact forces on two contact boundaries in case of self-contact. The finite element code developed is applied to the deformation analysis of C. V. joint boots which maintain lubrication conditions and protect the C. V. joint assembly from impact and dust. The boot accompanies large rotation depending on the rotation of the wheel axis and leading to the self-contact phenomena of the boot bellows. Since this contact phenomenon causes wear of the product and has great influence on the endurance life of the product, it is indispensable to carry out stress analysis of the rubber boots. In case of self-contact, various methods for determining contact forces have been suggested with an appropriate contact formulation. Especially, the types of penetration in self-contact are modularized to accelerate computation with a contact algorithm.

#### 1. 서 론

등속조인트 부트는 조향장치에 의한 차축의 회전 운동을 전달하는 차축연결 부위인 등속조인트를 보호하는 기능을 한다. Fig.1은 등속조인트의 조립 형상을 보여주고 있다. 부트의 재료로는 고무재료

인 CR재가 많이 쓰이고 있다. 부트는 자동차의 운행중 부트내부 온도의 상승으로 윤활유가 뿜창하여 내압이 발생하고, 차축의 회전에 따라 인장과 압축, 굽힘의 복합적인 변형을 하게 되며, 부트가 서로 겹쳐서 운동하는 자체접촉도 일어나게 된다. 이러한 부트의 자체접촉은 마멸을 일으키며 수명을 단축시킨다.<sup>(1)</sup>

부트 해석기술의 핵심은 부트 주름 자체의 접촉 문제를 해석하여, 이러한 자체접촉현상이 일어나지 않는 최적의 설계를 구현하는 것이다. 접촉현상은

\*한국과학기술원 기계공학과

\*\*회원, 한국과학기술원 기계공학과

\*\*\*기아중공업(주) 기계기술연구소

물체의 변형에 직접적인 영향을 주고 마찰이 수반되는 복잡한 현상이며, 경계표면의 모델링, 접촉표면의 탐색, 접촉구속방법, 마찰 등 수치적으로 어려운 문제점이 많다. 또한, CR제는 고무의 한 종류이므로, 비압축성을 가지는 물질<sup>(2)</sup>로 이러한 물성과 변형기구를 가지는 부트를 해석하기 위해서는 비압축성을 갖는 재료, 접촉 및 기하학적 대변형 등의 비선형성을 모두 고려하여야 한다. 이러한 비선형성의 존재로 해석시에 해의 수렴이 매우 어려우며, 많은 수치적인 문제가 생기게 된다.<sup>(3,4)</sup>

접촉에 관한 해석은 Hertz<sup>(5)</sup>가 해석해를 구하기 시작한 이후로 많은 연구가 진행되었으며, 크게 변분등식을 이용한 방법<sup>(6~8)</sup>과 변분부등식을 이용한 방법<sup>(9,10)</sup>등으로 연구가 진행되고 있다. 부트를 해석한 예로는 Maeda 등,<sup>(11)</sup> Kim 등<sup>(12)</sup>과 Huh<sup>(13~15)</sup> 등이 있으며, ABAQUS<sup>(16)</sup>나 MARC<sup>(17)</sup>를 이용한 해석 등이 있다.

본 논문에서는 가상일의 원리에 의하여 지배방정식의 적분형을 유도하였고, 개량 라그랑지안 수식화로부터 증분해석을 수행하였다.<sup>(18)</sup> 재료의 물성은 탄성으로 Hooke의 법칙을 만족한다고 가정하였으며,<sup>(19)</sup> 기하학적인 비선형성을 고려하였다. 또한 유도된 수식화를 이용하여 3차원에 대하여 선형 연속체요소로 모델링하였으며, 고무의 특성인 비압축성에 의한 잠금현상을 방지하기 위하여 선택적 저감적분법을 사용하였다. 또한, 자체접촉문제를 해석하기 위한 방법으로 자체접촉면에 접촉상태에 따라 다른 접촉력을 부과하였고, 물리적으로 타당한 접촉력을 설정하는 여러 가지 방법을 제시하였다. 특히 접촉시에 투과되는 양상을 모놀화하여 상당접촉력을 신속하게 결정할 수 있게 하였다. 제시된 이론을 바탕으로 대변형 유한요소 프로그램을 구성하여 등속조인트 부트의 접촉을 3차원 해석하였다.

## 2. 이 론

### 2.1 응력장식

해석하고자 하는 변형체를 체적이  $\Omega$ 이고, 경계표면이  $\Gamma$ 인 자유물체로 생각하면, 경계표면은 표면력이 작용하는  $\Gamma_f$ 와 변위가 규정된  $\Gamma_d$ 의 두 부분으로 나눌 수 있다. 이 자유물체가 평형상태에 있을 때  $\sigma_{ij}$ 는 다음의 평형방정식을 만족하는 임의의 응력장이다.

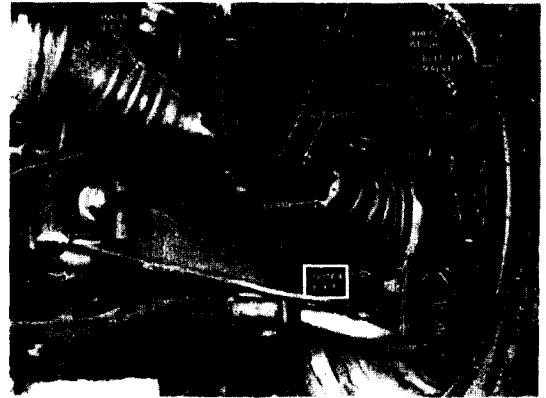


Fig. 1 C. V. joint boot assembly

$$\begin{aligned}
 (\text{경계조건}) \quad & \left\{ \begin{aligned} \sigma_{ij,j} + \rho b_i &= 0 & \text{in } \Omega & (1a) \\ u_i &= g_i & \text{on } \Gamma_d & (1b) \\ \sigma_{ij} n_j &= t_i & \text{on } \Gamma_f & (1c) \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

여기서,  $\sigma (= \sigma_{ij} e_i \otimes e_j)$ 는  $\Omega$ 에서 정의되는 Cauchy 응력텐서이고,  $\rho$ 는 물체의 밀도를 나타내며,  $\mathbf{b} (= b_i e_i)$ 는 물체력벡터이다.  $\mathbf{u} (= u_i e_i)$ 는 변위벡터로서  $\Gamma_d$ 에서는  $\mathbf{g} (= g_i e_i)$ 로 규정되는 벡터함수를 갖는다.  $\mathbf{t} (= t_i e_i)$ 는 단위수직벡터가  $\mathbf{n} (= n_i e_i)$ 으로 표시되는  $\Gamma_f$ 에 작용하는 표면력벡터이다.

2.2 개량 라그랑지 수식화에서의 가상일의 원리 식 (1)에 가상일의 원리를 적용하고, 전체영역에 대해 적분하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} \sigma_{ij} \bar{u}_{i,j} d\Omega &= \int_{\Omega} \rho b_i \bar{u}_i d\Omega + \int_{\Gamma_f} t_i \bar{u}_i d\Gamma, \\
 \forall \bar{u}_i &= 0 \text{ on } \Gamma_d & (2)
 \end{aligned}$$

여기서,  $\bar{u}_i$ 는 임의의 가상변위벡터이다. 식 (2)의 직접적인 적용은 미소변형 탄성문제에서만 가능하므로, 대변형 문제를 해석하기 위해서는 다음과 같은 라그랑지안 수식화가 필요하다.

$$\int_{\Omega} T_{ij} \bar{u}_{i,j} d\Omega = \int_{\Omega} \rho^0 b_i \bar{u}_i d\Omega + \int_{\Gamma} t_i^0 \bar{u}_i d\Gamma \quad (3)$$

여기서,  $T_{ij}$ 는 Cauchy 응력텐서와 식 (4)와 같은 관계를 갖는 1차 Piola-Kirchhoff 응력텐서이고,  $J (= \rho^0 / \rho)$ 는 좌표변환행렬의 행렬식이며,  $^0$ 는 변형전 초기형상의 함수값임을 나타낸다.

$$T_{ji} = J X_{j\alpha} \sigma_{\alpha i} \quad (4)$$

개량 라그랑지 수식화에서는 Fig. 2와 같이 임의의 시간  $t$ 에서의 형상  $\Omega^t$ 를 기준좌표계로 지정하여

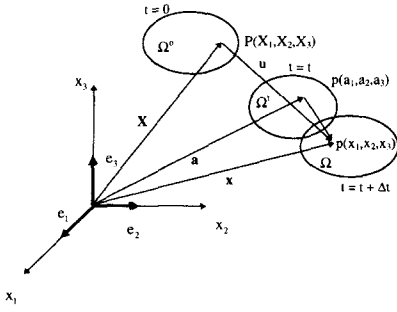


Fig. 2 Deformed configuration in the original and reference coordinates

$\Delta t$  동안에 미소변형을 하는 것으로 가정한다. 이때의 변형이 미소하므로 모든 정적, 동적변수를  $T_{ji} \approx \sigma_{ij}$ 로 가정되는  $\Omega^t$ 에서의 값으로 다음과 같이 근사할 수 있다.

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^t} (\Delta \sigma_{ki} \delta_{jk} + \sigma_{ji} \Delta u_{k,k} - \sigma_{ki} \Delta u_{j,k}) \bar{u}_{i,j} d\Omega \\ &= \int_{\Omega^t} \rho b_i^{t+\Delta t} \bar{u}_i d\Omega + \int_{\Gamma^t} t_i^{t+\Delta t} \bar{u}_i d\Gamma \\ & - \int_{\Omega^t} \sigma_{ji} \bar{u}_{i,j} d\Omega, \quad \forall \bar{u}_i \end{aligned} \quad (5)$$

### 2.3 구성방정식

유한 회전효과를 허용하면서, 회전대상성(objectivity)을 갖는 Jaumann 증분( $\Delta$ )을 Cauchy 응력 텐서에 도입하고 재료의 성질을 Hooke의 법칙을 따르는 탄성재료로 가정하면, 이에 따른 재료의 구성방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\overset{\Delta}{\sigma}_{i,j} = D_{ijkl} \Delta \epsilon_{kl} \quad (6)$$

여기서,  $D_{ijkl}$ 은 아래와 같이 표시되는 재료의 특성 텐서이다.

$$D_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (7)$$

여기서,  $\lambda$ 와  $\mu$ 는 제1, 제2의 Lamé 상수이며, 탄성계수 E와 푸아송비  $\nu$ 로부터 구할 수 있다. 재료의 구성텐서  $D_{ijkl}$ 는 일반적으로 1축 인장시험을 통해 간단히 구해진다.

고무의 특성은 대변형일 때 하중과 변형의 관계가 약간의 비선형성을 갖게 된다. 따라서 변형이 매우 클 경우에는 선형 탄성으로 모델링하는 것은 실제와 오차를 발생하게 된다. 따라서 정확한 모델링을 위해서는 초탄성(hyperelasticity)으로 나타내

는 것이 적합하다.

일반적으로 고무의 변형을 모사하기 위해서는 등방성, 탄성, 비압축성으로 가정하여 해석한다. 이 가정에 따라 변형률 에너지함수  $U$ 를 다음과 같이 변형률 불변계수(strain invariant)의 함수로 표현할 수 있다.

$$U = U(I_1, I_2, J) \quad (8)$$

여기서, 변형률 불변계수는 주신장률(principal stretch)  $\lambda_i$ 로 다음과 같이 표현된다.

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \quad (9a)$$

$$I_2 = \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_3^2 \lambda_1^2 + \lambda_1^2 \lambda_2^2 \quad (9b)$$

$$J = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \quad (9c)$$

재료의 비압축성을  $J=1$ 로부터 고려하고 변형 에너지 항을 수정하면 다음과 같이 변형률 불변항에 대하여 다항식 형태로 나타낼 수 있다.

$$U = \sum_{i+j=1}^N C_{ij} (I_1 - 3)^i (I_2 - 3)^j \quad (10)$$

위식에서  $N=1$ 일 때를 Mooney-Rivlin 모델이라고 하며, 일반적으로 변형률이 150% 이상되는 대변형 해석에는  $N=2$ 의 식을 많이 사용한다. 식(10)의 상수들은 1축 인장시험, 2축 인장시험, 전단시험중 두 가지 이상의 실험을 통하여 구해진다. 따라서 여러 가지 재료에 대하여 물성치를 얻기가 어려운 단점이 있다. 또한 고무의 변형이 크게 발생되지 않는 경우에는 Hooke 법칙을 만족하는 선형 탄성 모델링과의 오차는 별로 발생하지 않는다.<sup>(13,19)</sup> 따라서 본 논문에서는 고무재료를 Hooke 법칙을 만족하는 선형 탄성재료로 모델링하였다.

### 2.4 접촉기법

#### 2.4.1 접촉조건

Fig. 3에서 시간이  $t$ 일 때 두 변형체를 각각 형상이  $\Omega_1^t, \Omega_2^t$ 이고, 접촉이 일어날 가능성이 있는 경계표면을  $\Gamma_{1c}^t, \Gamma_{2c}^t$ 라 할 때, 경계표면  $\Gamma_{1c}$  위의 점  $\mathbf{x}$ 와 경계표면  $\Gamma_{2c}$  위의 임의의 점  $\mathbf{y}$ 중  $\mathbf{y}^*(\mathbf{x})$ 가 다음을 만족하면

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}^*(\mathbf{x})\|_2 = \min_{\mathbf{y} \in \Gamma_{2c}} \{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2\} \quad (11)$$

$\mathbf{x}$ 와  $\Gamma_{2c}$ 사이의 거리는 다음과 같이 표현된다.

$$g(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} - \mathbf{y}^*) \cdot \mathbf{n}^* \quad (12)$$

여기서,  $\mathbf{n}^*$ 는  $\mathbf{y}^*$ 점에서  $\Gamma_{2c}$ 에 수직인 단위벡터이

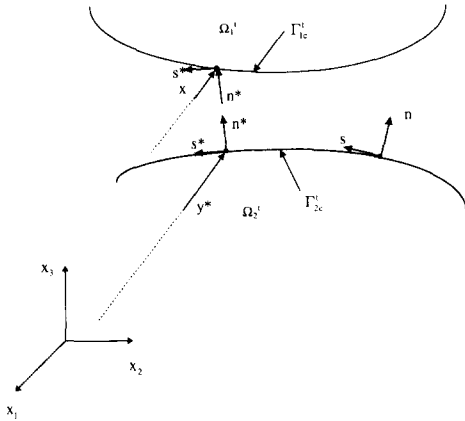


Fig. 3 Schematic diagram with definitions used in contact analysis

고,  $g$ 는 간극함수(gap function)이다.

위의 식에서 접촉조건을 나타내면 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$g \geq 0 \tag{13}$$

$$r_c \leq 0 \text{ if } g = 0 \tag{14}$$

$$r_c \cdot g = 0 \text{ on } \bar{\Gamma}_c^t \tag{15}$$

여기서,  $r_c$ 는 접촉에 의해서 발생한 수직 접촉력이고  $\bar{\Gamma}_c^t$ 는 실제 접촉이 일어난 경계표면이다. 식 (13)은 두 변형체 사이의 불침투조건을 나타내고, 식 (14)는 접촉면에서 수직력은 압축력이어야 한다는 것을 의미한다. 그리고, 식 (15)는 접촉하는 두 물체 사이에 작용하는 수직력과 침투한 양중 하나는 영이 되어야 한다는 것을 나타낸다.

위의 현상이 하나의 변형체에서 일어나는 것을 자체접촉이라 하며, 접촉조건은 하나의 변형체의 경계표면에서 같은 방식으로 표현된다.

### 2.4.2 접촉탐색

접촉탐색은 두 가지의 사항이 만족되어야 한다. 첫째로 탐색하는 시간이 적게 들고, 둘째로 접촉하는 절점들을 정확히 찾을 수 있는 신뢰성이 보장되어야 한다.

본 논문에서는 접촉 가능성이 있는 절점을 미리 지정하여 Fig. 4와 같이 종속접촉절점(slave contact node)과 주접촉면(master contact segment)으로 나누어 탐색하도록 하였고, 종속접촉절점의 탐색은 평면으로 투사하였을 때, 종속접촉절점이 속한 주접촉면을 탐색한 후 침투한 거리를 구하게 하였다. 이때 다음의 조건을 만족하면 접촉이라 한다.

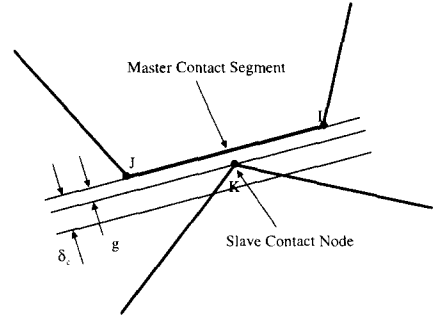


Fig. 4 Slave contact node and master contact segment used in a contact searching algorithm

$$g \leq \delta_c \tag{16}$$

여기서,  $\delta_c$ 는 접촉여부를 판정하는 상수로  $10^{-5} \sim 10^{-6}$  정도로 하였다.

### 2.4.3 구속방법

(1) 강체접촉 : 두 변형체중 하나의 변형체가 강체인 경우 벌칙기법(penalty method)을 사용하여 침투한 요소의 수직방향으로 침투한 절점을 구속하였다.

접촉경계 표면에서 변위제한조건은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\Delta u_n - \Delta g = 0 \text{ on } \bar{\Gamma}_{cu}^t \tag{17}$$

이때,  $\Delta u_n (= \Delta \mathbf{u}_n \cdot \mathbf{n}^*)$ 은 주어진 간극함수  $\Delta g$ 에 의해서 제한되는 수직변위의 증분이고, 식 (14)의 제한조건을 부여하기 위해 벌칙함수법을 쓰면, 수직반력의 증분  $\Delta r_{cu}$ 는 다음과 같다.

$$\Delta r_{cu} = -k_n (\Delta u_n - \Delta g) \text{ on } \bar{\Gamma}_{cu}^t \tag{18}$$

여기서  $k_n$ 은 벌칙상수이고,  $\bar{\Gamma}_{cu}^t$ 는 강체접촉이 일어난 경계표면이다.

일반적인 벌칙기법은 벌칙상수에 따라 해의 수렴성이 결정되므로 불침투조건 신뢰성이 떨어진다. 본 논문에서는 경사경계조건(skew boundary condition)을 사용하는 방법을 이용하여 벌칙상수에 관계없이 변위를 정확히 구속하였다.

(2) 자체접촉 : 접촉이 하나의 변형체에서 일어난 자체접촉의 해석에서는 변위를 구속하는 벌칙기법으로는 정확한 해를 찾을 수 없다. 따라서 본 연구에서는 자체접촉은 절점이 요소에 침투한 양과 변형체의 물성치, 절점이 침투된 위치와 면적을 고려한 접촉력을 부과하여 접촉을 처리하였다.

자체접촉에서의 침투한 절점에서의 수직반력의

증분은 다음과 같다.

$$\Delta r_{cs1} = -k_s(\Delta u_n - \Delta g) \text{ on } \bar{\Gamma}_{cs1}^t \quad (19)$$

$$\Delta r_{cs2} = -\Delta r_{cs1} \text{ on } \bar{\Gamma}_{cs2}^t \quad (20)$$

$$\bar{\Gamma}_{cs}^t = \bar{\Gamma}_{cs1}^t \cup \bar{\Gamma}_{cs2}^t \quad (21)$$

여기서, 자체접촉이 일어난 경계표면  $\bar{\Gamma}_{cs}^t$ 는 식 (21)에서 두개의 경계표면으로 이루어지고,  $\bar{\Gamma}_{cs1}^t$ 와  $\bar{\Gamma}_{cs2}^t$ 는 각각 종속접촉면과 주접촉면을 나타낸다.  $\Delta r_{cs1}$ 은  $\bar{\Gamma}_{cs1}^t$ 에서의 수직반력의 증분이며,  $\Delta r_{cs2}$ 는  $\bar{\Gamma}_{cs2}^t$ 에서의 수직반력의 증분이다.  $k_s$ 는 변형체의 탄성계수와 절점이 침투한 양, 접촉된 영역 등을 고려한 상수이다. 접촉해석시에 접촉력의 부과방향은 주접촉면에 수직인 방향으로 하였다. 본 논문에서는 실제 해에 근접할 수 있는 접촉력을 구하고, 해의 수렴성을 높여서 보다 효율적으로 접촉을 해석하기 위하여  $k_s$ 를 결정하는 다양한 방법을 제시하였다. 각 방법에 대한 수식들을 3장에 설명하였다.

## 2.5 연속체요소에서의 유한요소 수식화

개량 라그랑지방법에서의 가상일의 원리인 식 (5)에 구성방정식 (7)을 대입하고 접촉에 관한 식 (17)~(21)를 포함하면 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^t} (L_{ijk}\Delta u_{k,i} + \sigma_{jk}^t \Delta u_{j,k}) \bar{u}_{i,j} d\Omega \\ & + \int_{\bar{\Gamma}_{cs}^t} \{ (k_n(\Delta u_i - \Delta g) n^*) \bar{u}_{jN} \} d\Gamma \\ & + \int_{\bar{\Gamma}_{cs}^t} \{ (k_s(\Delta u_i - \Delta g) n^*) \bar{u}_{jN} \} d\Gamma \\ & + \int_{\bar{\Gamma}_{cs}^t} \{ (k_s(\Delta u_i - \Delta g) n^*) \bar{u}_{iN} \} d\Gamma \\ & = \int_{\Omega^t} \rho b_i^{t+\Delta t} \bar{u}_i d\Omega + \int_{\Gamma_f^t} t_i^{t+\Delta t} \bar{u}_i d\Gamma \\ & - \int_{\Omega^t} \sigma_{ji}^t \bar{u}_{i,j} d\Omega \quad \forall \bar{u}_i \text{ such that } \bar{u}_i \\ & = 0 \text{ on } \Gamma_d^t \end{aligned} \quad (22)$$

여기서,  $L_{ijk} = D_{ijk} - \sigma_{ik}^t \delta_{jl} - \sigma_{jk}^t \delta_{li}$ 이고,  $\Delta r \cdot \bar{u} = \Delta r_T \bar{u}_T + \Delta r_N \bar{u}_N$ 이며,  $N$ 은 접촉면의 수직인 방향,  $T$ 는 접촉면의 접선방향을 나타낸다.

각 요소에서의 변위를 3차원 8절점요소의 형상함수를 이용하여 나타내고,  $\bar{u}$ 의 임의성을 이용하여 식 (22)를 2차원 행렬식 (23)으로 만든다. 그리고, 이 행렬식을 풀 때, 뉴턴-랩슨방법을 이용한다. 여기서  $(n, i)$ 의 첨자  $n$ 은 시간증분을 의미하며,  $i$ 는 축차를 의미한다.

$$K^{(n,i)} \Delta u^{(n,i+1)} = P^{(n+1)} - F^{(n,i)} + R_c^{(n,i)} \quad (23)$$

식 (23)의 축차는 아래의 조건을 만족시킬 때까지 반복된다.

$$\left\| \frac{\Delta u^{(n,i+1)}}{u^{(n,i+1)}} \right\| \leq \delta \quad (24)$$

여기서,  $\|u^{(n,i+1)}\| = \left\| \sum_{k=0}^{i+1} \Delta u^{(n,k)} \right\|$ 이며, 허용오차  $\delta$ 는  $10^{-3} \sim 10^{-4}$ 의 매우 작은 상수이다.

## 2.6 선택적 저감적분법의 적용

CR제인 고무는 유한요소해석시에 비압축성 조건이 된다. 일반적으로 완전적분법을 사용하게 되면 비압축성 잠금이 발생하여 옳지 못한 해를 얻게 되므로 이를 완화시켜 주기 위해서는 선택적 저감적분법을 사용하여야 한다. 본 논문에서는 Hughes<sup>(20)</sup>가 제안한 B-bar Projection Method를 사용하여 잠금현상을 방지하였다.

## 3. 자체접촉시 접촉력 설정

유한요소해석시에 자체접촉 경계면에서 접촉력을 직접 구할 수 없다. 또한 해석시 해의 수렴성을 높이며 보다 효율적으로 접촉을 해석할 수 있도록 하기 위해서는 물리적으로 타당한 접촉력을 설정하여야 한다. 본 논문에서는 접촉력의 설정을 위하여 접촉력의 분포와 크기 등을 다양한 방법을 통해 변화시켜 가며 물리적으로 실제 접촉상태와 유사하고 실제 해에 근접할 수 있는 접촉력을 구하기 위해 다음의 세 가지 방법을 제시하고자 한다.

### 3.1 침투량을 고려한 접촉력

일반적으로 침투량이 큰 접촉절점은 침투량이 작은 접촉절점보다 접촉력이 크다는 것을 알 수 있다. 따라서, 접촉경계에서 접촉력은 접촉절점이 침투한 양에 비례한다고 가정하여 접촉력을 설정하였다. 이때 접촉경계면에서 접촉력은 두 경계면에서 크기는 같고 부호는 반대이다. 이와 같은 가정에서 종속접촉절점의 접촉력을 구하면 식 (25)과 같다.

$$f_{cs}^e = k_s \Delta g \quad (25)$$

### 3.2 침투량과 수렴성을 고려한 접촉력

3.1절에서 구하여진 접촉력을 사용하면 아주 작은 간격도 허용하지 않고 완전한 불침투조건을 만

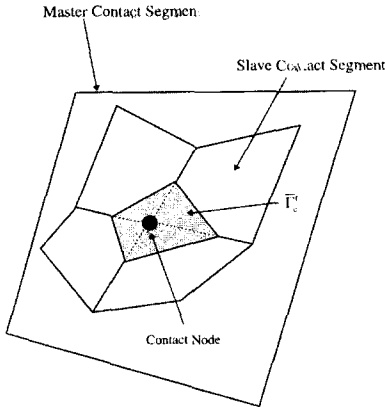


Fig. 5 Real contact boundary and contact region

죽할 때까지 죽차를 반복하게 되어 수렴성이 나쁘다. 이때 수렴성을 향상시키고 완전한 불침투조건이 아닌  $10^{-2}$  정도의 침투를 허용하도록  $k_s$ 를 침투량에 비례하게 조절하여 적용하도록 한다. 종속접촉점의 접촉력을 다음과 같이 수정하여 수식화하였다.

$$f_{cs}^e = k_s' \Delta g \quad (26)$$

$$k_s' = k_s \Delta g \quad (27)$$

3.3 침투량과 면적을 고려한 접촉력

실제 물체에서 일어나는 접촉은 연속적인 면에서 일어나게 되나 유한요소법으로 해석할 때에는 접촉면이 이산화된 경계표면으로 처리되므로 접촉점만을 고려하여 접촉해석을 하면 접촉면에서 집중하중이 부과되어 실제의 변형형상과 다른 변형형상이 생길 수 있다. 이러한 집중하중을 완화시켜 주기 위하여 접촉처리를 접촉경계면에서 수행하여 주어야 한다.

식(22)에서 자체접촉이 일어난 경계표면에서 종속접촉면에 대한 수직방향의 접촉조건항을 다시 쓰면 다음과 같다.

$$\int_{\Gamma_c^t} k_s (\Delta u_n - \Delta g)^+ d\Gamma \quad (28)$$

이때  $()^+$ 의 정의는 다음과 같다.

$$(x)^+ = \begin{cases} x & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases} \quad (29)$$

여기서, 접촉이 일어난 경계표면  $\Gamma_c^t$ 은 접촉이 일어난 요소의 경계표면으로 고려하여야 하므로 경계

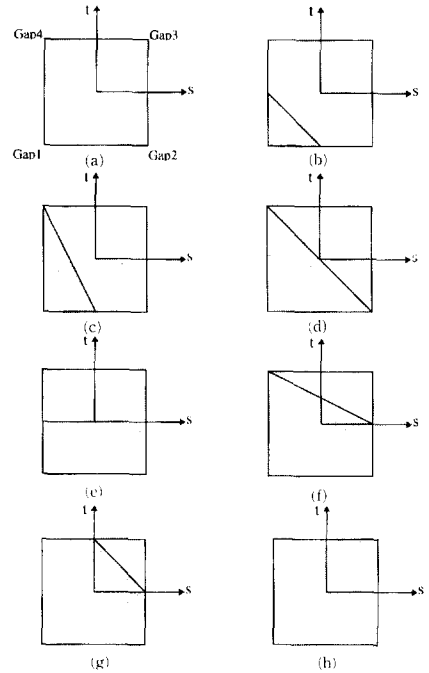


Fig. 6 Schematic diagrams of typical contact modes: (a) Definition of gap and slave segment connectivity (b)~(h) Typical contact modes

표면  $\Gamma_c^t$ 은 Fig. 5에서 표현되는 실제접촉면  $\Gamma_c^t$ 로 표현할 수 있다. 따라서 접촉이 일어났을 때, 식(28)은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\int_{\Gamma_c^t} k_s (\Delta u_n - \Delta g) d\Gamma \quad (30)$$

여기서, 종속접촉면에서의 접촉항(30)을 접촉강성행렬에 관한 항과 접촉력벡터에 관한 항으로 나타내고 형상함수를 이용하면 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\int_{\Gamma_c^t} k_s (\Delta u_n)_a N_a d\Gamma = \int_{\Gamma_c^t} k_s g_a N_a d\Gamma \quad (31)$$

여기서, 경계면에서 접촉면적과 침투된 양을 고려하여 접촉력벡터를 한 요소에 관하여 나타내면 식(31)의 우항은 다음과 같다.

$$f_{ca}^e = \int_{\Gamma_c^t} k_s [\sum_i (g_i)^+] N_a d\Gamma \quad (32)$$

여기서,  $\bar{\Gamma}_{ce}^t$ 는 접촉이 일어난 요소이다. 이때,  $\bar{\Gamma}_{ce}^t$  평면과 주접촉면에 침투한 종속접촉점으로 이루

어지는 체적  $V_{pe}$ 를 한 요소내에서의 전체 접촉력으로 하면  $k'_s$ 는 식 (33)으로 나타낼 수 있다.

$$k'_s = k_s \frac{V_{pe}}{\sum_a \int_{\Gamma_{cs}^e} [\sum_i (g_i)^+] N_a d\Gamma} \quad (33)$$

$$V_{pe} = \int_{\Gamma_{cs}^e} g_a N_a d\Gamma \quad (34)$$

유한요소해석시 요소간의 접촉상태는 여러 가지가 생길 수 있는데 이러한 경우에 관하여 종속접촉면에서의 접촉모드를 분석하여 보면 Fig. 6(b)에서 Fig. 6(h)와 같이 7가지의 경우의 모드가 나타난다. 여기서, 각 경우에 대하여 접촉절점에 부과되는 정규화(normalization)한 접촉력의 분포를 구하여 보면 Table 1과 같다. 이것은 Fig. 6(a)에서 절점이 침투되었을 때 침투된 최대 간극함수의 크기를 -1, 경계표면에 위치하였을 때 0으로 주고, 각 접촉절점에 부과되는 접촉력을 구하여 한 요소내에서 정규화한 값이다.

침투된 절점에 부과하는 접촉력  $f_{cp}^e$ 와 침투되지 않았으나 침투된 요소에 포함된 절점에 부과되어지는 접촉력  $f_{cm}^e$ 를 다음과 같이  $\alpha$ 와  $\beta$ 계수를 설정하여 변화시키며 수렴성에 영향을 주는지를 분석하면 3.1절의 접촉력과 본 절의 접촉력에 의한 수렴성을 판별할 수 있다.  $\beta=0$ 인 경우가 3.1절에서 사용된 접촉력 결정방법이며, 본 절에서 사용된 것

은  $\alpha=1, \beta=1$ 인 경우이다.

$$\alpha(\sum_e f_{cp}^e + \beta \sum_e f_{cm}^e) = \sum_e f_{cs}^e = k_s V_{pe} \quad (35)$$

3.4 주접촉면에서의 접촉력

자체접촉에서 종속접촉요소와 주접촉요소에 동일

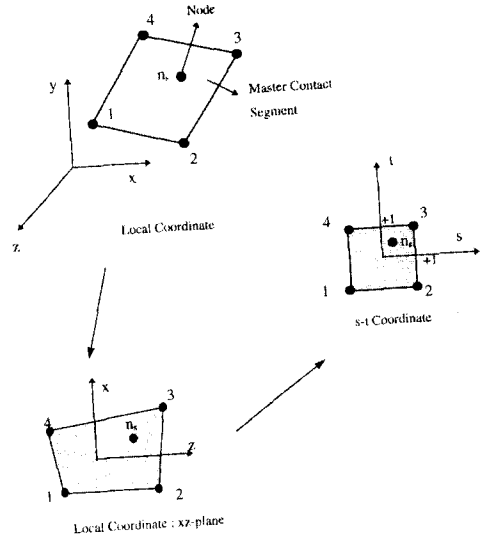


Fig. 7 Mapping of the master contact segment from the local coordinate system to the s-t coordinate system

Table 1 Typical contact force distribution in each of 7 contact modes

Mode	Gap 1 Normalized force	Gap 2 Normalized force	Gap 3 Normalized force	Gap 4 Normalized force
1	-1.0 1.000	1.0 0.212	3.0 0.030	1.0 0.212
2	-1.0 1.000	1.0 0.231	2.0 0.077	0.0 0.538
3	-1.0 1.000	0.0 0.600	1.0 0.200	0.0 0.600
4	-1.0 1.000	-1.0 1.000	1.0 0.333	1.0 0.333
5	-1.0 1.000	-0.5 0.913	0.5 0.478	0.0 0.739
6	-1.0 1.000	-0.333 0.937	0.333 0.663	-0.333 0.937
7	-1.0 1.000	-1.0 1.000	-1.0 1.000	-1.0 1.000

한 크기의 접촉력을 부과하여 접촉면에서 평형방정식을 만족하도록 해야 한다. 주접촉요소의 절점에 부과되는 접촉절점력의 증분은 주절점요소에서 힘평형식과 모멘트평형식을 만족하도록 형상함수를 사용하여 식 (36)과 같이 접촉력을 나누어 준다.

$$f_{c\beta}^e = N_\beta \sum_a f_{ca}^e \quad (36)$$

$$N_\beta = \frac{1}{4} (1 + s_\beta s) (1 + t_\beta t) \quad (37)$$

여기서,  $\beta (=1, 2, 3, 4)$ 는 주접촉면의 절점을 나타내며,  $s$ 와  $t$ 는 Fig. 7에서 공간평면상의 주접촉면을 형상을 유지한 상태로 평면으로 투사시킨 후 종속접촉절점  $n_s$ 를  $s$ - $t$ 좌표계로 사상시켰을 때의 좌표값이다. 이때  $s$ - $t$ 좌표계로 사상시킬 때 뉴턴-랩슨법을 이용한다.

#### 4. 등속조인트 부트의 축대칭 압축해석

구성된 자체접촉 프로그램의 효율성을 평가하기 위한 예제로 Fig. 8과 같은 형상의 단면을 가진 부트를 축대칭으로 압축해석하였다. 해석에 사용된 모델은 아벨라 차량에 사용되는 등속조인트 부트이고, 재료의 물성치는 탄성계수  $E$ 는 3.3 MPa이고, 푸아송비  $\nu$ 는 0.45이다.

잠금현상을 방지하기 위해서 선택적 저감적분법을 사용하였고, 접촉면에서 무마찰조건을 주었으며, 해석시 경계조건과 유한요소 모델은 Fig. 9에 나타나 있다. 본 해석에서는 접촉력 부과조건으로 침투량만을 고려하는 3.1절의 방법을 사용하였다.

Fig. 10에는 압축해석된 변형형상의 단면과 초기형상을 도시하였으며, Fig. 11에는 본 해석의 변형

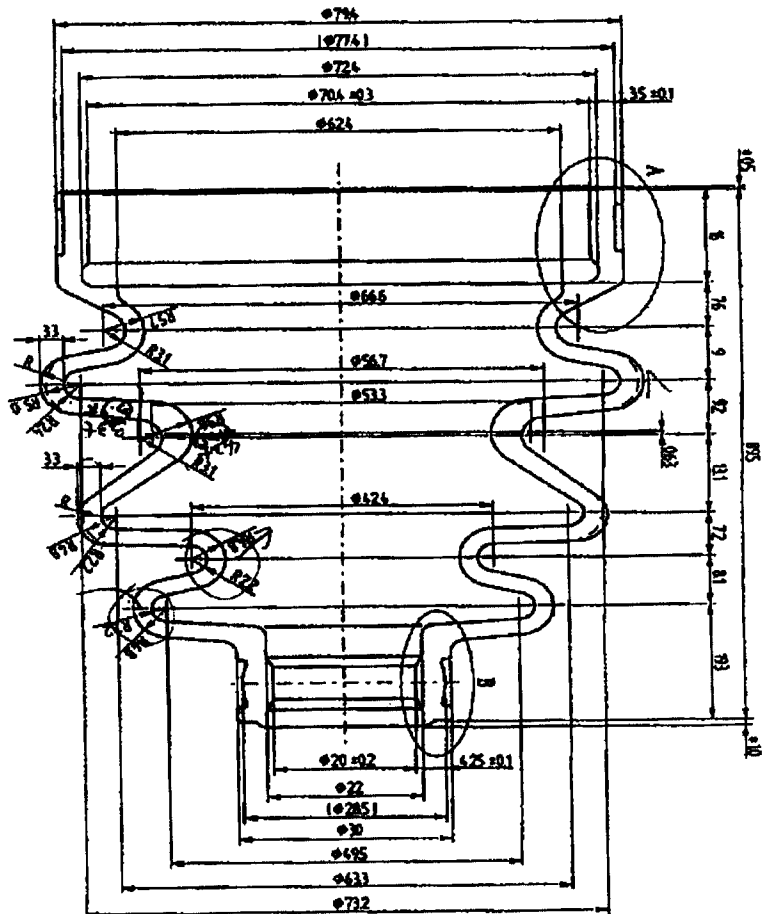


Fig. 8 Dimension of the boot for Avella model



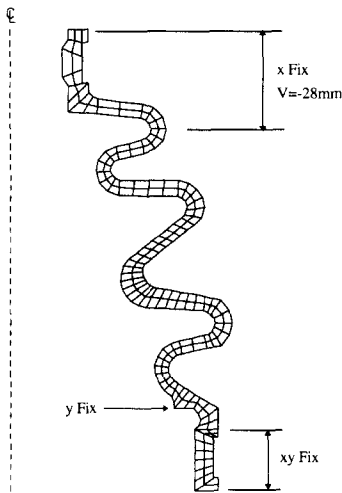


Fig. 9 Initial mesh and boundary conditions for compression of an axisymmetric boot

형상을 ABAQUS/Standard의 결과와 비교하여 도시하였다. 전체적으로 ABAQUS의 결과와 상당히 잘 일치하는 것을 알 수 있으며, CASE 1의 방법으로도 2차원 문제에서는 잘 적용될 수 있음을 알 수 있다.

### 5. 등속조인트 부트의 3차원 접촉해석

본 논문에서 해석에 사용된 부트의 형상 및 치수를 Fig. 12에 도시하였고, 변형해석을 위한 유한요소 모델은 Fig. 13(a)에 도시하였다. 유한요소는 선형 3차원 8절점 Brick 요소를 사용하였으며 유한요소 절점의 수는 3070개이고, 요소의 수는 1818개이다. 부트의 굽힘이 한쪽 방향으로 일어나기 때문에 접촉이 일어나는 쪽의 원주방향의 요소의 크기를 작게하여 9등분하였다. 해석에 사용된 재료의 물성치는 탄성계수 E는 3.3 MPa이고, 푸아송비  $\nu$ 는 0.45이다.

잠금현상을 방지하기 위하여 수치적분은 선택적 저감적분법을 사용하였다. 부트 굽힘의 경계조건은 Fig. 13(b)에 도시되어 있다. 하단부의 변위를 완전히 구속시키고 상단부를 회전경계조건으로 굽힘을 부과하였다. 이때, 접촉조건은 축과 접촉이 일어나는 부분인 상단 일부와 내부 상단 첫번째 산을 강제접촉조건을 부과하였고, 내부 하단 첫번째 골부분의 상하면에 자체접촉조건을 부과하였다. 회전 경계조건은 부트의 하단 중앙점을 중심으로 22°를

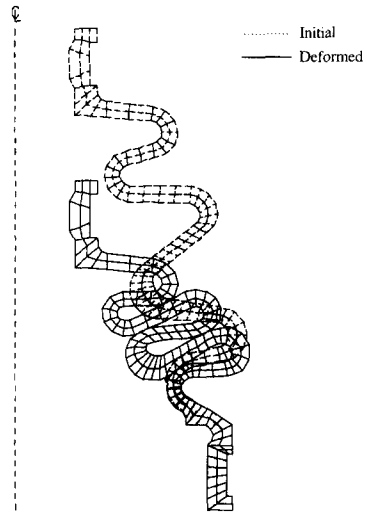


Fig. 10 Initial and deformed meshes of a compressed BJ boot

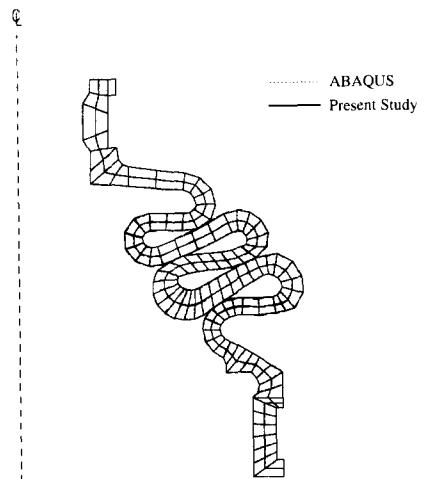


Fig. 11 Comparison in deformed shapes between present analysis and ABAQUS analysis

주었다.

부트의 접촉해석은 3장에서 사용된 방법을 순서에 따라 CASE 1, CASE 2, CASE 3이라 하여 각 경우에서 제시된 접촉력으로 해석하여 22°의 굽힘이 일어났을 때 까지의 변형형상을 비교하였고 CASE 3의 경우 ABAQUS/Standard로 해석한 결과와 비교하였다.

#### 5.1 CASE 1의 해석

CASE 1의 경우는 접촉력을 간극함수에 비례하게 부과하여 정확히 접촉조건을 만족시키는 경우가

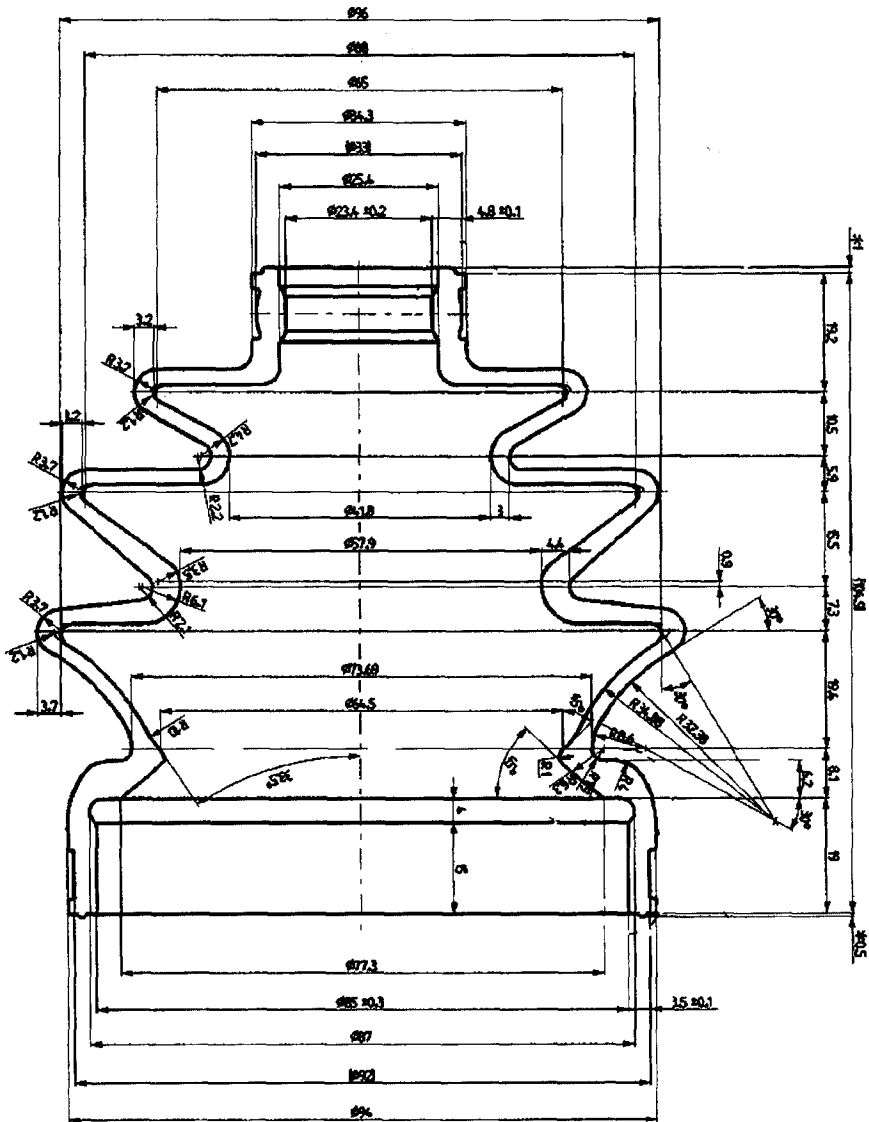


Fig. 12 Dimension of the new BJ boot model

다.

Fig. 14(a)에서 해석된 내부면의 형상을 보면 내부 첫번째 산에서 축과의 접촉이 발생하였는데, 축과의 접촉은 회전이 19°일 때부터 진행되었다. 축과의 강제접촉에서는 접촉처리를 별첨기법을 사용하였는데, 축과 접촉하는 절점이 축차도중 계속 침투된 상태와 침투되지 않은 상태를 반복하게 된다. 이때, 3회의 반복 후 접촉력을 검토하여 떨어져야 할 절점은 접촉절점에서 제외시켜 해를 수립시켰다.

자체접촉이 일어나는 내부면에서 침투된 접촉절

점은 서서히 외부로 밀려 나가며 해석도중 계속 접촉절점으로 처리되던 절점이 떨어지면 접촉절점의 이전 상태의 접촉력으로 인하여 해의 수렴성이 상당히 좋지 않았다. 이 경우 떨어지는 절점의 접촉력이 줄어들고 주위의 절점으로 접촉력이 분산될 때까지 계속 구속시켜 주는 방법을 사용하여 해를 수립시켰다. CASE 1의 경우 침투량이 10<sup>-5</sup>정도가 될 때까지 접촉을 처리하여 절점이 1개 또는 2개만 접촉한 상태로 해석이 진행되었다. 따라서 수렴이 느리며 절점이 분리되는 문제가 많이 발생하게 된다.

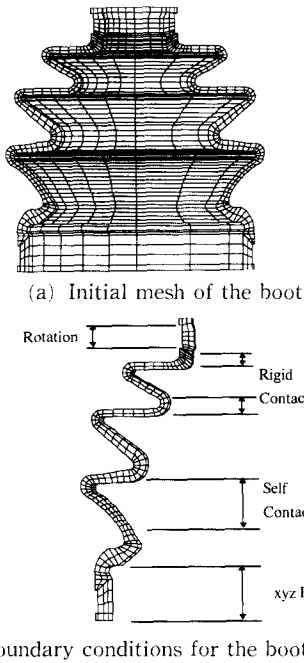


Fig. 13 Schematic diagram of a short model for BJ boot

5.2 CASE 2의 해석

CASE 1의 경우는 접촉력 계수를 재료의 물성치에 비례하여 일정하게 적용하였기 때문에 침투량이 클 때 계수를 큰 값으로 설정하면 축차도중 침투량이 적어졌을 때 침투한 절점이 모두 빠져 나가 해의 수렴성이 나빠지게 된다. 따라서, 접촉절점의 침투량을 고려하여 접촉력을 설정하고, 또한 완전한 불침투조건이 아니라 소량의 침투량을 허용하도록 접촉력의 계수를 침투량에 비례하게 설정하여 침투량이  $10^{-2}mm$  정도에서 해가 수렴이 되도록 접촉력 계수를 변경하였다.

Fig. 15에서 해석된 결과를 보면 CASE 1의 경우와 비교하여 변형형상은 거의 동일하며, 접촉절점의 침투량은  $10^{-2}mm$ 범위의 값을 가지고 있다. CASE 2의 경우 CASE 1보다 상당히 향상된 수렴성을 보이며 이러한 접촉력의 설정은 침투량을 다소 허용하는 범위내에서는 타당하고 잘 설정된 결과라고 생각된다. 그러나, 이 경우 역시 접촉절점의 침투량이 접촉요소의 크기와 접촉면적등이 고려되어 있지 않으므로, 보다 타당한 접촉력을 설정하기 위하여 접촉력을 침투된 체적에 비례하도록 하여 접촉면적과 침투량을 모두 고려하는 CASE 3의 경우를 적용하였다.

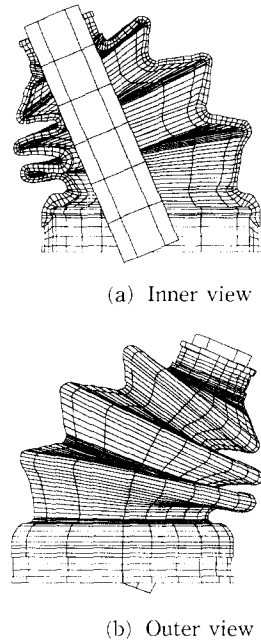


Fig. 14 Deformed shape of CASE 1 (Rotation : 22°)

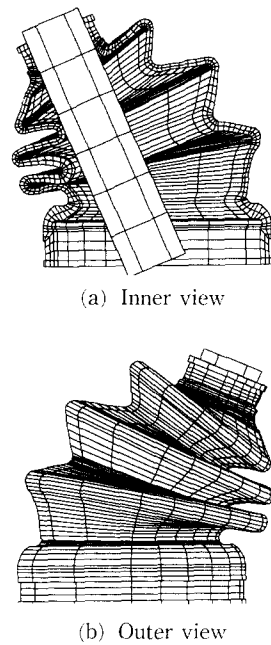


Fig. 15 Deformed shape of CASE 2 (Rotation : 22°)

5.3 CASE 3의 해석

접촉력을 접촉절점이 다른 경계에 침투한 체적을

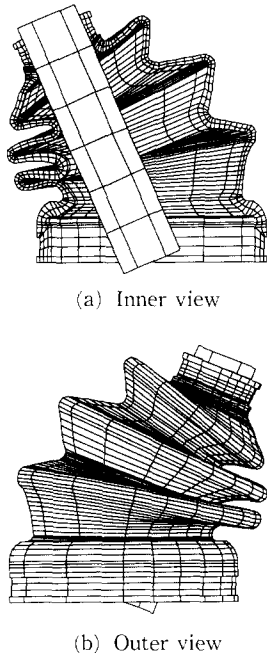


Fig. 16 Deformed shape of CASE 3 (Rotation : 22°)

접촉량으로 설정하는 방법을 사용하여 부트의 굽힘 해석을 한 경우 해석된 변형형상은 Fig. 16에 나타나 있으며, 이 경우 CASE 1과 CASE 2의 경우와 유사하고 수렴성은 CASE 1보다 향상된 결과를 보여 주었다. 이 경우에도 CASE 2의 방법을 같이 적용하면 수렴성이 더욱 향상되는 결과를 보여 주게 된다. 식 (35)에서 계수를 각각 1로 정하여 해석한 결과  $\beta=0$ 로 설정한 경우보다 수렴성이 향상됨을 알 수 있으며, 접촉한 질점이 축차도중 떨어져 나가 해의 수렴성에 영향을 주게 될 때 떨어지는 질점을 강제로 구속시켜 주기 위하여 이 경우  $\beta < 0$ 의 값을 적용하면 해를 수렴시킬 수 있다.

CASE 3의 경우 21°와 22°회전시의 해석결과를 접촉이 일어나는 원주방향의 최외곽층에서 ABAQUS의 해석결과와 비교하여 Fig. 17에 나타내었다. 해석된 범위내에서는 결과가 잘 일치함을 알 수 있으며, 이러한 접촉력의 설정은 물리적으로 타당성을 가짐을 확인할 수 있다.

## 6. 결 론

본 논문에서는 자체접촉문제에 관한 접촉력 부과 이론을 제시하고 이러한 이론을 바탕으로한 대변형

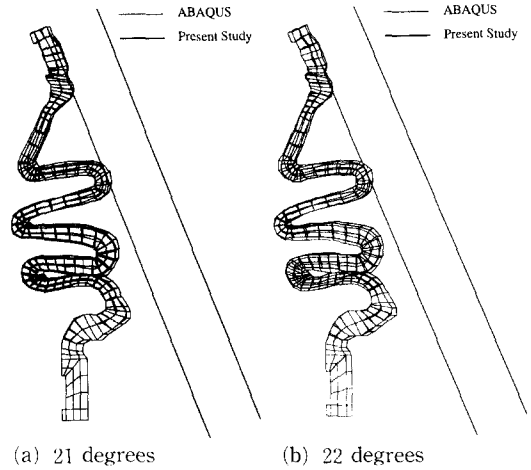


Fig. 17 Comparison in the first layer of circumferential direction between ABAQUS results and present results

유한요소 프로그램을 구성하였다. 구성된 프로그램으로 등속조인트 부트의 3차원 강체접촉과 자체접촉을 해석하여 개발된 프로그램의 타당성과 정확성을 검증하였다. 해석된 결과는 물리적으로도 의미를 가지고 있으며, 결과가 실제와 잘 일치함을 알 수 있다. 본 논문에서 얻어진 결과를 종합하면 다음과 같다.

(1) 가상일의 원리에 의하여 지배방정식의 적분형을 유도하였고, 개량 라그랑지 수식화로부터 증분해석을 수행하였다. 기하학적 비선형성을 고려하였고, 고부재료의 비압축성에 의한 잠금현상을 방지하기 위하여 선택적 저감적분법을 사용하였다. 이러한 이론을 바탕으로 한 유한요소 프로그램을 개발하였다.

(2) 강체접촉문제를 해석하기 위하여 벌칙기법을 사용하였고, 자체접촉문제를 해석하기 위하여 접촉면에서의 물리적으로 타당한 접촉력의 설정방법을 제시하였다. 특히 접촉시에 투과되는 양상을 모듈화하여 접촉양상과 상당접촉력을 신속하게 결정할 수 있게 하였다. 이러한 모듈화는 본 논문에서 처음 시도하는 것으로 접촉처리기법의 효율과 계산속도를 상당히 증가시켰다.

(3) 구성된 유한요소 프로그램을 이용하여 등속조인트 부트의 3차원 접촉해석을 수행하였고, 상용 유한요소 프로그램인 ABAQUS/Standard로 해석한 결과와 비교하여 개발된 유한요소 프로그램은 바로 부트의 최적 형상설계에 이용할 수 있는 장점

이 있다.

### 참고문헌

- (1) 기아기공(주), C. V. Joint용 Boot 독자개발계획서.
- (2) Mark, J. E., Erman, B. and Eirich, F. R., 1994, "Science and Technology of Rubber," 2nd Ed., Academic Press.
- (3) Haines, D. W. and Wilson, W. D., 1979, "Strain-energy Density Function for Rubber like Materials," *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 27, pp. 345~360.
- (4) Scharnhorst, T. and Pian, T. H. H., 1978, "Finite Element Analysis of Rubber-like Materials by a Mixed Model," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 12, pp. 665~676.
- (5) Hertz, H., 1895, "On the Contact of Rigid Elastic Solids and on Hardness," *Gesammelte Werke*, Vol. 1, Leipzig.
- (6) Bathe, K. J. and Chaudhary, A., 1985 "A Solution Method for Planar and Axisymmetric Contact Problems," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 21, pp. 65~88.
- (7) Chandrasekaran, N., Haisler, W. E. and Goforth, R. E., 1987, "A Finite Element Solution Method for Contact Problems with Friction," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 24, pp. 477~495.
- (8) Choi, T. H. and Huh, H., 1997, "Draw-bead Simulation by an Elasto-plastic Finite Element Method with Directional Reduced Integration," *J. Mater. Process. Technol.*, Vol. 63, pp. 666~671.
- (9) Lee, B. C. and Kwak, B. M., 1984, "A Computational Method for Elasto-plastic Contact Problems," *Comput. & Struct.*, Vol. 18, pp. 757~765.
- (10) Vijayakar, S. M., Busby, H. R. and Wilcox, L., 1989, "Finite Element Analysis of Three-dimensional Conformal Contact with Friction," *Comput. & Struct.*, Vol. 33, pp. 49~61.
- (11) Maeda, N. and Matsuno, M., 1994, "Analysis of Rubber Boot Seal Using Finite Element Method," SAE 940289.
- (12) 김현영, 심요섭, 주연중, 우창수, 1995, "자동차용 등속조인트 부트의 내변형 유한요소해석과 내구 성능 예측," 한국자동차공학회 추계학술대회, pp. 204~211.
- (13) 김세호, 이형욱, 허 훈, 이종화, 오승탁, "유한요소법을 이용한 등속조인트 고무부트의 변형해석 및 설계변경에의 응용," 한국자동차공학회 논문집, Submitted.
- (14) 이형욱, 1997, "3차원 유한요소법을 이용한 등속조인트 고무부트의 자체접촉해석," 석사학위논문, 한국과학기술원.
- (15) 허 훈, 김세호, 이형욱, 1997, C. V. Joint Boot의 유한요소해석, 기아중공업 수탁연구과제 보고서.
- (16) Hibbit, Karlsson and Sorenson Inc., 1996, *ABAQUS/Standard Manual*.
- (17) MARC Analysis Research Co., 1996, *Non-linear Finite Element Analysis of Elastomers*.
- (18) McMeeking, R. M. and Rice, J. R., 1975, "Finite Element Formulations for Problems of Large Elastic-plastic Deformation," *Int. J. Solids Structures*, Vol. 11, pp. 601~616.
- (19) 전만수, 문호근, 김성진, 1997, "방진고부 변형형상 및 하중-변위곡선 예측을 위한 단순 유한요소법," 대학기계학회논문집(A), 제21권, 제2호, pp. 217~222.
- (20) Hughes, T. J. R., 1983, "Generalization of Selective Integration Procedures to Anisotropic and Nonlinear Media," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 15, pp. 1413~1418.