

〈논 문〉

케인방법을 이용한 구속 다물체계의 동역학 해석

박정훈* · 유흥희** · 황요하 · 배대성***

(1997년 7월 8일 접수)

Dynamic Analysis of Constrained Multibody Systems Using Kane's Method

J. H. Park, H. H. Yoo, Y. Hwang and D. S. Bae

Key Words : Dynamic Analysis(동역학 해석), Kane's Method(케인방법), Constrained Multibody Systems(구속 다물체계), Differential and Algebraic Equations(DAE : 미분대수방정식), Partial Velocity Matrix(편속도행렬)

Abstract

A new formulation for the dynamic analysis of constrained multibody systems is presented in this paper. The formulation employs Kane's method along with the null space method. Kane's method reduces the dimension of equations of motion by using partial velocity matrix introduced in this study : it can improve the efficiency of the formulation. Three numerical examples are given to demonstrate the accuracy and efficiency of the formulation.

1. 서 론

구속 다물체계의(constrained multibody systems) 운동방정식을 기술하기 위해 시스템을 기술하는 좌표의 수를 그 계의 자유도보다 크게 선정하는 것은 다물체동역학 해석분야에는 흔한 일이다. 이는 운동방정식 유도 일반성 및 간명성을 위해 필수적인데, 그 결과 계의 운동방정식은 미분방정식과 대수방정식의 합성형태로 나타나게 되며, 이를 미분대수방정식(DAE : differential and algebraic equations)이라 부른다.

현재까지 미분대수방정식을 풀기 위해 몇 가지 방법들이 제안되어 왔다.^(8,11,12,15) 제안된 방법들 중에서 현재 가장 널리 사용되고 있는 방법으로는 구속조건 안정법과(constraint stabilization method) 과 일반좌표 분할법(generalized coordinates par-

tioning method)이 있다. 구속조건 안정법은 구속 다물체계의 운동방정식을 풀때 피드백제어 이론(feedback control logic)을 사용하여 수치적 불안정성을 극복하려 하였다. 이 방법은 위치 및 속도 해석을 수행하지 않기 때문에 계산속도가 빠르지만 시스템이 기구학적 특이점(kinematically singular position) 근처에 위치하거나 갑작스런 외란(abrupt disturbance)을 받을 경우에 적분된 해의 정확성을 보장할 수 없다는 단점을 갖고 있다. 일반좌표 분할법^(7,8)을 일반좌표를 독립좌표(independent coordinates)와 종속좌표(dependent coordinates)로 분할한다. 분할된 좌표중에서 독립좌표만이 적분변수로 사용되고 종속좌표는 별도의 계산식에 의해서 계의 구속조건을 정확하게 만족하도록 구해진다. 이 방법은 몇 개의 다물체동역학 해석프로그램에 사용되고 있으나 시간적분 수행시, 독립좌표가 변화할 수 있으므로 그 때마다 새 독립좌표를 선정하기 위한 복잡한 알고리즘이 이 방법의 효율성을 저하시키고 있다.

운동방정식을 유도하는 방법들중에서 Kane방법

*회원, 한양대학교 대학원
**회원, 한양대학교 기계공학부
***회원, 한국과학기술원 기전연구부

을 사용하면 일반 다물체계의 운동방정식을 최소의 좌표를 사용하여 유도할 수 있는 것으로 알려져 있다. Huston 등은 상대좌표와 zero eigen value theorem 등을 사용해 운동방정식을 세울 수 있는 방법들을 제안하였다.^(2~6) 그러나 이 방법들은 공식의 복잡성 및 시간적분시 구속조건을 만족시키기 위한 위치 및 속도해석을 수행하지 않는데 따른 오차의 누적 등의 문제점을 갖고 있다.

본 논문에서는 구속 다물체계의 운동방정식을 공식이 간명하며, 정확하고 효율적으로 풀기 위한 새로운 해석방법을 제시하려 한다. 새로운 해석방법은 Kane방법의 장점과 일반좌표 분할법의 장점을 동시에 가질 수 있도록 고안되었다. 이 방법의 효율성과 안정성을 검증하기 위해 두개의 평면예제와 하나의 공간예제를 사용해 시뮬레이션을 수행하였고 그 해석결과를 구속조건 안정법 및 일반좌표 분할법의 해석결과들과 비교하였다.

2. 미분대수방정식을 풀기위한 기존의 해석방법

통상 구속조건을 갖는 다물체 계의 운동방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{bmatrix} M & \Phi_q^T \\ \Phi_q & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q} \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q \\ \gamma \end{Bmatrix} \quad (1)$$

$$\Phi(q, t) = 0 \quad (2)$$

$$\Phi_q \dot{q} = -\Phi_t \quad (3)$$

식 (1)에서

$$\gamma \equiv -(\Phi_q \dot{q})_q \dot{q} - 2 \Phi_{qt} - \Phi_{tt} \quad (4)$$

그리고 M 은 질량행렬로 일반좌표 q 의 함수이다. Φ_q 와 λ 는 각각 구속방정식 Φ 의 자코비안행렬과 구속방정식에 의해 발생하는 반력을 나타내는 라그랑지승수벡터(Lagrange multiplier vector)를 각각 나타낸다. Q 는 일반작용력벡터로 q, \dot{q} , 그리고 시간 t 의 함수이다. 위 식에서 기호 위의 dot는 시간에 대한 미분을 나타내고, 기호에 붙은 하첨자는 하첨자에 대한 편미분을 나타내며, 상첨자 T 는 Transpose를 의미한다.

이장에서는 우선 구속조건 안정법과 일반좌표 분할법을 간략히 소개하려한다. 이 두 방법들은 본 논문에서 제시된 방법과 효율성 및 안정성 비교를 위해 나중에 사용된다.

2.1 구속조건 안정법

구속조건 안정법은 구속조건을 갖는 계의 운동방정식을 풀 때 다음과 같은 방정식을 이용하여 구속조건 위반량을 감소시킨다.

$$\ddot{\Phi} + 2\alpha\dot{\Phi} + \beta^2\Phi = 0 \quad (5)$$

여기서, α 와 β 는 적절하게 선정된 상수이다. 위의 방정식은 다음과 같은 일반해를 갖는다.

$$\Phi = a_1 e^{s_1 t} + a_2 e^{s_2 t} \quad (6)$$

여기서, a_1 와 a_2 는 초기조건에 의해서 결정되는 상수벡터이고, s_1 과 s_2 는 특성방정식(characteristic equation) (5)의 해로 다음과 같다.

$$s_1, s_2 = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} \quad (7)$$

만약에 α 가 양의 상수라면 두 근 s_1 와 s_2 는 음의 실수부를 갖게되고 식 (6)의 안정성이 보장된다. α 와 β 는 일반적으로 1과 10사이의 값이 사용된다. 사용다물체 계의 초기위치, 속도는 두 개의 상수벡터 a_1 과 a_2 가 0이 되도록 주어져야 한다. 식 (4) 대신 식 (5)를 사용하면 식 (1)은 다음과 같이 변환된다.

$$\begin{bmatrix} M & \Phi_q^T \\ \Phi_q & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q} \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q \\ \bar{\gamma} \end{Bmatrix} \quad (8)$$

여기서,

$$\bar{\gamma} = \gamma - 2\alpha\dot{\Phi} - \beta^2\Phi \quad (9)$$

만약 α 와 β 에 대한 적절한 값이 선정된다면 구속조건 위반량은 적분을 수행하는 과정동안 감소하게 된다. 이 방법은 일반좌표 분할방법에 비해 계산시간이 적게 요구된다. 하지만 기구학적 특이점 근처에서 해의 불안정성이 존재한다. 더구나 α 와 β 값의 적절한 선정은 이 방법의 효과적인 수행을 위해서 필수적이라 할 수 있으나 현재까지 신뢰성있는 간명한 알고리즘이 개발되지 못하였다.

2.2 일반좌표 분할법

일반좌표 분할법은 구속조건 안정법과는 다르게 수치적 오차의 누적을 제어한다. Full row와 column pivoting을 사용하면 n 개의 일반좌표 q 를 m 개의 종속좌표 q_a 와 $n-m$ 개의 독립좌표 q_i 로 나눌 수 있다. 시간 t^* 에서 독립좌표 q_i 를 $q_i(t^*)$ 로 고정하면 위치해석을 위한 반복적인 선형방정식은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \Phi_{q_a}^k & \Phi_{q_i}^k \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta q_a^k \\ \Delta q_i^k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\Phi_t^k \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (10)$$

위 방정식의 해석결과로부터 스텝 $k+1$ 에서 수정된 해는 다음과 같이 구해진다.

$$q_a^{k+1} = q_a^k + \Delta q_a^k \quad (11)$$

식 (10)과 식 (11)을 이용하여 주어진 허용오차내에서 해가 만족할 때까지 반복적인 계산을 수행한다. 일반좌표의 속도성분은 아래와 같은 속도구속방정식으로부터 구할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \Phi_{q_a} & \Phi_{q_i} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q}_a \\ \dot{q}_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\Phi_t \\ \dot{q}_i \end{Bmatrix} \quad (12)$$

위치와 속도성분이 구해지고 나면 다음과 같은 운동방정식을 풀 수 있다.

$$\begin{bmatrix} M & \Phi_q^T \\ \Phi_q & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q} \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q \\ \gamma \end{Bmatrix} \quad (13)$$

이 방법은 정확하게 구속방정식을 만족시키지만 독립좌표의 선정이 어렵고 매 적분단계에서 위치해석과 속도해석을 동시에 수행해야 하므로 계산시간이 많이 요구된다.

3. 제안하는 다물체동역학을 위한 해석방법

3.1 독립좌표의 결정

제시하는 방법의 유도와 설명의 편의상 본 논문에서는 2차원 평면운동을 하는 다물체계를 고려하였다. 그러나 3차원 다물체계도 여기에서 설명되고 있는 동일한 방법을 적용하여 고려할 수 있다. 일반좌표들로 구성된 q 는 다음과 같다.

$$q = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n]^T \quad (14)$$

이는 2차원 평면운동을 하는 다물체계의 경우 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$q = [x_1 \ y_1 \ \theta_1 \ \dots \ x_\nu \ y_\nu \ \theta_\nu]^s \quad (15)$$

따라서, $q_{3(i-1)+1}$, $q_{3(i-1)+2}$ 그리고 $q_{3(i-1)+3}$ 는 각각 x_i , y_i 그리고 θ_i 를 나타낸다. (x_i, y_i) 는 강체 i 의 질량중심의 위치벡터를 θ_i 는 강체 i 에 고정된 좌표계의 절대좌표계에 대한 자세각을 나타낸다. ν 는 강체의 수를 의미한다. 이 시스템이 갖는 m 개의 독립 holonomic 구속조건식은 다음과 같이 나타낼

수 있다.

$$\Phi(q, t) = [\phi_1 \ \phi_2 \ \dots \ \phi_m]^T = 0 \quad (16)$$

구속방정식의 자코비안 행렬 Φ_q 의 full row와 column pivoting을 사용하면, 일반좌표행렬 q 는 $n-m$ 개의 독립좌표행렬 q_i 와 m 개의 종속좌표행렬 q_a 로 분할할 수 있다. 따라서 일반좌표를 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$q = [q_i^T \ q_a^T]^T \quad (17)$$

이 과정에서 잉여 구속방정식(redundant constraint equations)은 자코비안행렬의 랭크(rank)를 검사함으로써 사전에 제거할 수 있다.

3.2 위치해석

만약 독립좌표행렬 q_i 의 값을 고정시킨다면 구속방정식으로부터 Newton-Raphson방법을 이용하여서 q_a 의 값을 결정할 수 있다. 즉, q_a 를 개선시키면서 아래의 방정식을 반복해서 푼다.

$$\begin{bmatrix} \Phi_{q_a} & \Phi_{q_i} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta q_a \\ \Delta q_i \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \Phi(q_a, q_i, t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

여기서, Δq_a 와 Δq_i 는 q_a 와 q_i 의 다음 계산을 위한 변화량이다.

3.3 속도해석

구속방정식에 대한 자코비안행렬의 널 공간은 (null space) 속도해석을 수행하는 동안 구해진다. 속도해석을 위한 선형방정식은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \Phi_{q_a} & \Phi_{q_i} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_a \\ \dot{q}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\Phi_t \\ \dot{q}_i \end{bmatrix} \quad (19)$$

또는

$$\Phi_{q_a} \dot{q}_a = -\Phi_{q_i} \dot{q}_i - \Phi_t \quad (20)$$

독립일반속력 u 는 다음과 같이 정의된다.

$$u \equiv \dot{q}_i \quad (21)$$

따라서 모든 일반속력들은 독립일반속력 u 의 함수로 다음과 같이 표현된다.

$$\dot{q} = Bu + C \quad (22)$$

여기서, B 는 편속도행렬로 구속조건식에 대한 자코비안행렬의 널 공간이 된다. 그리고 b_{ij} 를 편속도행렬 B 의 성분이라 하면, b_{ij} 는 다음과 같이 정

의된다.

$$b_{ij} \equiv \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial u_j} \quad (23)$$

3.4 운동방정식

f 개의 자유도를 갖는 시스템을 고려할 경우, Kane 방법에 의한 운동방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$F_r^* + F_r = 0, \quad (r=1, 2, \dots, f) \quad (24)$$

여기서, F_r^* 와 F_r 은 각각 일반관성력(generalized inertia force)과 일반작용력(generalized active force)을 나타낸다. 이 때, 일반관성력은 아래의 식으로 정의된다.

$$F_r^* \equiv \sum_{i=1}^{\nu} (\dot{v}_r^{i*} \cdot \vec{R}^{i*} + \omega_r^{i*} \cdot \vec{T}^{i*}), \quad (r=1, 2, \dots, f) \quad (25)$$

여기서, \vec{R}^{i*} 와 \vec{T}^{i*} 는 각각 강체 i 의 관성력과 관성토크를 의미한다. ν 와 f 는 계를 구성하는 강체 수와 계가 갖는 자유도를 나타낸다. 강체 i 의 관성력과 관성토크는 다음과 같이 계산된다.

$$\begin{aligned} \vec{R}^{i*} &\equiv -m_i(\ddot{x}_i \hat{n}_1 + \ddot{y}_i \hat{n}_2) \\ &= -m_i(\ddot{q}_{3i-2} \hat{n}_1 + \ddot{q}_{3i-1} \hat{n}_2) \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \vec{T}^{i*} &\equiv -J_i \ddot{\theta}_i \hat{n}_3 \\ &= -J_i \ddot{q}_{3i} \hat{n}_3 \end{aligned} \quad (27)$$

여기서 m_i 와 J_i 는 강체 i 의 질량과 질량관성모멘트를 나타내고 $\hat{n}_1, \hat{n}_2, \hat{n}_3$ 는 절대좌표계에 고정된 서로 직교하는 단위벡터이다. 식 (25)의 우측 항은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \dot{v}_r^{i*} \cdot \vec{R}^{i*} + \omega_r^{i*} \cdot \vec{T}^{i*} \\ = -m_i(b_{(3i-2)r} \dot{q}_{3i-2} + b_{(3i-1)r} \dot{q}_{3i-1}) \\ - J_i b_{(3i)r} \dot{q}_{3i} \end{aligned} \quad (28)$$

식 (28)을 행렬형태로 바꾸면

$$\dot{v}_r^{i*} \cdot \vec{R}^{i*} + \omega_r^{i*} \cdot \vec{T}^{i*} = -B_r^{iT} M^i \dot{q}^i \quad (29)$$

여기서,

$$B_r^i \equiv [b_{(3i-2)r} \quad b_{(3i-1)r} \quad b_{(3i)r}]^T \quad (30)$$

$$M^i \equiv \begin{bmatrix} m_i & 0 & 0 \\ 0 & m_i & 0 \\ 0 & 0 & J_i \end{bmatrix} \quad (31)$$

$$\dot{q}^i \equiv \begin{Bmatrix} \dot{q}_{3(i-1)+1} \\ \dot{q}_{3(i-1)+2} \\ \dot{q}_{3(i-1)+3} \end{Bmatrix} \quad (32)$$

식 (29)를 식 (25)에 대입하면 일반관성력벡터는 다음과 같이 표현된다.

$$F^* = [F_1^* F_2^* \dots F_f^*]^T = B^T M \dot{q} \quad (33)$$

여기서,

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1f} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2f} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{(3\nu)1} & b_{(3\nu)2} & \dots & b_{(3\nu)f} \end{bmatrix} \quad (34)$$

$$M = \begin{bmatrix} M^1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M^2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & M^\nu \end{bmatrix} \quad (35)$$

$$\ddot{q} = [\ddot{q}_1 \quad \ddot{q}_2 \quad \dots \quad \ddot{q}_{3\nu-1} \quad \ddot{q}_{3\nu}]^T \quad (36)$$

Fig. 1에서 보여주는 바와 같이 힘 \vec{F}^{Pi} 가 강체 i 상의 점 P_i 에 작용하고, 토크 \vec{T}^i 가 강체 i 에 작용할 경우 \vec{F}^{Pi} 와 \vec{T}^i 에 의한 일반작용력은 다음과 같이 구해진다.

$$F_r \equiv \dot{v}_r^{Pi} \cdot \vec{F}^{Pi} + \omega_r^i \cdot \vec{T}^i \quad (37)$$

여기서 \dot{v}_r^{Pi} 와 ω_r^i 는 각각 r 번째 편속력에 대한 점 P_i 의 속도의 편미분과 강체 i 의 각속도의 편미분을 나타낸다. 그리고 작용력 \vec{F}^{Pi} 와 작용토크 \vec{T}^i 는 2차원 계에서 다음과 같이 표현된다.

$$\vec{F}^{Pi} \equiv F_x^P \hat{n}_1 + F_y^P \hat{n}_2, \quad \vec{T}^i \equiv T^i \hat{n}_3 \quad (38)$$

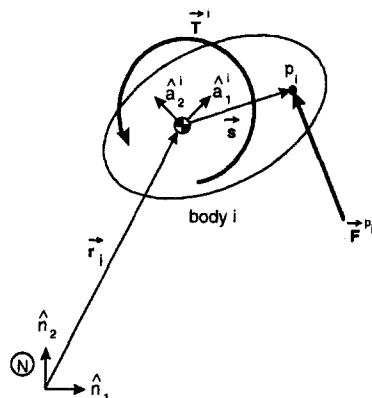


Fig. 1 Force and moment acting on the rigid body i

일반관성력을 구하는 방법과 유사하게 \vec{F}^{P_i} 와 \vec{T}^i 에 의한 일반작용력은 다음과 같이 구해진다.

$$F_r = B_r^{iT} Q_i \quad (39)$$

또는

$$F = B^T Q \quad (40)$$

여기서,

$$Q \equiv [Q_1^I, Q_2^I, \dots, Q_1^J, \dots, Q_2^J]^T \quad (41)$$

$$Q_j \equiv \left[(s^{P_i})^T B_i^T F^{P_i} + T^i \right] \delta_{ij} \quad (42)$$

위에서 s^{P_i} 는 강체 i 에 고정된 좌표계에 대한 벡터 ξ 의 계수(measure number) 벡터를 의미한다.

$$F^{P_i} \equiv [F_x^{P_i} \ F_y^{P_i}]^T \quad (43)$$

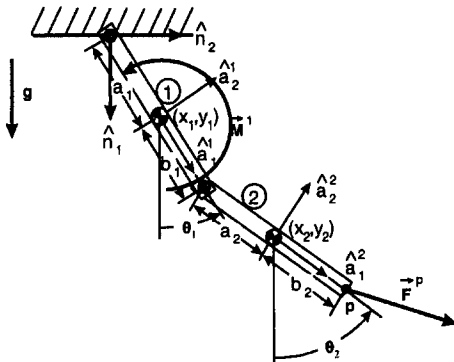


Fig. 2 Double pendulum example

$$B_i \equiv \begin{bmatrix} -\sin q_{3i} & -\cos q_{3i} \\ \cos q_{3i} & -\sin q_{3i} \end{bmatrix} \quad (44)$$

식 (33)과 식 (40)으로부터, f 개의 운동방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$-B^T M \ddot{q} + B^T Q = 0 \quad (45)$$

식 (45)의 개수 f 는 구해야 하는 변수(\ddot{q})의 수 3ν 보다 적으므로 바로 풀 수 없다. 3ν 개의 \ddot{q} 를 구하기 위해 식 (45)와 식 (4)를 동시에 풀어야 한다. 식 (4)와 식 (45)는 다음과 같은 하나의 행렬 식으로 표현될 수 있다.

$$\begin{bmatrix} B^T M \\ \Phi_q \end{bmatrix} \{ \ddot{q} \} = \begin{bmatrix} B^T Q \\ \gamma \end{bmatrix} \quad (46)$$

4. 예 제

본 논문에서 제시한 해석방법의 계산상 효율성과 안정성을 검증하기 위해 세 가지 예제에 대해서 시뮬레이션을 수행하였다. 본 논문에서 제시한 방법에 의한 해석결과를 구속조건 안정법과 일반좌표 분할법에 의한 해석결과와 비교하였다. 계산의 효율성은 동일한 컴퓨터를 사용했을 때, 계산시간을 비교하여 평가하였고, 정확성은 수치적 불안정성이 야기되기 쉬운 문제에 대한 시뮬레이션을 통하여 평가되었다.

Fig. 2는 이중진자(double bar pendulum)를 나타내고 있다. 그림에서 $\hat{n}_j, \hat{a}_j (j=1,2,3)$ 는 각각 절

Table 1 Number of function evaluations, CPU time and average time step size for example 1

Simulation time [sec]	Method	CPU time	No. of function eval.	Average time step size
5	KANE	0.10	96	0.052
	GCP	0.17	96	0.052
	CS	0.11	140	0.036
10	KANE	0.17	151	0.066
	GCP	0.28	152	0.066
	CS	0.28	283	0.035
50	KANE	0.66	625	0.080
	GCP	1.23	607	0.082
	CS	1.43	1313	0.038

대좌표계와 강체 i 의 질량중심점에 세운 좌표계에 고정된 직교단위벡터들을 나타낸다. 첫번째 강체와 그라운드 그리고 첫번째 강체와 두번째 강체는 회전조인트(revolute joint)로 연결되어 있다. (x_i, y_i) 와 θ_i 는 각각 강체 i 의 질량중심의 좌표와 자세각을 나타낸다. 이 계의 물성치는 다음과 같다.

$$a_1 = a_2 = 1 \text{ m}$$

$$b_1 = b_2 = 1 \text{ m}$$

$$m_1 = 5 \text{ kg}, m_2 = 7 \text{ kg}$$

$$J_1 = 10 \text{ kg} \cdot \text{m}^2, J_2 = 20 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

첫번째 강체에 일정한 크기 $10 \text{ N} \cdot \text{m}$ 의 작용토크 \vec{M}^1 이 작용하고 작용력 $\vec{F}^p (8\hat{n}_1 + 7\hat{n}_2 [N])$ 가 두번째 강체상의 점 P 에 작용한다. $\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1$, 그리고 $\dot{\theta}_2$ 의 초기조건은 각각 0.5236, 0.7854, 0.0000, 그리고 0.0000이다. Table 1은 적분시간 5, 10, 50초에 대한 해석결과를 나타내고 있다. 5초간의 해석결과에서 구속조건 안정법의 평균적분 시간간격은 일반좌표 분할법의 평균적분 시간간격에 비해 작지만 구속조건 안정법의 전체 컴퓨터 계산시간은 일반좌표 분할법의 계산시간보다 작게 요구된다. 이것은 일반좌표 분할법이 위치해석과 속도해석을 수행하는 반면 구속조건 안정법은 위치해석과 속도해석을 수행하지 않기 때문이다. 하지만 적분시간이 길어짐에 따라 구속조건 안정법의 컴퓨터 계산시간은 일반좌표 분할법의 계산시간보다 길어진다. 이것은 적분시간이 길어짐에 따라 구속조건 안정법의 적분오차 누적이 심해지기 때문이다. Table 1은 본 논문에서 제시한 방법이 기존의 두 방법에 비해 계산시간 면에서 효율성이 있음을 보여준다. 제안된 방법에서 운동방정식의 크기는

(3ν) 다른 두 방법(3ν+m)보다 적고 풀어야 되는 운동방정식의 크기는 적분시간에 큰 영향을 미친다는 것을 알 수 있다. Fig. 3은 적분시간 10초에 대한 강체 ②의 자세각 θ_2 의 시간에 대한 궤적을 나타내고 있는데 해석결과의 정확성은 세 가지 방법이 거의 동일함을 알 수 있다.

Fig. 4는 4절기구(four bar mechanism)를 나타낸다. 그라운드와 강체 그리고 강체와 강체는 회전조인트(revolute joint)로 연결되어 있다. 이 계의 물성치는 다음과 같다.

$$m_1 = 5 \text{ kg}, m_2 = 7 \text{ kg}, m_3 = 9 \text{ kg}$$

$$J_1 = 10 \text{ kg} \cdot \text{m}^2, J_2 = 20 \text{ kg} \cdot \text{m}^2, J_3 = 25 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$a_1 = a_2 = a_3 = 1 \text{ m}$$

$$b_1 = b_2 = b_3 = 1 \text{ m}$$

회전스프링이 첫번째 강체와 그라운드사이에 위치하고 스프링상수 K 와 변형전 초기각 θ_0 는 각각 $100 \text{ N} \cdot \text{m}/\text{rad}$ 과 0.524 rad 이다. 외력 \vec{F}^p 는 $(80\hat{n}_1 + 70\hat{n}_2 [N])$ 커벡팅 링크상 점 P 에 작용한다. Table

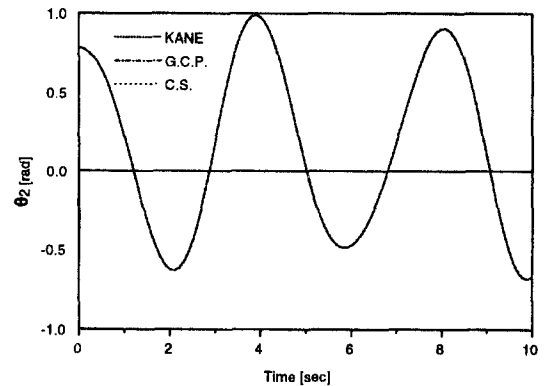


Fig. 3 Orientation, θ_2 of body 2

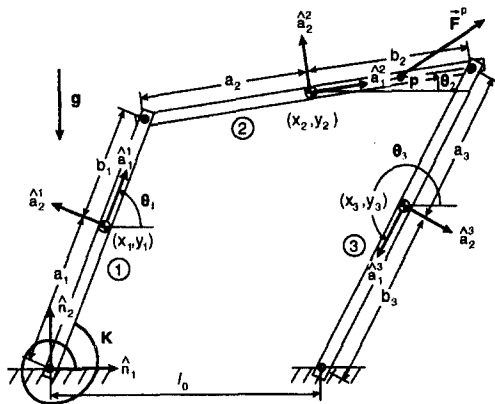


Fig. 4 Planar four bar mechanism

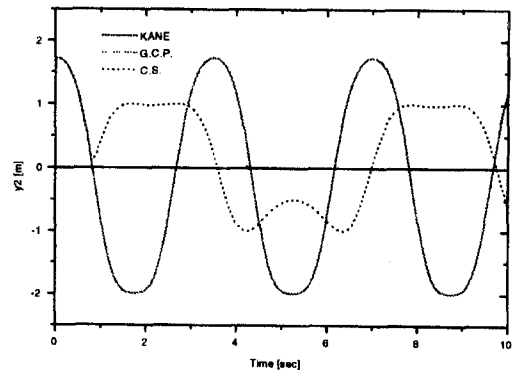


Fig. 5 Displacement (y_2) of link 2 mass center

2에서 첫번째 경우는 $l_0=2.0$ m, 그리고 초기조건 $\theta_1=1.047$ rad, $\dot{\theta}_1=0.000$ rad/sec에 대해 시물레이션이 수행되었다. 이 경우 기구학적 특이점이 $y_2=0$ 일 때 발생한다. Fig.5는 이 경우에 대한 해석결과 중 두번째 강체의 y_2 의 시간에 대한 궤적을 나타

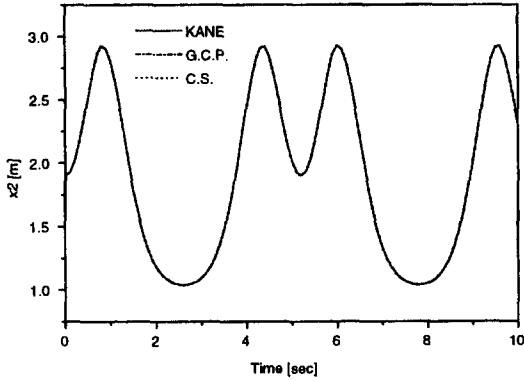


Fig. 6 Displacement (x_2) of link 2 mass center

내고 있다. 일반좌표 분할법과 본 논문에서 제시된 방법에 의한 해석결과가 서로 잘 일치함을 알 수 있다. 하지만 구속조건 안정법은 $y_2=0$ 근처를 지나는 순간부터 다른 두 가지 방법에 의한 해석결과와는 상당한 차이를 보인다. 이것은 구속조건 안정법이 구속조건을 정확히 만족시키지 못하기 때문에 기구학적 특이점 근처에서 발생하는 불안정성을 피할 수 없기 때문이다. 두번째 경우는 $l_0=1.9$ m, $\theta_1=1.1036$ rad, $\dot{\theta}_1=0.0000$ rad/sec인 경우에 대해 시물레이션을 수행한 결과를 나타내고 있다. Fig.6은 강체 ②의 x_2 의 시간에 대한 궤적을 나타내고 있다. 해석결과와 정확성은 세 가지 방법이 거의 동일함을 알 수 있다. 또한 Table 2는 첫번째, 두번째 예제의 경우 새로운 해석법이 다른 두 방법에 비해 더 효율적임을 보여준다.

Fig. 7은 공간운동을 하는 4절기구를 나타낸다. 그림에서 \hat{n}_j , $\hat{a}_j^i(j=1,2,3)$ 는 각각 절대좌표계에

Table 2 Number of function evaluations, CPU time and average time step size for example 2

	Method	CPU time	No. of function eval.	Average time step size
Case I	KANE	0.55	303	0.033
	GCP	0.88	295	0.034
	CS	1.27	699	0.014
Case II	KANE	0.55	311	0.032
	GCP	0.88	311	0.032
	CS	0.99	707	0.014

Table 3 CPU time, CPU time rate and number of function evaluations for example 3 according to integration error tolerance, ϵ_{int} and position level error tolerance, ϵ_{pos}

ϵ_{int}	ϵ_{pos}	Method	CPU time [sec]	CPU time rate	No. of function eval.
$1.0e^{-5}$	$1.0e^{-3}$	KANE	3.39	1.00	210
		GCP	5.54	1.68	210
		CS	11.81	3.59	662
$1.0e^{-3}$	$1.0e^{-3}$	KANE	2.85	1.00	157
		GCP	4.51	1.58	157
		CS	7.91	2.76	399
$1.0e^{-3}$	$1.0e^{-5}$	KANE	4.40	1.00	154
		GCP	5.83	1.33	152
		CS	7.91	1.80	399

강체 i 의 질량중심점 O_i 에 세운 좌표계에 고정된 직교단위벡터들을 나타낸다. 그라운드와 첫번째 강체 그리고 세번째 강체와 그라운드는 회전 조인트로 연결되어 있고 첫번째 강체와 두번째 강체 그리고 두번째 강체와 세번째 강체는 각각 유니버설조인트(universal joint)와 구면조인트(spherical joint)로 연결되어 있다. 이 계의 물성치는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 m_1 &= 2 \text{ kg}, \quad m_2 = 1 \text{ kg}, \quad m_3 = 1 \text{ kg} \\
 J_{1xx} &= 4 \text{ kg} \cdot \text{m}^2, \quad J_{1yy} = J_{2zz} = 2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \\
 J_{2xx} &= 12.4 \text{ kg} \cdot \text{m}^2, \quad J_{2yy} = 0.01 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \\
 J_{3xx} &= J_{3zz} = 4.54 \text{ kg} \cdot \text{m}^2, \quad J_{3yy} = 0.01 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \\
 r &= 2 \text{ m} \\
 b_1 &= b_2 = 6 \text{ m} \\
 c_1 &= c_2 = 1 \text{ m}
 \end{aligned}$$

시스템에 가해지는 외력으로는 회전스프링, 댐퍼와 중력에 의한 보존력이 있다. 회전스프링이 첫번째 강체와 그라운드사이에서 위치하고 스프링상수 K , 감쇠계수 C , 그리고 변형전 초기각 θ_0 , 초기 각속도 $\dot{\theta}_0$ 는 각각 $1 \text{ N} \cdot \text{m}/\text{rad}$, $5 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{sec}/\text{rad}$, 0.0 rad , 그리고 $0.0 \text{ rad}/\text{sec}$ 이다. 중력이 \hat{n}_2 의 반대방향으로 작용하고 중력가속도는 $9.81 \text{ m}/\text{sec}^2$ 이

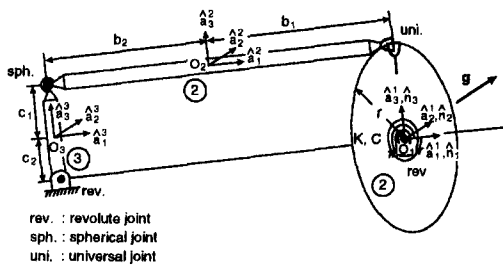


Fig. 7 Spatial four bar mechanism

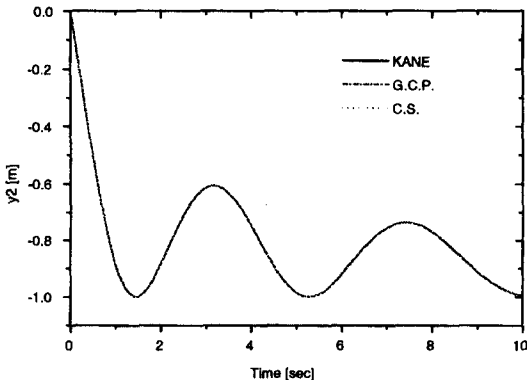


Fig. 8 Displacement (y_2) of link 2 mass center

다. Table 3은 적분시간 10초에 대해 적분허용오차, ϵ_{int} 와 위치해석을 위한 허용오차, ϵ_{pos} 에 따른 해석결과를 나타내고 있다. CPU 계산비(CPU time rate)는 본 논문에서 제시한 방법을 사용하여 해석을 수행하는데 걸리는 컴퓨터 계산시간에 대한 다른 방법들의 상대적인 계산시간을 나타내고 있다. 해석결과로부터 위치해석 에러 허용치에 비해 적분 에러 허용치를 적게 줄수록 본 논문에서 제시한 방법이 다른 두 방법에 비해 계산상 효율성이 극대화됨을 알 수 있다. 이는 미분대수 방정식을 푸는 경우 반복적인 위치해석 수행에 사용되는 계산시간에 비해 운동방정식을 푸는 계산시간이 전체 계산시간에 더 큰 비중을 차지함을 의미한다. 이와 반대의 경우에는 위치해석의 반복계산 회수가 증가하게 되어 앞의 경우에 비해 효율성이 다소 감소함을 알 수 있다. 하지만 위치해석 에러 허용치를 적게 주더라도 여전히 다른 두 방법에 비해 본 논문에서 제시한 방법이 컴퓨터 계산상의 효율성을 지니고 평면문제와 마찬가지로 공간문제에 있어서도 본 논문에서 제시한 새로운 해석법이 다른 두 방법에 비해 더 효율적임을 보여준다. Fig. 8는 $\epsilon_{int} = \epsilon_{pos} = 10e^{-3}$ 인 경우에 대한 해석결과중 두번째 강체의 y_2 의 시간에 대한 궤적을 나타내고 있다. 구속조건 안정법, 일반좌표 분할법, 그리고 본 논문에서 제시된 방법에 의한 해석결과가 서로 잘 일치함을 알 수 있다.

5. 결론

Kane 방법을 이용하여 구속방정식을 갖는 계의 동역학 해석을 위한 새로운 방법을 제시하였다. 이 방법은 매 적분구간마다 풀어야 하는 미분대수방정식중에서 운동방정식의 크기를 줄임으로써 기존의 해석방법보다 계산상 효율성을 높였다. 또한 이 방법은 매 적분스텝마다 위치해석과 속도해석을 수행하기 때문에 수치적으로 안정된 방법이다. 평면운동과 공간운동을 하는 시스템 대한 예제의 해석결과를 통하여 본 논문에서 제시한 방법이 다른 두 방법에 비해 계산상 효율성과 안정성을 지님을 보였다.

후 기

본 논문의 연구는 건설교통부, 통상산업부, 그리고

과학기술처의 공동주관 아래 선도기술개발사업으로 시행되는 고속전철기술개발 사업에 의해 지원을 받아 수행되었으며, 이에 관계자께 감사드립니다.

참고문헌

- (1) Kane, T. R. and Levinson, D. A., 1985, *DYNAMICS : Theory and Application*, McGraw-Hill.
- (2) Kamman, J. W. and Huston, R. L., 1984, "Dynamics of Constrained Multibody Systems," *J. Applied Mechanics*, Vol. 51, pp. 899~903.
- (3) Huston, R. L., Passerello, C. E. and Harlow, M. W., 1978, "Dynamics of Multirigid-Body Systems," *J. Applied Mechanics*, Vol. 45, pp. 889~894.
- (4) Huston, R. L. and Passerello, C. E., 1979, "On Multi-Rigid Body System Dynamics," *Computers & Structures*, Vol. 10, pp. 439~446.
- (5) Huston, R. L. and Passerello, C. E., 1980, "Multibody Structural Dynamics including Translation between the Bodies," *Comp. & Struc.*, Vol. 12, pp. 713~720.
- (6) Amirouche, F. M. L., 1992, *Computational Methods in Multibody Dynamics*, Prentice-Hall.
- (7) Haug, E. J. and Yen, Jeng 1992, "Implicit Numerical Integration of Constrained Equations of Motion Via Generalized Coordinate Partitioning," *J. Mechanical Design*, Vol. 114, pp. 296~304.
- (8) Wehage, R. A. and Haug, E. J., 1982, "Generalized Coordinates Partitioning for Dimension Reduction in Analysis of Constrained Dynamic Systems," *J. Mechanical Design*, Vol. 104, pp. 247~255.
- (9) Haug, E. J. and McCullough, M., 1986, "A Variational Vector Calculus Approach to Machine Dynamics," *J. Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design*, Vol. 108, pp. 25~30.
- (10) Haug Edward J., 1989, *Computer-Aided Kinematics and Dynamics of Mechanical Systems*, ALLYN AND BACON.
- (11) Park, T. W. and Haug, E. J., 1986, "Hybrid Numerical Integration Method for Machine Dynamic Simulation," *J. Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design*, Vol. 108, pp. 211~216.
- (12) Mani, N. K. and Haug, E. J., 1985, "Singular Value Decomposition for Dynamic System Design Sensitivity Analysis," *Engineering with Computers*, Vol. 1, pp. 103~109.
- (13) Bae, D. S. and Haug, E. J., 1987, "A Recursive Formulation for Constrained Mechanical System Dynamics : Part I . Open Loop Systems," *Mech. Struct. & Mach.*, 15(3), pp. 359~382.
- (14) Bae, D. S. and Haug, E. J., 1987, "A Recursive Formulation for Constrained Mechanical System Dynamics : Part II . Closed Loop Systems," *Mech. Struct. & Mach.*, 15(4), pp. 481~506.
- (15) Chang, C. O. and Nikravesh, P. E., 1985, "An Adaptive Constraint Violation Stabilization Method for Dynamic Analysis of Mechanical Systems," *J. Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design*, Vol. 107, pp. 488~492.