

〈논 문〉

크리츠재료의 균열형상 강체함유물에 대한 새로운 파괴역학 매개변수 개발

이 강 용* · 김 종 성**

(1997년 7월 18일 접수)

Development of New Fracture Parameter for Rigid Inclusion with Crack Shape in Creep Material

Kang Yong Lee and Jong Sung Kim

Key Words : Creep(크리츠), Complex Pseudo-Stress Function(복소유사응력함수), Crack(균열), Rigid Inclusion(강체함유물), Strain Rate Intensity Factor(변형률 Rate 세기계수)

Abstract

The analysis model is the infinite power law creep material containing the rigid inclusion with crack shape. The present analysis is performed using the complex pseudo-stress function method. The strain rate intensity factor is developed as new fracture mechanics parameter which represents the stress and strain rate distribution near a crack tip in power law creep material. The strain rate intensity factor is developed in terms of Kolossoff stress functions.

1. 서 론

해석의 난해함으로 인하여 연구 대상에서 한동안 제외되었던 크리츠동은 에너지설비(power plant), 우주항공엔진과 화학반응로(chemical reactor) 등의 효율과 출력증대를 위한 작동온도와 작동압력의 증가로 인하여 그 해석의 중요성이 증가되어졌다.

Power law 크리츠재료의 응력해석에 대해 연구한 기존의 연구를 살펴보면 다음과 같다. Hoff⁽¹⁾는 power law 크리츠거동을 하는 기둥, 판과 박판의 안정성(stability) 문제에 대해 연구하였다. Rozenblum⁽²⁾은 얇은 박판(shell)의 크리츠거동에 대한 개략화된 응력방정식을 개발하였다. Spence⁽³⁾는 유연곡선 파이프(smooth curved pipe)가 굽힘상태에 있을때 크리츠해석을 수행하였다. Mukherjee⁽⁴⁾는 경

계요소법(boundary element method)을 이용하여 금속의 크리츠변형에 대해 연구하였다. Lee와 Gong⁽⁵⁾은 단순인장(simple tension) 또는 순수전단(pure shear) 응력이 외부 무한경계에서 작용하고 power law 크리츠거동을 하는 무한체에 원형모양의 강체함유물이 있을때의 응력분포를 유사응력함수(pseudo-stress function)를 이용하여 결정하였다.

크리츠거동을 일으키는 재료에 대한 균열해석을 위해서는 크리츠영역에 따라서 C^* , $C(t)$ 와 C_I 같은 매개변수들이 사용된다.⁽⁶⁾ 이러한 파괴역학 매개변수에 대한 기존의 연구들을 살펴보면 다음과 같다. Landes와 Begley,⁽⁷⁾ Saxena⁽⁸⁾는 정상상태조건(steady-state)하에서 경로 독립적인 적분(path independent integral) C^* 를 정의하였다. Smith와 Webster⁽⁹⁾는 실험적인 방법으로 시편에 대한 C^* 를 결정하였다. Ohji 등⁽¹⁰⁾은 다양한 종류의 철강에 대해 K 와 C^* 의 사용 가능성을 연구하였다. Ehlers와 Riedel⁽¹¹⁾은 시간의 함수로서 균열전단 매개변

*회원, 연세대학교 기계공학과

**회원, 한국전력기술(주) 전력기술개발연구소

수 $C(t)$ 를 개발하였다. Saxena⁽¹²⁾는 C^* 의 개념을 확장하여 비정상상태 균열성장영역(nonsteady-state crack-growth regime)에서도 적용되어지는 균열선단 매개변수 C_t 를 C^* 의 에너지 rate 변화율 개념으로 개발하였다. 그러나 이러한 크릴 파괴역학 매개변수들 C^* , $C(t)$ 와 C_t 는 수식적인 엄밀해(closed form)로 결정할수 없으며, 균열선단 부근의 응력 분포와 이러한 크릴 파괴역학 매개변수들 사이의 관계식도 엄밀해의 꼴로 제시되지 않는다. 따라서 수치적인 해석방법이나 실험적인 방법이 필요하게 되는데 power law 크릴재료의 특성상 수치적 방법이나 실험적 방법은 비경제적인 손실을 가져다 준다.

따라서 본 논문에서는 복소유사응력함수를 이용하여 강제함유물 균열을 내포하는 power law 크릴재료에 대해 균열선단 부근의 변형률 rate 분포와 응력분포를 대표하는 새로운 파괴역학 매개변수를 엄밀해로 도출하는데 용이하도록 Kolosoff 응력함수와의 관계식을 개발하고 새로운 파괴역학 매개변수와 균열선단 부근의 변형률 rate 분포 및 응력 분포 사이의 관계식들을 결정하고자 한다.

2. Kolosoff 응력함수

Fig.1은 임의형태의 균열선단에 원점을 두고 있는 직교좌표계와 극좌표계를 나타내고 있다.

Kolosoff 응력함수⁽¹³⁾ $\phi(z)$, $\psi(z)$ 는 다음과 같이 고유치(eigen value) λ 를 포함한 함수꼴로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \phi(z) &= \sum A_\lambda z^\lambda \\ \psi(z) &= \sum B_\lambda z^\lambda \end{aligned} \tag{1}$$

여기서,

$$A_\lambda = A'_\lambda + iA''_\lambda \tag{2}$$

$$B_\lambda = B'_\lambda + iB''_\lambda \tag{3}$$

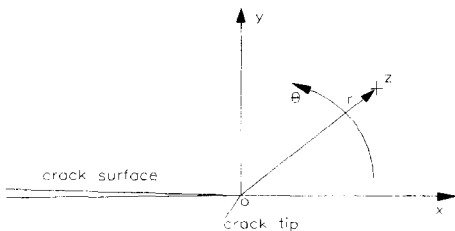


Fig. 1 Coordinates at crack tip

$$z = re^{i\theta} \tag{4}$$

여기서, A'_λ , A''_λ , B'_λ 와 B''_λ 는 결정하여야 할 계수들이다.

Lee와 Gong⁽⁵⁾은 변위 rate \dot{u} , \dot{v} 와 Kolosoff 응력함수 사이의 관계식을 다음과 같이 나타내었다.

$$\dot{u} + i\dot{v} = K(m) [\phi(z) - z\overline{\phi'(z)} - \overline{\phi(z)}] \tag{5}$$

여기서, $K(m) = (\frac{\sqrt{3}}{4})(\frac{2\sqrt{3}}{\sigma_0})^{1/m}$, m 은 변형률 rate 경화지수(strain rate hardening exponent), σ_0 은 강도계수(strength coefficient)이고, $(\overline{\quad})$ 은 복소공액(complex conjugate)을 의미한다.

균열면은 균열선단 부근에서 θ 가 $\pm\pi$ 이고, 균열면에서 변위 rate가 영이므로 식 (5)로부터 다음과 같은 경계조건식이 유도된다.

$$\begin{aligned} \dot{u} + i\dot{v}|_{\theta=\pm\pi} &= K(m) [\phi(z) - z\overline{\phi'(z)} - \overline{\phi(z)}]_{\theta=\pm\pi} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{6}$$

식 (6)에 식 (1)을 대입하고 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} A_\lambda e^{\lambda i\pi} - \lambda \overline{A_\lambda} e^{-(\lambda-2)i\pi} - \overline{B_\lambda} e^{-\lambda i\pi} &= 0 \\ A_\lambda e^{-\lambda i\pi} - \lambda \overline{A_\lambda} e^{(\lambda-2)i\pi} - \overline{B_\lambda} e^{\lambda i\pi} &= 0 \end{aligned} \tag{7}$$

식 (7)의 유용해(nontrivial solution)는 다음과 같다.

$$\sin 2\lambda\pi = 0 \tag{8}$$

식 (8)을 만족하는 고유치는 다음과 같다.

$$\lambda = \frac{n}{2} \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots) \tag{9}$$

n 이 영인 것은 변위 rate가 위치에 상관없이 일정한을 의미하고, n 이 음의 정수인 것은 무한 경계에서 변형률 rate와 응력이 무한대로 발산하므로 결국 n 은 양의 정수이다. 균열선단 부근에서의 변형률 rate와 응력분포에 미치는 영향이 n 이 1일때 $r^{\frac{1}{2}}$ 이 균열선단 부근의 응력분포식의 분모에 위치하여 그 응력 값에 가장 큰 영향을 미치므로 n 이 1인 경우만 고려한다.

식 (7)에 n 이 1, 즉 λ 가 $\frac{1}{2}$ 를 대입하고 식 (2)와 (3)을 이용하여 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}A'_\frac{1}{2} + B'_\frac{1}{2} &= 0 \\ \frac{1}{2}A''_\frac{1}{2} - B''_\frac{1}{2} &= 0 \end{aligned} \tag{10}$$

식 (1)의 $\phi(z)$ 를 z 에 대해 두번 미분하고, $\psi(z)$ 를 z 에 대해 한번 미분한후 λ 에 $\frac{1}{2}$ 를 대입하고 식 (10)을 이용하면 다음 식을 얻는다.

$$\begin{aligned}\phi''(z) &= -\frac{1}{4}A_{\frac{1}{2}}z^{-\frac{3}{2}} \\ &= -\frac{1}{4}(A'_{\frac{1}{2}} + iA''_{\frac{1}{2}})z^{-\frac{3}{2}} \\ \psi'(z) &= \frac{1}{2}B_{\frac{1}{2}}z^{-\frac{1}{2}} \\ &= -\frac{1}{4}(3A'_{\frac{1}{2}} - iA''_{\frac{1}{2}})z^{-\frac{1}{2}}\end{aligned}\quad (11)$$

3. 변형률 Rate 세기계수

식 (11)을 $\bar{z}\phi''(z) + \psi'(z)$ 에 대입한 후 실수부와 허수부로 분류하고, r 과 θ 에 대해 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\lim_{r \rightarrow 0} Re &= \frac{1}{2} \lim_{r \rightarrow 0} \{ \bar{z}\phi''(z) + \psi'(z) + \overline{z\phi''(z) + \psi'(z)} \} \\ &= -\frac{1}{4\sqrt{r}} [A'_{\frac{1}{2}}(\cos\frac{5\theta}{2} + 3\cos\frac{\theta}{2}) \\ &\quad + A''_{\frac{1}{2}}(\sin\frac{5\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2})] \\ \lim_{r \rightarrow 0} Im &= \frac{1}{2i} \lim_{r \rightarrow 0} \{ \bar{z}\phi''(z) + \psi'(z) - \overline{z\phi''(z) + \psi'(z)} \} \\ &= -\frac{1}{4\sqrt{r}} [-A'_{\frac{1}{2}}(\cos\frac{5\theta}{2} + 3\cos\frac{\theta}{2}) \\ &\quad + A''_{\frac{1}{2}}(\cos\frac{5\theta}{2} - \cos\frac{\theta}{2})]\end{aligned}\quad (12)$$

여기서, Re 과 Im 는 각각 $\bar{z}\phi''(z) + \psi'(z)$ 의 실수부와 허수부이다.

Lee와 Gong⁽⁵⁾은 변형률 rate 성분을 다음과 같이 유사응력함수 A 의 미분꼴, Kolosoff 응력함수 또는 $\bar{z}\phi''(z) + \psi'(z)$ 의 실수부 Re 과 허수부 Im 의 꼴로 나타내었다.

$$\begin{aligned}\dot{\epsilon}_x &= -\dot{\epsilon}_y \\ &= -K(m) \left(\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial \bar{z}^2} \right) \\ &= -K(m) Re \\ \dot{\epsilon}_{xy} &= -iK(m) \left(\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial \bar{z}^2} \right) \\ &= K(m) Im\end{aligned}\quad (13)$$

식 (13)에 $\lim_{r \rightarrow 0}$ 을 취한후 식 (12)를 대입하면 다음과 같은 경계조건식이 유도된다.

$$\begin{aligned}\lim_{r \rightarrow 0} \dot{\epsilon}_x &= \lim_{r \rightarrow 0} (-\dot{\epsilon}_y) \\ &= \frac{K(m)}{4\sqrt{r}} \left\{ A'_{\frac{1}{2}}(\cos\frac{5\theta}{2} + 3\cos\frac{\theta}{2}) \right. \\ &\quad \left. + A''_{\frac{1}{2}}(\sin\frac{5\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2}) \right\} \\ \lim_{r \rightarrow 0} \dot{\epsilon}_{xy} &= \frac{K(m)}{4\sqrt{r}} \left\{ A'_{\frac{1}{2}}(\sin\frac{5\theta}{2} + 3\sin\frac{\theta}{2}) \right. \\ &\quad \left. - A''_{\frac{1}{2}}(\cos\frac{5\theta}{2} - \cos\frac{\theta}{2}) \right\}\end{aligned}\quad (14)$$

식 (14)에서 균열형상이나 경계조건에 의한 영향을 내포하는 계수들을 균열선단 부근의 변형률 rate 분포를 대표하는 매개변수, 즉 변형률 rate 세기계수(strain rate intensity factor) L_I 과 L_{II} 를 다음과 같이 정의하자.

$$\begin{aligned}L_I &= -A'_{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \\ L_{II} &= A''_{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\end{aligned}\quad (15)$$

식 (15)를 식 (14)에 대입하여 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\lim_{r \rightarrow 0} \dot{\epsilon}_x &= \lim_{r \rightarrow 0} (-\dot{\epsilon}_y) \\ &= \frac{K(m)}{2\sqrt{2\pi r}} \left\{ -L_I(\cos\frac{5\theta}{2} + 3\cos\frac{\theta}{2}) \right. \\ &\quad \left. + L_{II}(\sin\frac{5\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2}) \right\} \\ \lim_{r \rightarrow 0} \dot{\epsilon}_{xy} &= \frac{K(m)}{2\sqrt{2\pi r}} \left\{ -L_I(\sin\frac{5\theta}{2} + 3\sin\frac{\theta}{2}) \right. \\ &\quad \left. - L_{II}(\cos\frac{5\theta}{2} - \cos\frac{\theta}{2}) \right\}\end{aligned}\quad (16)$$

식 (16)으로부터 균열선단 부근의 변형률 rate 분포는 $r^{-\frac{1}{2}}$ 의 특이성(singularity)를 가짐을 알수 있다. 또한 변형률 rate 세기계수만 결정되어진다면 식 (16)으로부터 균열선단 부근의 변형률 rate 분포를 결정할 수 있다.

식 (16)으로부터 식 (13)을 이용하여 L_I 과 L_{II} 에 대해 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}L_I &= \frac{\sqrt{2\pi r}}{\cos 2\theta - 1} \left\{ (\cos\frac{5\theta}{2} - \cos\frac{\theta}{2}) \lim_{r \rightarrow 0} Re \right. \\ &\quad \left. - (\sin\frac{5\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2}) \lim_{r \rightarrow 0} Im \right\} \\ L_{II} &= \frac{\sqrt{2\pi r}}{\cos 2\theta - 1} \left\{ -(\sin\frac{5\theta}{2} + 3\sin\frac{\theta}{2}) \lim_{r \rightarrow 0} Re \right. \\ &\quad \left. - (\cos\frac{5\theta}{2} + 3\cos\frac{\theta}{2}) \lim_{r \rightarrow 0} Im \right\}\end{aligned}\quad (17)$$

식 (17)을 하나의 복소변수 L 로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 L &= L_I - iL_{II} \\
 &= \frac{\sqrt{2\pi r}}{\cos 2\theta - 1} \left\{ (\cos \frac{5\theta}{2} + i \sin \frac{5\theta}{2} + \cos \frac{\theta}{2} \right. \\
 &\quad \left. + i \sin \frac{\theta}{2} \right\} \lim_{r \rightarrow 0} (Re + iIm) - 2 \left(\cos \frac{\theta}{2} \right. \\
 &\quad \left. - i \sin \frac{\theta}{2} \right) \lim_{r \rightarrow 0} (Re - iIm) \} \quad (18)
 \end{aligned}$$

식 (4)와 (12)를 이용하여 식(18)을 z , \bar{z} 와 Kolosoff 응력함수에 대한 표현으로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 L &= 2\sqrt{2\pi} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{z}{(z - \bar{z})^2} [z^{1/2}(z + \bar{z}) \{ \bar{z}\phi''(z) \} \\
 &\quad + \phi'(z) - 2\bar{z}^{3/2} \{ z\phi''(\bar{z}) + \phi'(\bar{z}) \}] \quad (19)
 \end{aligned}$$

식 (11)로부터 $\phi'(z)$ 를 다음과 같이 $\phi(z)$ 의 함수꼴로 나타낼수 있다.

$$\phi'(z) = -e^{i\theta} \overline{\phi'(\bar{z})} - \phi'(z) - z\phi''(z) \quad (20)$$

식 (20)을 $\bar{z}\phi''(z) + \phi'(z)$ 에 대입한후 등각 사상 함수(conformal mapping function) $\omega(\zeta)$ 를 이용하여 $z\phi''(z) + \phi'(z)$ 을 ζ -평면에 대해 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 &\bar{z}\phi''(z) + \phi'(z) \\
 &= \{ \overline{\omega(\zeta)} - \omega(\zeta) \} \frac{\phi''(\zeta) \omega'(\zeta) - \phi'(\zeta) \omega''(\zeta)}{\omega'(\zeta)^3} \\
 &\quad - e^{-i\theta} \frac{\frac{\partial \phi(\zeta)}{\partial \zeta} \Big|_{\theta=\pi}}{\omega'(\zeta)} - \frac{\phi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \quad (21)
 \end{aligned}$$

식 (19)에 식 (21)과 식 (21)의 공액을 대입하고 식 (4)와 다항식 개조(series reversion)를 이용하면 다음과 같이 정리된다.

$$L = -\sqrt{\pi} \lim_{\zeta \rightarrow 1} \frac{\phi'(\zeta)}{\zeta^{-1} \sqrt{\omega''(\zeta)}} \quad (22)$$

4. 균열선단 부근의 응력분포와 변형률 Rate 세기계수

식 (14)와 (15)를 이용하여 식 (13)을 L_I 과 L_{II} 가 포함된 꼴로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 \lim_{r \rightarrow 0} Re &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi r}} \left\{ L_I (\cos \frac{5\theta}{2} + 3\cos \frac{\theta}{2}) \right. \\
 &\quad \left. - L_{II} (\sin \frac{5\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2}) \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{r \rightarrow 0} Im &= \frac{-1}{2\sqrt{2\pi r}} \left\{ L_I (\sin \frac{5\theta}{2} + 3\sin \frac{\theta}{2}) \right. \\
 &\quad \left. + L_{II} (\cos \frac{5\theta}{2} - \cos \frac{\theta}{2}) \right\} \quad (23)
 \end{aligned}$$

Lee와 Gong⁽⁵⁾은 응력성분식을 다음과 같이 나타내었다.

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\sigma_{xy} = 4 \left(\frac{1}{2} \right)^m \eta^{m-1} (Re + iIm) \quad (24)$$

여기서, $\eta = \sqrt{Re^2 + Im^2}$ 이다.

식 (24)에 $\lim_{r \rightarrow 0}$ 을 취하고 식 (23)을 대입한 후 실수부와 허수부로 분리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 &\lim_{r \rightarrow 0} \{ \sigma_y(r, \theta) - \sigma_x(r, \theta) \} \\
 &= \frac{2^{\frac{3-4m}{2}}}{(\pi r)^{m/2}} \{ L_I^2 (5 + 3\cos 2\theta) + L_{II}^2 (1 - \cos 2\theta) \\
 &\quad - 4L_I L_{II} \sin 2\theta \}^{\frac{m-1}{2}} \left\{ L_I (\cos \frac{5\theta}{2} + 3\cos \frac{\theta}{2}) \right. \\
 &\quad \left. - L_{II} (\sin \frac{5\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2}) \right\} \quad (25)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{xy}(r, \theta) \\
 &= - \frac{2^{1-4m}}{(\pi r)^{m/2}} \{ L_I^2 (5 + 3\cos 2\theta) + L_{II}^2 (1 - \cos 2\theta) \\
 &\quad - 4L_I L_{II} \sin 2\theta \}^{\frac{m-1}{2}} \left\{ L_I (\sin \frac{5\theta}{2} + 3\sin \frac{\theta}{2}) \right. \\
 &\quad \left. + L_{II} (\cos \frac{5\theta}{2} - \cos \frac{\theta}{2}) \right\} \quad (26)
 \end{aligned}$$

Lee와 Gong⁽⁵⁾은 팽창응력(dilatational stress) σ_p 을 다음과 같이 나타내었다.

$$\begin{aligned}
 &\sigma_p(\beta_2) - \sigma_p(\beta_1) \\
 &= 4 \left(\frac{1}{2} \right)^m I_r - 4 \left(\frac{1}{2} \right)^m I_\theta \\
 &= 4 \left(\frac{1}{2} \right)^m \int_{c_1} \eta^{m-3} \left[Re^2 \left\{ \left(m \frac{\partial Re}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial Im}{\partial \theta} \right) \cos 2\theta \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \left(\frac{m}{r} \frac{\partial Re}{\partial \theta} + \frac{\partial Im}{\partial r} \right) \sin 2\theta \right\} \right. \\
 &\quad \left. + (m-1) Re Im \left\{ \left(\frac{\partial Im}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial Re}{\partial \theta} \right) \cos 2\theta \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \left(\frac{\partial Re}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial Im}{\partial \theta} \right) \sin 2\theta \right\} \right. \\
 &\quad \left. + Im^2 \left\{ \left(\frac{\partial Re}{\partial r} - \frac{m}{r} \frac{\partial Im}{\partial \theta} \right) \cos 2\theta \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \left(m \frac{\partial Im}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial Re}{\partial \theta} \right) \sin 2\theta \right\} \right] dr \\
 &\quad - [Re^2 \left\{ \left(\frac{\partial Im}{\partial r} + \frac{m}{r} \frac{\partial Re}{\partial \theta} \right) \cos 2\theta \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left(m \frac{\partial Re}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial Im}{\partial \theta} \right) \sin 2\theta \Big\} \\
 & + (m-1) ReIm \left\{ \left(\frac{\partial Re}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial Im}{\partial \theta} \right) \cos 2\theta \right. \\
 & + \left. \left(\frac{\partial Im}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial Re}{\partial \theta} \right) \sin 2\theta \right\} \\
 & + Im^2 \left\{ \left(m \frac{\partial Im}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial Re}{\partial \theta} \right) \cos 2\theta \right. \\
 & + \left. \left(-\frac{\partial Re}{\partial r} - \frac{m}{r} \frac{\partial Im}{\partial \theta} \right) \sin 2\theta \right\}] r d\theta \quad (27)
 \end{aligned}$$

여기서, σ_p 는 σ_x 와 σ_y 의 합으로서 면적팽창과 관련된 응력성분이며, C_r 은 임의의 적분경로이고, β_1 과 β_2 는 z-평면상의 임의의 두 지점을 의미한다.

식 (27)에 $\lim_{r \rightarrow 0}$ 을 취한 후, 식 (23)을 대입하고 β_2 지점의 좌표를 r 과 θ 로 설정하고, β_1 의 지점을 ∞ 와 0으로 설정한 후 $\lim_{r \rightarrow 0} \sigma_p(r, \theta)$ 에 대해 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 \lim_{r \rightarrow 0} \sigma_p(r, \theta) &= \sigma_p(\infty, 0) + 4 \left(\frac{1}{2} \right)^m \lim_{r \rightarrow 0} I_r \\
 &\quad - 4 \left(\frac{1}{2} \right)^m \lim_{r \rightarrow 0} I_\theta \quad (28)
 \end{aligned}$$

여기서,

$$\begin{aligned}
 \lim_{r \rightarrow 0} I_r &= \frac{2^2 (m-2)}{(\pi r)^{m/2}} \frac{L_1^3 |L_1|^{m-3}}{m} \\
 \lim_{r \rightarrow 0} I_\theta &= -\frac{1}{2^{\frac{m+3}{2}} (\pi r)^{\frac{m}{2}}} \\
 &\quad \times \left[-L_I \int_0^\theta \{ L_I^2 (5+3\cos 2\theta) \right. \\
 &\quad + L_{II}^2 (1-\cos 2\theta) - 4L_I L_{II} \sin 2\theta \}^{\frac{m-3}{2}} \\
 &\quad \times [R_1(\theta) \{ 3(m-1)\cos\theta \sin \frac{7\theta}{2} \\
 &\quad + (m+1)\sin \frac{\theta}{2} \} + R_2(\theta) \{ -3(m \\
 &\quad -1)\cos\theta \sin \frac{7\theta}{2} + (m+1)\sin \frac{\theta}{2} \} \\
 &\quad + 6(m-1)R_3(\theta)\cos\theta \cos \frac{7\theta}{2}] d\theta \\
 &\quad + L_{II} \int_0^\theta \{ L_I^2 (5+3\cos 2\theta) \\
 &\quad + L_{II}^2 (1-\cos 2\theta) - 4L_I L_{II} \sin 2\theta \}^{\frac{m-3}{2}} \\
 &\quad \times [R_1(\theta) \left[-(m-1)\cos \frac{5\theta}{2} + 3(m-1) \right. \\
 &\quad \times \left. \sin\theta \sin \frac{7\theta}{2} - (m+1)\cos \frac{\theta}{2} \right\} \\
 &\quad + R_2(\theta) \left\{ -3(m-1)\sin\theta \sin \frac{7\theta}{2} + (m-1) \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times \left. \cos \frac{5\theta}{2} - (m+1)\cos \frac{\theta}{2} \right\} + 2(m-1)R_3(\theta) \\
 & \times \left\{ \sin \frac{5\theta}{2} + 3\sin\theta \cos \frac{7\theta}{2} \right\}] d\theta \Big\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R_1(\theta) &= L_I^2 \left(\cos \frac{5\theta}{2} + 3\cos \frac{\theta}{2} \right)^2 + L_{II}^2 \left(\sin \frac{5\theta}{2} \right. \\
 &\quad \left. - \sin \frac{\theta}{2} \right)^2 - 2L_I L_{II} \left(\cos \frac{5\theta}{2} + 3\cos \frac{\theta}{2} \right) \\
 &\quad \times \left(\sin \frac{5\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R_2(\theta) &= L_I^2 \left(\sin \frac{5\theta}{2} + 3\sin \frac{\theta}{2} \right)^2 + L_{II}^2 \left(\cos \frac{5\theta}{2} \right. \\
 &\quad \left. - \cos \frac{\theta}{2} \right)^2 + 2L_I L_{II} \left(\sin \frac{5\theta}{2} + 3\sin \frac{\theta}{2} \right) \\
 &\quad \times \left(\cos \frac{5\theta}{2} - \cos \frac{\theta}{2} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R_3(\theta) &= -L_I^2 \left(\cos \frac{5\theta}{2} + 3\cos \frac{\theta}{2} \right) \left(\sin \frac{5\theta}{2} + 3\sin \frac{\theta}{2} \right) \\
 &\quad + L_{II}^2 \left(\sin \frac{5\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2} \right) \left(\cos \frac{5\theta}{2} - \cos \frac{\theta}{2} \right) \\
 &\quad - L_I L_{II} \left\{ \left(\cos \frac{5\theta}{2} + 3\cos \frac{\theta}{2} \right) \right. \\
 &\quad \times \left(\cos \frac{5\theta}{2} - \cos \frac{\theta}{2} \right) \\
 &\quad - \left(\sin \frac{5\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2} \right) \\
 &\quad \times \left. \left(\sin \frac{5\theta}{2} + 3\sin \frac{\theta}{2} \right) \right\} \quad (29)
 \end{aligned}$$

여기서, β_1 에서의 팽창응력 값 $\sigma_p(\infty, 0)$ 는 임의의 값인데 직선 균열선단 부근에서 $\lim_{r \rightarrow 0} I_r$, $\lim_{r \rightarrow 0} I_\theta$ 의 값이 매우 크므로 무시할 수 있다.

식 (25)와 (29)를 연립하여 σ_x 와 σ_y 에 대해 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 \lim_{r \rightarrow 0} \sigma_x(r, \theta) &= 2 \left(\frac{1}{2} \right)^m \lim_{r \rightarrow 0} I_r - 2 \left(\frac{1}{2} \right)^m \lim_{r \rightarrow 0} I_\theta \\
 &\quad - \frac{2^{(1-4m)/2}}{(\pi r)^{m/2}} \{ L_I^2 (5+3\cos 2\theta) \\
 &\quad + L_{II}^2 (1-\cos 2\theta) \\
 &\quad - 4L_I L_{II} \sin 2\theta \}^{\frac{m-1}{2}} \\
 &\quad \times \left\{ L_I \left(\cos \frac{5\theta}{2} + 3\cos \frac{\theta}{2} \right) \right. \\
 &\quad \left. - L_{II} \left(\sin \frac{5\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2} \right) \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{r \rightarrow 0} \sigma_y(r, \theta) &= 2 \left(\frac{1}{2} \right)^m \lim_{r \rightarrow 0} I_r - 2 \left(\frac{1}{2} \right)^m \lim_{r \rightarrow 0} I_\theta \\
 &\quad + \frac{2^{(1-4m)/2}}{(\pi r)^{m/2}} \{ L_I^2 (5+3\cos 2\theta) \\
 &\quad + L_{II}^2 (1-\cos 2\theta) \\
 &\quad - 4L_I L_{II} \sin 2\theta \}^{\frac{m-1}{2}}
 \end{aligned}$$

$$\times \left\{ L_I \left(\cos \frac{5\theta}{2} + 3 \cos \frac{\theta}{2} \right) - L_{II} \left(\sin \frac{5\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2} \right) \right\} \quad (30)$$

식 (26)과 (30)으로부터 균열선단 부근의 응력 분포는 $r^{-\frac{m}{2}}$ 의 특이성을 가짐을 알 수 있다. 또한 변형률 rate 세기계수만 결정되어진다면 균열선단 부근의 응력분포를 결정할 수 있다.

5. 결 론

Power law 크릴재료에 존재하는 임의 형상의 강제함유물 균열선단 부근의 변형률 rate와 응력 분포에 대한 연구를 복소유사응력함수를 이용하여 수행하였으며, 그 결과는 다음과 같다.

(1) Power law 크릴재료에 존재하는 임의형상의 강제함유물 균열에 대해 균열선단 부근의 변형률 rate와 응력분포를 대표하는 새로운 파괴역학 매개변수로서 변형률 rate 세기계수를 도출하였고 변형률 rate 세기계수와 Kolosoff 응력함수 사이의 관계식도 도출하였다.

(2) Power law 크릴재료에 존재하는 임의형상의 강제함유물 균열에 대해 균열선단 부근의 변형률 rate 및 응력분포와 변형률 rate 세기계수 사이의 관계식을 각각 개발하였다.

(3) Power law 크릴재료에 존재하는 임의형상의 강제함유물 균열에 대해 균열선단 부근의 변형률 rate 및 응력분포는 균열선단으로부터의 거리 r 과 변형률 rate 경화지수 m 에 대해 각각 $r^{-\frac{1}{2}}$ 와 $r^{-\frac{m}{2}}$ 의 특이성을 갖는다.

후 기

이 논문은 1995년 한국학술진흥재단의 공모과제 "Complex pseudo stress function을 이용한 power law creep material의 균열해석" 연구비에 의하여 연구되었으며, 이에 감사드립니다.

참고문헌

(1) Hoff, N. J., 1954, "Approximate Analysis of Structures in the Presence of Moderately Large Creep Deformations," *Quart. Appl. Math.*, Vol. 12, pp. 49~55.

(2) Rozenblium, V. I., 1963, "Approximate Equations of Creep of Thin Shells," *J. Appl. Math. Mech.*, Vol. 17, pp. 217~225.

(3) Spence, J., 1973, "Creep Analysis of Smooth Curved Pipes under In-Plane Bending," *J. Mech. Eng. Sci.*, Vol. 15, pp. 252~265.

(4) Mukherjee, S., 1982, "Time-Dependent Inelastic Deformation of Metals by Boundary Element Methods," *Developments in Boundary Element Methods-II*, Banerjee, P. K. and Shaw, R. P. (eds.), Applied Science Publishers, Barking, Essex, UK, pp. 111~142.

(5) Lee, Y. S. and Gong, H., 1987, "Application of Complex Variables and Pseudo-Stress Function to Power Law Materials and Stress Analysis of Single Rigid Inclusion in Power-Law Materials Subjected to Simple Tension and Pure Shear," *Int. J. of Mech. Sci.*, Vol. 29, pp. 669~694.

(6) Viswanathan, R., 1989, *Damage Mechanisms and Life Assessment of High-Temperature Components*, ASM International, Metals Park, Ohio.

(7) Landes, J. D. and Begley, J. A., 1976, "A Fracture Mechanics Approach to Creep Crack Growth," *Mechanics of Crack Growth*, American Society for Testing and Materials, STP 590, Philadelphia, pp. 128~148.

(8) Saxena, A., 1980, "Evaluation of C^* for the Characterization of Creep-Crack-Growth Behavior in 304 Stainless Steel," *Fracture Mechanics: Twelfth Conference*, American Society for Testing and Materials, STP 700, Philadelphia, pp. 131~135.

(9) Smith, D. J. and Webster, G. A., 1983, "Estimates of the C^* Parameter for Crack Growth in Creeping Materials," *Inelastic Crack Analysis, Vol. 1 of Elastic Plastic Fracture: Second Symposium*, American Society for Testing and Materials, STP 803, Philadelphia, pp. 1654~1674.

(10) Ohji, K., Ogura, K., Kubo, S. and Katada, Y., 1980, "The Application of Modified J Integral to Creep Crack Growth," *Engineering Aspects of Creep*, Vol. 2, Institute of Mechanical Engineers, London, pp. 9~16.

(11) Ehlers, R. and Riedel, H., 1981, "A Finite

- Element Analysis of Creep Deformation in A Specimen Containing a Macroscopic Crack," in *Advances in Fracture Research, Proceedings, Fifth International Conference on Fracture, Cannes, France, Vol. 2, Francois, D. et al., Ed., Pergamon Press, pp. 691~698.*
- (12) Saxena, A., 1986, "Creep Crack Growth under Non-Steady-State Conditions," *Fracture Mechanics : Seventeenth Volume*, American Society for Testing and Materials, STP 905, Philadelphia, pp. 185~201.
- (13) Muskhelishvili, N. I., 1954, *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*, Noordhoff International Publishing.