

論文97-34S-1-13

디지털 영역에서의 다항식 행렬의 분해와 MIMO LBR 구현에의 응용

(Polynomial Matrix Decomposition in the Digital Domain and Its Application to MIMO LBR Realizations)

孟勝柱*, 林一澤**, 李秉基*

(Seung-Joo Maeng, Il-Taek Lim, and Byeong Gi Lee)

요 약

본 논문에서는 정규화 계수가 r 이고 z 평면의 단위원 상에서 양의 준 정부호 형식인 범공액 허마이트 (paraconjugate hermitian) 다항식 행렬 $V(z)$ 에 대하여, $V(z) = \tilde{M}(z) M(z)$ 의 관계식을 만족하는 다항식 행렬 $M(z)$ 를 구하는 다항식 행렬 분해 방법을 제안한다. 제안된 방법은 모든 분해 과정이 디지털 영역에서 수행된다. 또한 제안된 다항식 행렬 분해 방법이 MIMO LBR 이단자망 (two-pair) 구현에 어떻게 이용되는지에 대해 논의한다.

Abstract

In this paper we present a polynomial matrix decomposition algorithm that determines a polynomial matrix $M(z)$ which satisfies the relation $V(z) = \tilde{M}(z) M(z)$ for a given polynomial matrix $V(z)$ which is paraconjugate hermitian matrix with normal rank r and is positive semidefinite on the unit circle of z -plane. All the decomposition procedures in this proposed method are performed in the digital domain. We also discuss how to apply the polynomial matrix decomposition in realizing MIMO LBR two-pairs.

I. 서 론

잘 알려진 바와 같이 아날로그 영역에는 복소 변수 p 의 다항식으로 이루어진 행렬의 분해를 필요로 하는 문제들이 많이 있다. 그 대표적인 예로서 선형 n 단자의 합성, 안정적인 가산성 오차에 영향받은 다중 변환 시스템의 검출 및 필터 처리 등을 들 수 있다^[1]. 이와 유사하게 디지털 영역에서도 다항식 행렬의 분해를 필요로 하는 문제들이 있으며, 그 대표적인 예로는 유

계 실수(bounded real : BR) 시스템의 다중 입출력 (multi-input multi-output : MIMO) 무손실 유계 실수(lossless bounded real : LBR) 구현을 들 수 있다^{[2][3]}.

LBR 시스템은 아날로그 양의 실수 홀수 (positive real odd : PRO) 또는 무손실 양의 실수(lossless positive real : LPR) 시스템에 대응되는 것으로 볼 수 있으며, 유한 자리수 구현에 대한 저민감도, 한계 주기 및 넘침에 대한 면역성, 구현시의 파이프라이닝화 등의 좋은 특성들을 가지고 있는 직교 디지털 시스템이다^{[4][5]}. 그러나 MIMO 시스템은 일반적으로 BR 시스템이기 때문에, 위의 여러가지 특성들을 가지기 위해서는 LBR 시스템으로 변환시켜 주어야 한다. 이 경우 다항식 행렬의 분해가 핵심적인 역할을 담당하게

* 正會員, 서울大學校 電氣工學部

(School of Electrical Eng., Seoul Nat'l Univ.)

** 正會員, LG電子技術院

(LG Electronics Research Center)

接受日字: 1996年9月23日, 수정완료일: 1997年1月14日

된다.

간단한 계산을 통해 이루어질 수 있는 다항식 함수의 분해나 상수 행렬의 분해와는 달리, 행렬의 원소가 다항식일 경우에는 그 분해 과정이 매우 복잡해진다. 아날로그 영역에서의 다항식 행렬의 분해는 Youla에 의해 제안된 방법¹¹⁾을 이용하여 수행될 수 있다. 디지털 영역에서의 경우에는 특별히 이를 위해 제안된 방법은 없고, 쌍선형 변환 (bilinear transform)을 통해 아날로그 영역에서의 방법을 그대로 사용한다. 이 경우 디지털 영역에서의 다항식 행렬을 아날로그 영역으로 변환하는 과정에서는 별다른 문제가 없지만, 아날로그 영역에서 분해를 수행한 후의 다항식 행렬을 다시 디지털 영역의 행렬로 변환하는 과정에서 수치의 정확도 문제가 발생한다.

이러한 점을 고려하여 본 논문에서는 디지털 영역에서 직접 다항식 행렬을 분해할 수 있는 방법을 제안하고자 한다. 이 방법은 아날로그 영역에서 사용되는 Youla의 방법과 유사하지만, 모든 분해 과정이 디지털 영역에서만 이루어지게 되므로 상기한 문제점을 해결할 수 있다는 장점을 가진다. 또한 이러한 다항식 행렬의 분해 방법이 MIMO LBR 시스템의 구현에 어떻게 이용될 수 있는지 살펴보도록 하겠다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 먼저 2절에서는 디지털 영역에서 다항식 행렬을 분해하는 방법을 유도하고, 3절에서는 그 과정을 수식적인 예를 통해 보여주고, 마지막으로 4절에서는 다항식 행렬의 분해 방법이 MIMO LBR 시스템의 구현에 어떻게 적용되는지에 대해 살펴보도록 하겠다.

II. 다항식 행렬의 분해

본 절에서는 z 영역에서 주어진 다항식 행렬을 두개의 다항식 행렬로 분해하는 과정을 전개하고자 한다. 이 방법은 p 영역에서의 다항식 행렬 분해 방법으로 잘 알려진 Youla의 방법¹¹⁾과 유사하다. 단, 본 논문에서 사용되는 “다항식”이란 말은 z 와 z^{-1} 모두에 대한 지수승을 포함하는 식을 의미한다.

고려 대상이 되는 다항식 행렬은 $V(z) = \hat{V}(z)$ 의 성질을 갖고 있는 범공액 허마이트 행렬 $V(z)$ 이다. 이 식에서 물결 표시는 다항식 계수의 공액 복소화, 행렬의 전치, z 의 z^{-1} 로의 대치의 세 가지 연산을 동시에 나타낸 것이다. 즉,

$$\hat{V}(z) \equiv V^*(z^{-1}). \quad (1)$$

$V(z)$ 가 정규 계수 (normal rank)¹⁾ r 이고 단위원 상에서 양의 준 정부호 (positive semidefinite)인 $n \times n$ 범공액 허마이트 행렬일 때,

$$V(z) = \hat{M}(z) M(z) \quad (2)$$

와 같은 성질을 만족하는 $r \times n$ 행렬 $M(z)$ 가 존재함이 잘 알려져 있다¹³⁾. 이 식에서 $M(z)$ 는 z^{-1} 의 지수승으로만 이루어진 다항식 행렬이다. 그러나, 이러한 행렬을 구하는 방법에 대한 연구는 아직까지 미진한 실정이다. 본 절에서는 $M(z)$ 를 구하는 방법을 상세히 유도하도록 하겠다.

먼저, $V(z)$ 를 다음과 같은 Smith 형태로 분해한다¹⁶⁾.

$$V(z) = C(z) E(z) F(z). \quad (3)$$

이 식에서 $C(z)$, $F(z)$ 는 그 크기가 각각 $n \times r$, $r \times n$ 인 다항식 행렬이며, $E(z)$ 는 크기가 $r \times r$ 인 다항식 대각 행렬이다. 한편 $V(z) = \hat{V}(z)$ 이므로,

$$C(z) E(z) F(z) = \hat{F}(z) \hat{E}(z) \hat{C}(z) \quad (4)$$

이고, Smith 형태에서 대각 행렬은 유일하게 결정되므로

$$E(z) = \hat{E}(z) \quad (5)$$

의 관계가 성립한다. 따라서 만일 $(z^{-1}-a)$ 가 $E(z)$ 의 원소이면 $(z-a^*)$ 도 $E(z)$ 의 원소가 된다. 이로부터

$$E(z) = \hat{\Lambda}(z) \hat{\Theta}(z) \Theta(z) \Lambda(z) \quad (6)$$

와 같이 나타낼 수 있다. 이 식에서 $\Lambda(z)$ 는 영점 (zero)들이 단위원 내에 있는 대각 행렬이고 $\Theta(z)$ 는 영점이 단위원 상에 있는 대각 행렬이며, 두 행렬 모두 z^{-1} 만의 다항식으로 이루어진다.

식 (6)을 식 (3)과 식 (4)에 대입하고 식을 정리하면

$$\Lambda(z) \hat{C}(z) F^{-1}(z) \Lambda^{-1}(z) = \hat{\Delta}^{-1}(z) \hat{\Lambda}^{-1}(z) \hat{F}^{-1}(z) C(z) \hat{E}(z) \Lambda(z) \quad (7)$$

과 같은 식을 얻을 수 있다. 단, $\Delta(z) = \hat{\Theta}(z) \Theta(z)$ 이

1) “정규 계수”는 0이 아닌 가장 큰 소행렬(minor matrix)의 차수를 말한다.

다. $F^{-1}(z)$ 과 $\tilde{F}^{-1}(z)$ 는 모두 다항식 행렬이며 대각 행렬 $\Lambda(z)$, $\tilde{\Lambda}(z)$ 와 $\Delta(z)$ 는 모든 영점들을 각각 단위 원 내부와 외부, 단위원 상에 가지고 있다. 따라서 식 (7)의 좌변은 만약 극점들이 있다면 모두 단위원 내부에 있게 되며, 우변은 만약 극점들이 있다면 모두 단위원 외부 또는 단위원 상에 있게 된다. 이것은 명백한 모순이므로 식 (7)의 $\Lambda(z) \tilde{C}(z) F^{-1}(z) \Lambda^{-1}(z)$ 항은 다항식 행렬이 된다. 또한 이 항의 행렬식이 상수임은 쉽게 보일 수 있으므로, 이 행렬은 유니모듈로²⁾가 된다. 만일 $R(z) = \Lambda(z) \tilde{C}(z) F^{-1}(z) \Lambda^{-1}(z)$ 로 놓으면, 식 (7)은 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\Theta(z) R(z) \Theta^{-1}(z) = \tilde{H}^{-1}(z) V(z) H^{-1}(z) \equiv S(z). \quad (8)$$

이 식에서

$$H(z) = \Theta(z) \Lambda(z) F(z) \quad (9)$$

이다. 식 (8)에서 정의된 $S(z)$ 는 단위원 상에서 양의 준 정부호인 유니모듈로 행렬이며 범공액 허마이트 성질을 가진다

이제 $S(z)$ 를 z^{-1} 만의 다항식으로 이루어진 $r \times r$ 행렬 $X(z)$ 에 대해

$$S(z) = \tilde{X}(z) X(z) \quad (10)$$

의 형태로 분해하는 방법에 대해 살펴보자. 일단 식 (10)의 분해가 완료되면, 식 (2)에 주어진 행렬 $M(z)$ 는

$$M(z) = E(z) X(z) H(z) \quad (11)$$

와 같이 나타낼 수 있다. 이 식에서 $E(z)$ 는 범일원적(paraunitary) 행렬이며³⁾ $M(z)$ 를 좀 더 간단한 형태로 만들어 주는 역할을 한다. 즉 $X(z) H(z) \equiv \tilde{M}(z)$ 라 할때 $\tilde{M}(z) M(z) = \tilde{M}(z) \tilde{E}(z) E(z) \tilde{M}(z) = \tilde{M}(z) \tilde{M}(z)$ 이므로 이 관계를 이용하여 $M(z)$ 의 원소가 z^{-1} 만의 다항식이 되고 그 차수가 최소화가 되도록 해 주는 것이다.

먼저, $S(z)$ 의 행과 열을 z^{-1} 에 대한 오름차순으로 재정렬한다. 이를 위해서는 적당한 치환(permu-

tation) 행렬 P_1 을 $S(z)$ 의 앞 뒤로 곱해주면 된다. 즉, 다음과 같이 변환해 주면 된다.

$$P_1^{-1} S(z) P_1 \equiv S_a(z). \quad (12)$$

이 경우 $S_a(z)$ 의 대각 원소의 차수 $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_r$ 은 다음의 부등식을 만족하게 된다 :

$$\delta_1 \leq \delta_2 \leq \dots \leq \delta_r. \quad (13)$$

한편 $S(z) = \tilde{S}(z)$ 이므로 $S_a(z)$ 의 대각 원소들은 z 와 z^{-1} 에 대해 같은 차수를 갖는다. 이제 $\epsilon_i, i=1,2,\dots,r$ 이 $S_a(z)$ 의 i 번째 열의 원소들 중 z^{-1} 에 대한 최고 차수를 나타낸다고 하고, $\alpha_i, i=1,2,\dots,r$ 을 다음과 같이 정의한다.

$$\alpha_i = \begin{cases} \epsilon_i - \delta_i, & \epsilon_i > \delta_i \text{인 경우,} \\ 0, & \text{그 밖의 경우.} \end{cases} \quad (14)$$

또한 위의 값들을 이용하여 대각 행렬 $\Psi_1(z)$ 를

$$\Psi_1(z) = \text{diag}[z^{\alpha_1}, z^{\alpha_2}, \dots, z^{\alpha_r}] \quad (15)$$

와 같이 정의한다. 이 경우 변환

$$\Psi_1(z) S_a(z) \Psi_1^{-1}(z) \equiv S_b(z) \quad (16)$$

는 각 열 중 최고차의 원소가 대각 위치로 가게 해 준다.

다음으로 차수 $\beta_i, i=1,2,\dots,r$ 을

$$\beta_i = \delta_r - \delta_i, \quad i=1,2,\dots,r \quad (17)$$

와 같이 정의하고 이에 대응하는 대각 행렬 $\Omega_1(z)$ 를

$$\Omega_1(z) = \text{diag}[(1+z^{-1})^{\beta_1}, (1+z^{-1})^{\beta_2}, \dots, (1+z^{-1})^{\beta_r}] \quad (18)$$

와 같이 정의한다. 이 경우 변환

$$\tilde{\Omega}_1(z) S_b(z) \Omega_1(z) \equiv S_c(z) \quad (19)$$

은 모든 대각 원소가 동일한 차수 δ_r 을 가지는 범공액 허마이트 행렬을 만든다. $S_c(z)$ 의 행렬식은 그 차수가 $-\beta$ 와 β 사이에 놓이는 다항식이 된다. 이를 수식으로 다음과 같이 표시하자.

2) 행렬식의 값이 z 에 관한 함수가 아닌 가역(non-singular) 다항식 행렬 $A(z)$ 를 “유니모듈로(uni-modulo)”라 한다.

3) 행렬 $E(z)$ 는 $\tilde{E}(z) E(z) = I$ 의 관계를 만족할 때 “범일원적(paraunitary)”이라고 불린다.

$$|S_c(z)| = O(z^{-\beta}, z^\beta). \tag{20}$$

이 식에서 $\beta = \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_r$ 이다. 식 (17)에 의해, 각각의 i 에 대해 $\beta_i \leq \delta_r$ 이고 $\beta_r = 0$ 이므로

$$\beta \leq (r-1)\delta_r \tag{21}$$

의 관계가 성립하게 된다.

한편 $S_c(z)$ 는 상수 행렬 T_i 을 계수로 가지는 z 와 z^{-1} 에 대한 다항식으로 전개할 수도 있다. 즉

$$S_c(z) = z^{\delta_r} T_{-\delta_r} + \dots + z T_{-1} + T_0 + z^{-1} T_1 + \dots + z^{-\delta_r} T_{\delta_r} \tag{22}$$

와 같이 나타낼 수 있다. 이 식에서

$T_i, i = -\delta_r, \dots, \delta_r$ 은 $S_c(z)$ 가 범공역 허마이트이므로

$$T_i = T_{-i}^{*'} \tag{23}$$

의 관계를 만족하게 된다. 이 때 식 (22)의 T_{δ_r} 은 비가역 행렬(singular matrix)이 된다. 만약 T_{δ_r} 가 비가역 행렬이 아니라면 $S_c(z)$ 의 행렬식은

$$|S_c(z)| = O(z^{-r\delta_r}, z^{r\delta_r}) \tag{24}$$

와 같이 되어 식 (20)과 (21)에 위배되게 된다. 이 사실로부터 T_{δ_r} 은 T_{δ_r} 의 $(m+1)$ 번째 행과 $(m+1)$ 번째 열이 더해지면 비가역이 되는 $m \times m$ 크기의 주 소행렬(principal minor)을 가지고 있음을 알 수 있다.

Q_1 을 i 번째 열 q_i 가

$$q_i = \begin{cases} [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_m \ 1 \ 0 \ \dots \ 0]^t, & i = m+1 \text{인 경우,} \\ e_i, & \text{그 밖의 경우} \end{cases} \tag{25}$$

와 같은 형태를 가지는 $r \times r$ 가역 행렬이라 하자. 이 식에서 e_i 는 $r \times r$ 단위 행렬의 i 번째 열 벡터이고 q_1, q_2, \dots, q_m 은 $Q_1^{*'} T_{\delta_r} Q_1$ 의 $(m+1, m+1)$ 번째 위치의 값이 0이 되도록 결정한다. 이 경우

$$S_d(z) \equiv Q_1^{*'} S_c(z) Q_1 \tag{26}$$

와 같이 정의되는 $S_d(z)$ 는 $S_d(z) = \sum_{i=-\delta_r}^{\delta_r} (Q_1^{*'} T_i Q_1) z^{-i}$ 와 같이 나타낼 수 있으므로

$(m+1, m+1)$ 번째 위치에서 δ_r 보다 낮은 차수를 갖게 된다.

Q_1 의 정의에 의해 $S_d(z)$ 는 $S_c(z)$ 와 단지 $(m+1)$ 번째 행과 열의 값만 달라지게 된다. 좀 더 자세히 나타내면

$$[S_d(z)]_{i,j} = \begin{cases} [S_c(z)]_{i,j} + \sum_{n=1}^m q_i^{*'} [S_c(z)]_{i,n}, & i = m+1 \text{인 경우,} \\ [S_c(z)]_{i,j} + \sum_{n=1}^m q_n [S_c(z)]_{i,n}, & j = m+1 \text{인 경우,} \\ [S_c(z)]_{i,j} + \sum_{n=1}^m q_i^{*'} q_n [S_c(z)]_{i,n}, & i = j = m+1 \text{인 경우,} \\ [S_c(z)]_{i,j}, & \text{그 밖의 경우} \end{cases} \tag{27}$$

와 같다. 식 (19)로부터 $[S_c(z)]_{i,j}$ 는 $(1+z)^{\beta_i} (1+z^{-1})^{\beta_j}$ 로 나누어지므로, $[S_d(z)]_{i,j}$ 도 $(1+z)^{\beta_i} (1+z^{-1})^{\beta_j}$ 로 나누어진다. 따라서

$$S_1(z) \equiv Q_1^{-1}(z) S_d(z) Q_1^{-1}(z) \tag{28}$$

와 같이 정의된 행렬 $S_1(z)$ 는 범공역 허마이트 행렬이며, 유니모듈로가 된다. 행렬 $S_1(z)$ 는 $S(z)$ 에 비해 $(m+1, m+1)$ 번째 위치에서의 차수가 z 와 z^{-1} 모두에 대해 한 차수 이상 낮으며, 그 밖의 대각 성분의 차수는 같다.

식 (12)와 (16), (19), (26), (28)을 결합하면

$$S(z) = \tilde{U}_1(z) S_1(z) U_1(z) \tag{29}$$

의 관계를 얻을 수 있다. 이 식에서

$$U_1(z) = Q_1(z) Q_1^{-1}(z) Q_1^{-1}(z) \Psi_1^{-1}(z) P_1^{-1}(z) \tag{30}$$

이다. 지금까지가 분해 과정의 첫번째 단계이다. 식 (30)에서 아래 첨자 1은 그 행렬들이 첫번째 단계에 사용된 것임을 나타내준다. $U_1(z)$ 는 그 행렬식이

$$|U_1(z)| = z^{-a} \tag{31}$$

과 같이 주어지는 다항식 행렬이다. 이 식에서 $a = a_1 + a_2 + \dots + a_r$ 이고 $S_1(z)$ 는 $S(z)$ 보다 적어도 한 차수 이상 낮게 된다.

위의 과정을 $S_1(z)$ 에 대해 반복하면 식 (29)와 유사한 표현식을 얻을 수 있다. 이런 과정을 최대 $\delta = r\delta_r$ 만큼 반복하면 $S(z)$ 는 최종적으로 상수 허마이트 행렬 $S_{const} = S_0^{*'} S_0$ 이 된다. 행렬 $\Psi(z)$ 는 두번째 반복 단계부터는 단위 행렬이 된다. 이러한 분해 과정이 모

두 완료되면 $X(z)$ 는 식 (30)의 $U_1(z)$ 와 유사하게 주어지는 $U_i(z)$, $i=2, 3, \dots, \delta$ 들에 대해

$$X(z) = S_0 U_\delta(z) U_{\delta-1}(z) \cdots U_1(z) \quad (32)$$

와 같이 나타낼 수 있다. 이 $X(z)$ 를 식 (11)에 대입하면 최종적으로 $V(z)$ 의 분해를 완료하게 된다.

III. 다항식 행렬의 분해 예

본 절에서는 앞 절에서 다루었던 다항식 행렬 분해 과정을 예를 통해 살펴보도록 하겠다.

다음과 같은 2×2 행렬 $V(z)$ 가 주어져 있다고 하자.

$$V(z) = \begin{bmatrix} 4z+12+4z^{-1} & 4z+2+17z^{-1}+7z^{-2} \\ 7z^2+17z+2+4z^{-1} & 7z^2+31+7z^{-2} \end{bmatrix}. \quad (33)$$

단계 1 : Smith 형태로의 변환

가) $V(z)$ 의 첫번째 행에 -1 을 곱해서 두번째 행에 더한다. 이것은 $V(z)$ 의 앞쪽에 다음과 같은 행렬을 곱해주는 것과 같다.

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (34)$$

이 연산을 통해

$$V_1(z) = \begin{bmatrix} 4z+12+4z^{-1} & 4z+2+17z^{-1}+7z^{-2} \\ 7z^2+13z-10 & 7z^2-4z+29-17z^{-1} \end{bmatrix} \quad (35)$$

와 같은 결과를 얻을 수 있다.

나) $V_1(z)$ 의 첫번째 행과 두번째 행을 바꾼다. 이것은 $V_1(z)$ 의 앞쪽에 다음과 같은 행렬을 곱해주는 것과 같다.

$$L_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (36)$$

이 연산을 통해

$$V_2(z) = \begin{bmatrix} 7z^2+13z-10 & 7z^2-4z+29-17z^{-1} \\ 4z+12+4z^{-1} & 4z+2+17z^{-1}+7z^{-2} \end{bmatrix} \quad (37)$$

와 같은 결과를 얻을 수 있다.

다) 위의 연산과정과 유사하게 다음과 같은 기본 행

렬 $L_3, L_4, L_5, L_6, L_7, L_8$ 을 이용하여 선행곱셈(preproduct)한다.

$$L_3(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{5}z^{-1} & 1 \end{bmatrix}, \quad L_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$L_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{35}{34}z + \frac{200}{289} & 1 \end{bmatrix}, \quad L_6 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{289}{550} \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$L_7 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{34}{5}z - \frac{86}{5} & 1 \end{bmatrix}, \quad L_8 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{550}{289} \end{bmatrix}. \quad (38)$$

이어서 다음과 같은 기본 행렬 L_9 을 이용하여 후행곱셈(postproduct)한다.

$$L_9 = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{17}{110}z + \frac{19}{220} - \frac{299}{220}z^{-1} - \frac{4}{55}z^{-2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (39)$$

이 경우, 최종적으로

$$V_9(z) = L_8 L_7 L_6 L_5 L_4 L_3 L_2 L_1 V(z) L_9 \quad (40)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2z^2-9z+14-9z^{-1}+2z^{-2} \end{bmatrix},$$

$$S(z) = \begin{bmatrix} 4z+12+4z^{-1} & \frac{1}{110}(-34z^2+86z-20-32z^{-1}) \\ \frac{-1}{110}(-32z-20+86z^{-1}-34z^{-2}) & \frac{-1}{110^2}(272z^2-1334z+2729-1334z^{-1}+272z^{-2}) \end{bmatrix} \quad (41)$$

$$H(z) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{17}{110}z - \frac{19}{220} + \frac{299}{220}z^{-1} + \frac{4}{55}z^{-2} \\ 0 & 2-3z^{-1}+z^{-2} \end{bmatrix} \quad (42)$$

와 같은 결과를 얻을 수 있다.

단계 2 : $S(z)$ 의 분해

가) 식 (41)의 $S(z)$ 에 대해

$$P_1 = I, \quad \Psi_1(z) = \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$Q_1(z) = \begin{bmatrix} 1+z^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q_1(z) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{8}{110} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (43)$$

와 같은 행렬을 이용해 식 (12), (16), (19), (26), (28)의 연산을 순서대로 수행하면

$$S_1(z) = \mathcal{Q}_1^{-1}(z) S_0(z) \mathcal{Q}_1^{-1}(z) \\ = \begin{bmatrix} 4z+12+4z^{-1} & \frac{1}{110}(-2z+214+108z^{-1}) \\ \frac{1}{110}(108z+214-2z^{-1}) & \frac{1}{110^2}(-54z+5833-54z^{-1}) \end{bmatrix} \quad (44a)$$

$$U_1(z) = \mathcal{Q}_1(z) \mathcal{Q}_1^{-1} \mathcal{Q}_1^{-1}(z) \Psi_1^{-1}(z) P_1^{-1} \\ = \begin{bmatrix} z^{-1} & -\frac{8}{110} & -\frac{8}{110}z^{-1} \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} \quad (44b)$$

와 같은 식을 얻을 수 있다.

지금까지의 연산들이 분해 과정의 첫번째 순환이다. 이러한 연산을 통하여 행렬의 차수가 1만큼 감소되었다.

나) 두번째 순환을 위하여 식 (44a)의 $S_1(z)$ 를 $S(z)$ 로 간주한다. 이 경우에는

$$P_2 = I, \quad \Psi_2(z) = I, \quad \mathcal{Q}_2(z) = I,$$

$$\mathcal{Q}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{27}{110} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (45)$$

를 이용하고, 동일한 연산 과정을 통하여

$$S_2(z) = \begin{bmatrix} 4z+12+4z^{-1} & -z-1 \\ -1-z^{-1} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}, \\ U_2(z) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{27}{110} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (46)$$

을 얻을 수 있다.

다) 세번째 순환을 위해서는

$$P_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Psi_3(z) = I, \\ \mathcal{Q}_3(z) = \begin{bmatrix} 1+z^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{Q}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (47)$$

을 이용하며, 이 경우

$$S_3(z) = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad U_3(z) = \begin{bmatrix} -4-4z^{-1} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (48)$$

을 얻게 된다. 세번째 순환을 통해 상수 행렬을 얻었으므로 순환 단계는 종료된다.

행렬 S_0 를

$$S_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (49)$$

와 같이 취하면, $S_3(z) = S_{const} = S_0^{-1} S_0$ 와 같이 되므로

$$X(z) = S_0 U_3(z) U_2(z) U_1(z) \\ = \begin{bmatrix} -2z^{-1}-2z^{-2} & \frac{1}{110}(17-22z^{-1}+16z^{-2}) \\ 2z^{-1} & \frac{1}{110}(38-16z^{-1}) \end{bmatrix} \quad (50)$$

과 같은 식을 얻을 수 있다. 이 식을 식 (42)의 $H(z)$ 와 결합하면

$$\hat{M}(z) = \begin{bmatrix} -2z^{-1}-2z^{-2} & -z^{-1}-\frac{3}{2}z^{-2}-\frac{7}{2}z^{-3} \\ 2z^{-1} & 1-\frac{3}{2}z^{-1}+\frac{7}{2}z^{-2} \end{bmatrix} \quad (51)$$

을 얻게 된다. 마지막으로 범일원적 행렬 $E(z)$ 를

$$E(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -z & 1 \\ -z & -1 \end{bmatrix} \quad (52)$$

와 같이 취하면, 최종적으로

$$M(z) = E(z) \hat{M}(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 2+4z^{-1} & 2+7z^{-2} \\ 2 & 3z^{-1} \end{bmatrix} \quad (53)$$

과 같이 간단한 형태의 행렬을 얻게 된다.

IV. MIMO LBR 시스템 구현에의 적용

본 절에서는⁴⁾ 다항식 행렬의 분해를 MIMO LBR 시스템의 구현에 어떻게 적용할 것인가에 대해 살펴보기로 하자.

MIMO LBR 시스템은 단일 입출력(single-input single-output : SISO) 시스템에서의 전역통과필터를 다중 입출력 형태로 확장해 놓은 것으로 볼 수 있다. SISO 시스템에서 전역통과필터는 다항식 $A(z)$ 에 대해

$$H(z) = z^{-N} A^*(z^{-1}) / A(z) \quad (54)$$

와 같이 정의되므로, $H^*(z^{-1})H(z) = 1$ 의 관계를 만족한다. 이와 유사하게 MIMO LBR 시스템에서는

4) 본 절에서 사용되는 변수는 앞 절에서 사용된 변수와는 독립적이다. 따라서 앞 절에 사용된 변수가 다시 사용되더라도 다른 것으로 받아들인다.

$$G(z) = N(z) D^{-1}(z) \quad (55)$$

인 전달함수 $G(z)$ 에 대해

$$\tilde{G}(z) G(z) = I \quad (56)$$

와 같은 범일원적 관계를 만족한다^[21]. 이와 같은 성질을 만족하는 MIMO LBR 시스템은 회전블록을 이용하여 저민감도, 고안정도 등의 바람직한 특성을 갖도록 구현할 수 있다.

그러나 일반적인 MIMO 시스템은 LBR 성질을 만족시키지 못하는 단순한 BR 시스템에 불과하다. 즉 MIMO 시스템의 전달함수를 $T(z)$ 라 하고

$$T(z) = L(z) D^{-1}(z) \quad (57)$$

와 같이 나타낼 때, $\tilde{T}(z) T(z) \neq I$ 가 된다. 이러한 전달함수 $T(z)$ 를 MIMO LBR 시스템으로 구현하기 위해서는 주어진 BR 행렬로부터 LBR 행렬을 새로이 구성해야 한다. 이것은 다음과 같은 삽입 과정을 통해 수행할 수 있다^[31]: 먼저, 다음과 같은 형태를 갖는 새로운 전달 행렬 $G(z)$ 를 구성한다.

$$G(z) = \begin{bmatrix} L(z) \\ M(z) \end{bmatrix} D^{-1}(z). \quad (58)$$

이 식에서 다항식 행렬 $M(z)$ 는 $G(z)$ 가 LBR 성질, 즉 $\tilde{G}(z) G(z) = I$ 을 만족하도록 결정한다. 이를 수식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\tilde{M}(z) M(z) = \tilde{D}(z) D(z) - \tilde{L}(z) L(z). \quad (59)$$

위의 관계식을 만족하는 $M(z)$ 는 식 (59)의 우변의 정규화 계수를 R 이라 할 때 크기가 $R \times M$ 인 다항식 행렬이다. 이 경우 $\tilde{M}(z) M(z)$ 는 크기가 $M \times M$ 이고 정규화 계수가 R 인 범공역 허마이트 행렬이 된다. 따라서 2절에서의 다항식 행렬 분해 방법을 이용하면 다항식 행렬 $\tilde{M}(z) M(z)$ 로부터 구할 수 있다. 이 과정으로부터 다항식 행렬의 분해가 변환 영역 IIR 필터를 MIMO LBR로 구현하는 데 필수불가결한 역할을 수행함을 알 수 있다.

이제, 식 (58)을 다음과 같이 나타내자.

$$G(z) = N(z) D^{-1}(z). \quad (60)$$

이 식에서 $N(z) = [L^T(z) M^T(z)]^T$ 이고, $N(z)$ 와 $D(z)$ 는 각각 크기가 $P \times M$ ($P = M + R$)과 $M \times M$ 인

다항식 행렬이다. 이 경우 식 (60)은 MIMO LBR 시스템의 일반적인 표현식이 된다. 이런 과정을 거쳐 구현된 $G(z)$ 는 LBR 이단자망의 직렬 연결 형태로 구현할 수 있다. 즉, 다항식 행렬의 차수를 K 라 할 때, 이를 위첨자로 표시하여 식 (60)을 다시 나타내면

$$G^{(K)}(z) = N^{(K)}(z) (D^{(K)}(z))^{-1}. \quad (61)$$

와 같이 되며, 이 경우 적절한 LBR 연쇄행렬 $\Pi^{(K)}$ 의 추출에 의해

$$\begin{bmatrix} D^{(K)}(z) \\ N^{(K)}(z) \end{bmatrix} = \Pi^{(K)} \begin{bmatrix} D^{(K-1)}(z) \\ z^{-1} N^{(K-1)}(z) \end{bmatrix} \quad (62)$$

와 같이 차수가 낮아진 새로운 LBR 전달행렬

$$G^{(K-1)}(z) = N^{(K-1)}(z) (D^{(K-1)}(z))^{-1}$$

를 얻을 수 있다. 이와 같은 LBR 이단자망 추출 과정을 반복하면, 최종적으로 MIMO LBR 시스템을 그림 1과 같은 LBR 이단자망 직렬 연결 구조로 구현할 수 있다^[31]. 이와 같은 구조를 실제 구현함에 있어서는 그림 2에 도시된 회전 블록을 이용하는 것이 효과적인 것으로 나타났다^[7]. 그림 3은 $P=4$ 이고 $M=2$ 인 경우의 1차 MIMO LBR 시스템 구현의 전체적인 구조를 보여준다.

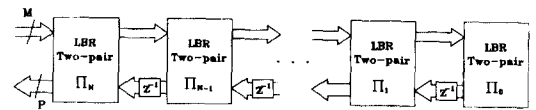


그림 1. MIMO LBR 시스템의 LBR 이단자망 직렬 연결 구현

Fig. 1. LBR two-pair cascaded realization of MIMO LBR system.

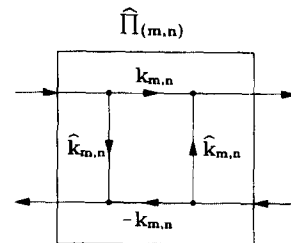


그림 2. 2×2 회전 블록 $\hat{\Pi}_{(m,n)}$

Fig. 2. Internal structure of a 2×2 rotation cell

$$\hat{\Pi}_{(m,n)}$$

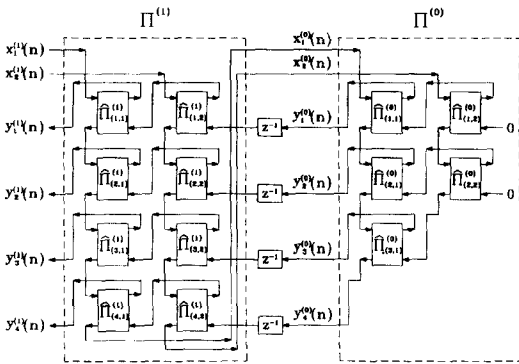


그림 3 2x2 회전 블록을 기반으로 한 MIMO LBR 구현의 전체적인 구조

Fig. 3. Overall structure of the 2x2 rotation cell based MIMO LBR realization.

V. 결론

본 논문에서는 디지털 영역에서 다항식 행렬을 분해하는 방법을 제안하였다. 이 방법은 Smith 형태 분해에 기초를 두고 있으며, 단위원 상에서 양의 준 정부호 형식인 범공액 허마이트 행렬에 대해 적용할 수 있다. 다음으로 BR 전달 행렬이 주어져 있고 이를 MIMO LBR 시스템으로 구현하려 할 때 어떻게 다항식 행렬 분해 방법을 적용하는지에 대해 살펴보았다. 제안된 분해방법은 기존의 다항식 행렬 분해 방법들이 쌍선형 변환을 통해 아날로그 영역에서 다항식 행렬의 분해를 수행하는데 비해서 디지털 영역에서 모든 분해 과정을 수행하는 첫 다항식 행렬 분해 방법이라는 점에서 의미를 지니며, 아날로그 영역에서 디지털 영역으로 변환

하는 과정에서 나타날 수 있는 계산상의 오류를 방지할 수 있다는 장점을 가진다.

참고 문헌

- [1] D. C. Youla, "On the factorization of rational matrices," *IRE Trans. Information Theory*, pp. 172-189, July, 1961.
- [2] P. P. Vaidyanathan, *Multirate systems and filter banks*, Prentice Hall, 1993.
- [3] P. P. Vaidyanathan and S. K. Mitra, "A general family of multivariable digital lattice filters," *IEEE Trans. Circuits and Systems*, vol. 32, pp. 1234-1245, Dec. 1985.
- [4] D. Henrot and C. T. Mullis, "A modular and orthogonal digital filter structure for parallel processing," in *Proc. IEEE Int. Conf. Acoustics, Speech, Signal Processing*, pp. 623-626, Apr. 1983.
- [5] S. K. Rao and T. Kailath, "Orthogonal digital filters for VLSI implementation," *IEEE Trans. Circuits and Systems*, pp. 933-945, Nov. 1984.
- [6] T. Kailath, *Linear Systems*, Prentice-Hall, 1980.
- [7] S. J. Maeng, I. -T. Lim and B. G. Lee, "LBR realization of MIMO systems using rotation blocks," to appear in *IEEE Trans. on CAS II*.

저 자 소 개

**孟勝柱(正會員)**

1969년생. 1991년 2월 서울대학교 전자공학과 졸업. 1993년 2월 서울대학교 전자공학과(석사) 졸업. 현재 서울대학교 대학원 전기공학부 박사과정 재학 중. 주관심 분야는 디지털 신호처리 및 통신 신호처리 등임

林一澤(正會員) 第 31卷 B編 第 1號 參照

1965년생. 1988년 2월 서울대학교 전자공학과 졸업. 1990년 2월 서울대학교 대학원 전자공학과(석사) 졸업. 1994년 8월 서울대학교 대학원 전자공학과에서 박사학위 취득. 현재 LG전자기술원 선임연구원으로 재직 중. 주관심분야는 디지털 신호처리, 음성 신호처리 및 회로이론 등임

**李乘基(正會員)**

1951년생. 1974년 서울대학교 전자공학과 졸업. 1978년 경북대학교 대학원 전자공학과(석사) 졸업. 1982년 University of California, Los Angeles에서 박사학위 취득. 1974년 ~ 1979년 해군사관학교 교관.

1982년 ~ 1984년 Granger Associates, Santa Clara, CA, 연구원. 1984년 ~ 1986년 AT&T Bell Laboratories, North Andover, MA, 연구원. 1986년 9월 ~ 현재 서울대학교 전기공학부 교수. 주관심 분야는 디지털 신호처리, 디지털 전송, 광대역 통신망, 통신 신호처리 등임